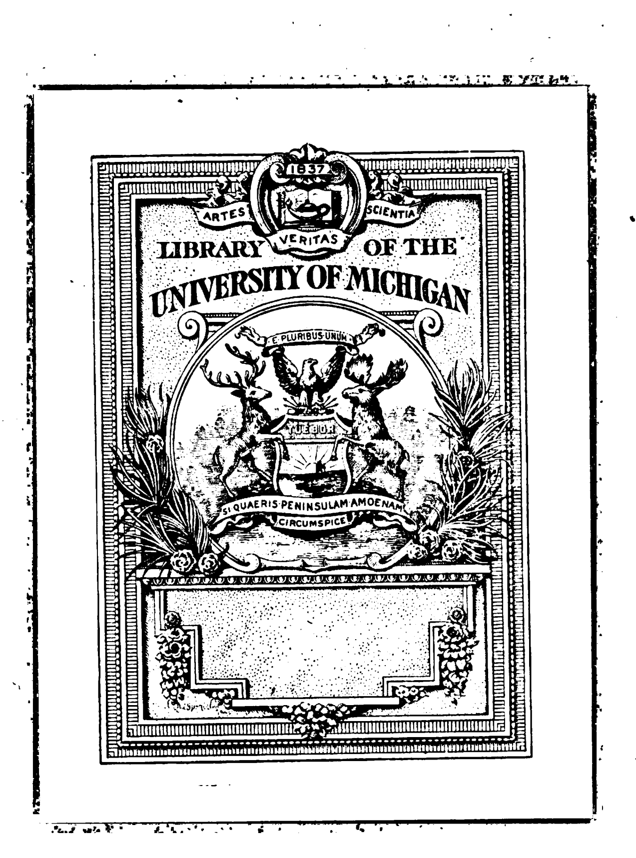
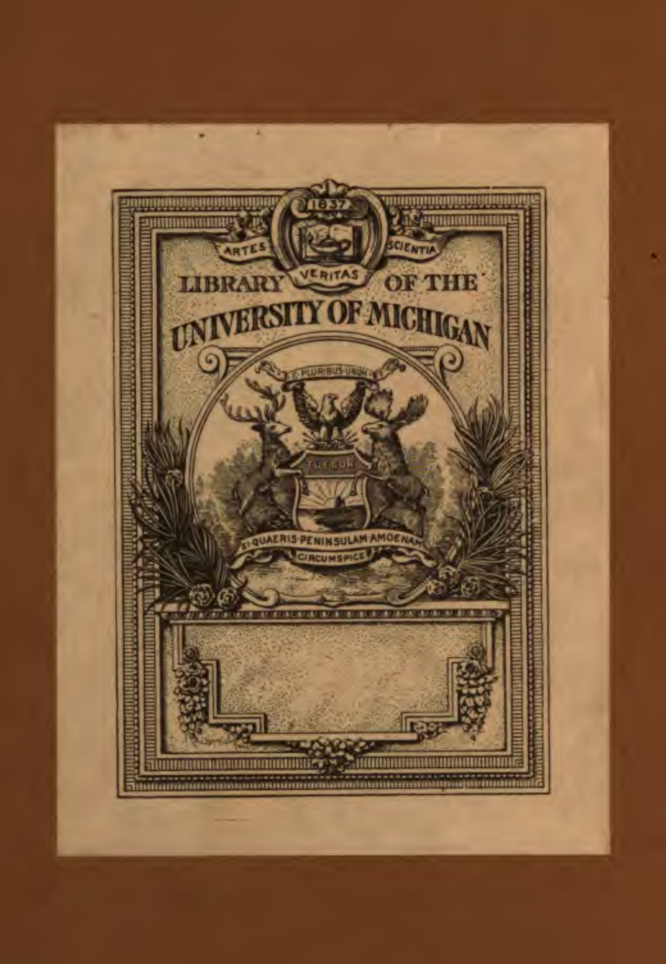

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



QC
37
.K79e
1901

LEHRBUCH

DER

PRAKTISCHEN PHYSIK

VON

DR. F. KOHLRAUSCH,

PRÄSIDENT DER PHYSIKALISCH-TECHNISCHEN REICHSANSTALT IN CHARLOTTENBURG,

ORD. HONORARPROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BERLIN.

NEUNTE UMGEARBEITETE AUFLAGE
DES LEITFADENS DER PRAKTISCHEN PHYSIK.



LEIPZIG UND BERLIN,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1901.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Aufgaben, welche der praktischen Physik gestellt werden können, lassen sich in vier Punkte zusammenfassen. Zunächst steht erfahrungsgemäfs fest, dafs ein Teil der physikalischen Lehren, und zwar vorzugsweise der quantitative, also nicht der unwichtigste, durch blofses Hören nicht begriffen wird. Interesse und Verständnis für diese Sätze werden nicht durch den blofsen Vortrag geweckt, wogegen oft die einmalige praktische Anwendung eines Satzes genügt, um den Schüler mit ihm vertraut zu machen. Zweitens gibt es eine Reihe von Aufgaben, deren Ausführung dem Chemiker, Mineralogen, Mediciner, Pharmaceuten oder Techniker bekannt sein soll. Die Vorlesung, wenn sie überhaupt auf eine solche Aufgabe eingeht, kann diese nur in principieller Weise behandeln; von hier aber bis zur praktischen Ausführung ist noch ein weiter Schritt. Der Stand der Kenntnisse in diesen Dingen macht denn auch den bisherigen Mangel an praktischem Unterricht fühlbar genug: ihre geringe Verbreitung, die oft eine erstaunliche Scheu vor den einfachsten physikalischen Aufgaben zur Folge hat, ist eben so bekannt, wie erschreckend grofs.

Sodann aber liegt für die Physik selbst das Bedürfnis einer Vorschule für die experimentelle wissenschaftliche Forschung vor. Unterrichtsgegenstand kann freilich die eigentliche Forschung nur in sehr beschränktem Mafse sein, wohl aber fordern die Pflicht und das eigene Interesse von der Physik, dafs sie den künftigen Physiker mit seinem, ich möchte sagen wissenschaftlichen Handwerkszeug vertraut macht. Es bleiben immer noch mehr als genug Einzelheiten übrig, welche bei einer Untersuchung selbständig beschafft werden müssen.

Die genannten drei Disciplinen sind es in erster Linie, welche das Buch in's Auge faſst, indem es Vorschriften zur Ausführung physikalischer Messungen gibt und dabei diejenigen bevorzugt, welche als Anwendungen auſserhalb der Physik oder als Elemente wissenschaftlicher Untersuchung eine besondere Bedeutung haben. Soll auch die vierte Aufgabe, nämlich die Heranbildung physikalischer Lehrer durch Versuche mit Unterrichtsapparaten hereingezogen werden, so glaube ich, daſs auch diese Übungen am besten durch eine passende Auswahl der instrumentellen Mittel mit messenden Aufgaben zu verbinden sind. Dadurch wird die Gefahr vermieden, daſs die Anstellung von Versuchen, welche kein bestimmtes Ziel haben, in Spielerei ausarte. Ein eigentlicher Kursus in Unterrichts-Experimenten würde manchen Schwierigkeiten begegnen; er erscheint aber auch weniger notwendig; denn wer sich in den quantitativen Aufgaben einige Gewandtheit erworben hat, wird auch die Vorlesungsversuche ohne Schwierigkeit bewältigen.

Inhalt und Umfang einer Anleitung zur physikalischen Arbeit werden vor allem durch die Grenze der Genauigkeit bestimmt, bis zu welcher die Aufgaben durchgeführt werden sollen, und darin bleibt natürlich ein weiter Spielraum. Ich habe die Grenze inne zu halten gesucht, bei welcher die um der Einfachheit willen vernachlässigten Korrektionen mindestens nicht gröſser sind, als die unfreiwilligen Beobachtungsfehler bei den gewöhnlich gebrauchten Instrumenten und bei mittlerer Geschicklichkeit im Beobachten. Bei den sehr auseinander gehenden individuellen Zwecken und Mitteln kann ich selbstverständlich nicht daran denken, Jedermanns Wünschen gerecht geworden zu sein, vielmehr wird ohne Zweifel der Eine noch eine gründlichere Behandlung vermissen, wo dem Anderen die Strenge schon als Pedanterie erscheint.

An bestimmte Instrumente schlieſsen sich die Anleitungen, wo es möglich war, nicht an; auch Beschreibungen von Apparaten finden sich selten, denn letztere sind ja dem Arbeitenden meistens gegeben, und in den Lehrbüchern der Experimentalphysik findet er fast immer Abbildungen und Beschreibungen. Nur bei einigen neueren oder weniger bekannten Apparaten ist eine Ausnahme gemacht worden.

Die ausführliche Begründung aller Rechnungsregeln würde zu weit gehen, doch sind häufig kurze Beweise und Erläuterungen (mit kleiner Schrift) beigefügt worden, um dem Arbeitenden die Einsicht in den Zusammenhang zu erleichtern. Zum Verständnis der magnetischen und elektrischen absoluten Messungen, denen eine übersichtliche Literatur fehlt, auf welche aber die praktische Physik das gröfste Gewicht legen mufs, wird im Anhang eine kurze Darlegung der wichtigsten Punkte des absoluten Mafssystems gegeben.

Der mathematische Apparat beschränkt sich, aufser an wenigen Stellen in den Erläuterungen, auf Elementar-Mathematik*).

Von den zum gröfseren Teil neu berechneten Tabellen dürften manche auch für Physiker nützlich sein. Ich habe mich bemüht, sie auf das beste Beobachtungsmaterial zu gründen.

Im Mai 1872.

Zur neunten Auflage.

Die vorstehenden Worte, zu einer Zeit geschrieben, da der Verfasser sich mit der Aufgabe beschäftigte, einen praktisch physikalischen Anfängerkurs einzurichten, für den man damals noch kein Muster fand, werden für das Programm der physikalischen Übungen immer noch wesentlich zutreffen.

Die erste Ausgabe des Leitfadens hatte aus einigen zusammengehefteten Bogen bestanden, gedruckt zu dem Zwecke, das Lehren und Lernen bei den Aufgaben zu erleichtern, die ich in dem Mafse wie die vorhandenen Mittel es gestatteten, nach und nach in das Übungslaboratorium einführte. Die gedruckten Blätter waren dann meinen Lehrern und Freunden Wilhelm Weber und Beetz vorgelegt worden, von denen der Erstere, obwohl er sich an der Einrichtung und Leitung des

*) Anm. 1896. Als ein übersichtliches Hilfsbuch für mathematische Entwickelungen wird Manchem die „Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften“ von Nernst und Schönflies willkommen sein.

Praktikums nicht beteiligte, diesem doch stets, und zwar besonders auch für den Elementarunterricht, einen grofsen Wert beilegte, während Beetz zu gleicher Zeit in München selbst physikalische Übungen eingeführt hatte, die er persönlich leitete. Beide rieten zur Veröffentlichung der Blätter, die dann in einem bald folgenden Neudruck geordnet und ergänzt wurden.

In den späteren Auflagen weicht der Inhalt von dem ursprünglichen Programm ab, insofern zunehmend für wissenschaftliche Zwecke Gegenstände eingereiht wurden, die nicht eigentlich zum Unterricht zu rechnen sind. Die vorliegende Ausgabe legt sich in dieser Richtung noch weniger Einschränkung auf als die bisherigen, da inzwischen für die Zwecke des elementaren Praktikums der kleine Leitfaden erschienen ist. Zur bequemeren Unterscheidung von diesem — nicht mit dem Anspruch, erschöpfend zu sein — ist der Titel Lehrbuch gewählt worden.

Es wurde natürlich erwogen, ob der Stoff zwischen den beiden Ausgaben derartig zu teilen sei, dafs die eine sich der anderen als Fortsetzung anschlösse; indessen ist dies doch nicht leicht durchführbar, und für den Gebrauch würden unbequeme Folgen daraus entstanden sein. Demgemäfs wird die Vollständigkeit auch in dem „Lehrbuch" festgehalten, so dafs dieses in dem Anfangspraktikum dienen kann, sobald der Arbeitende nicht scheut, seine Aufgabe aus einer gröfseren Menge anderen Inhaltes herauszusuchen und die für ihn weniger in Betracht kommende Literatur, sowie auch zuweilen ein wenig mehr mathematische Zugaben mitzunehmen, welche ja aber dem, der sie zu gebrauchen weifs, auch eine raschere und eingehendere Kenntnis ermöglichen. Aufser dem Fachstudirenden der Physik, Mathematik, physikalischen Chemie oder Elektrotechnik wird auch mancher andere vorziehen, bei der Arbeit gleich die gröfsere Ausgabe zu gebrauchen und dabei vielleicht durch Lektüre manches kennen zu lernen, was in den Kurs des Praktikums nicht eingeschlossen ist.

Der Gang ist in beiden Büchern der gleiche, und soweit es sich ohne starken Zwang durchführen liefs, nämlich in den ersten hundert Paragraphen, stimmt auch die Bezifferung überein.

Die doppelte Aufgabe, welche das Buch sich stellt, bringt es mit sich, dafs die Darstellung, einschliefslich der eingeschobenen Figuren, nicht einheitlich ausfällt, dafs sie in den Teilen, welche zum Nachschlagen für den Physiker bestimmt sind, knapper gehalten ist als in dem, was für den Unterricht in Betracht kommt. Diesen Schönheitsfehler, der ja nicht schwer ins Gewicht fällt, brauche ich aber wohl weniger zu entschuldigen als einen anderen mir wohl bewufsten, dafs nämlich in dem Bestreben, dem Buche einen handlichen Umfang zu bewahren, die Darstellung vielfach nur auf die Verständlichkeit und nicht auf eine wohlklingende Sprache Rücksicht nimmt.

Bezüglich der Gesichtspunkte, nach denen die Übungsaufgaben behandelt werden, darf auf das, dem kleinen Leitfaden beigegebene Vorwort verwiesen werden, dessen Inhalt ich auch bei wiederholtem Abwägen zwischen intellektuellem und unmittelbar praktischem Nutzen für richtig halte. Dem entsprechend wird, wenn auch viele Aufgaben durch ihren Anschlufs an moderne Hilfsmittel der Messung bestimmter gefafst worden sind, als nach dem früher in dem Buche herrschenden Gebrauch, möglichst immer die allgemeine Methode als Kernpunkt festgehalten. Dies rechtfertigt sich aber nicht nur durch die Zwecke des Unterrichts. Denn wenn man die Entwicklung der vereinfachenden, auch wohl eleganten Methoden näher verfolgt, die wir der Ausbreitung physikalischer Messung in andere Kreise, besonders in die elektrotechnischen verdanken, so zeigt sich da doch manches als vergänglich. Bei dem, die praktischen Anwendungen in unserer Zeit beherrschenden raschen Stoffwechsel ändern die gebräuchlichen Methoden sich nicht selten, und es kommen häufig Gegenstände, die man als veraltet angesehen hat, ganz unerwartet wieder zu moderner Geltung. Schon aus diesem Grunde ist aus dem Buche manches, momentan als veraltet erscheinende nicht gestrichen worden. Aufserdem aber verbieten ja den meisten Unterrichtsinstituten ihre Mittel, sich immer dem Neuesten anzuschliefsen — eine Einschränkung, die übrigens auch ihre Vorteile hat, denn sie erschwert, dafs manches Nützliche der Vergessenheit anheim fällt.

Recht fühlbar ist mir geworden, dafs die Anregung und Belehrung, welche aus dem Praktikum selbst entspringt, mir

nun seit Jahren abgeht. Einen Ersatz hierfür bildet freilich teilweise die Berührung mit den vielseitigen Arbeitsgebieten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und die Möglichkeit, hier die Erfahrung von Physikern heranzuziehen, welche bestimmte Gebiete vollständig beherrschen. Ich glaube, dafs der Leser diesen Vorteil an vielen Stellen bemerken wird, so in den technischen Anweisungen, in der Thermometrie, dann in zahlreichen Abschnitten der Strahlung, z. B. in den feineren Teilen der Optik, in der Photometrie und Wärmestrahlung; besonders aber in der Elektricitätslehre, wo u. a. der Anwendung der Normalelemente, den Messungen an Wechselströmen und Dynamomaschinen, der Bestimmung von Magnetisirungs- und Dielektricitätskonstanten, den Anwendungen auf die Chemie ein breiterer Platz eingeräumt worden ist als früher.

Zahlreiche Zusätze, Erneuerungen oder Berichtigungen sind auch entgegenkommenden Hinweisen anderer Kollegen zu verdanken. Ausdrücklich anerkennen möchte ich die vielfachen Anregungen von Herrn Dorn und den Beitrag, welchen Herr Arons freundlichst in Gestalt des Kapitels über Hertz'sche Wellen geleistet hat.

Aufserdem schulde ich den direkten Mitarbeitern an der neuen Auflage, nämlich den Herren Diesselhorst, Dolezalek, Grüneisen und Scheel einen besonderen Dank sowohl für die Erleichterung der Arbeit wie auch für wichtige inhaltliche Beiträge.

An vielen Stellen mufste die Ausführung angedeuteter Mefsmethoden durch einen Literaturhinweis ersetzt werden. Soweit es möglich war, sind, natürlich unter Bevorzugung von Quellen, die dem Leserkreis leicht zugänglich erschienen, Citate auf Abhandlungen gewählt worden, in denen die weitere Literatur nachgesehen werden kann.

Für jüngere Leser mögen hier einige von den ausgiebigsten Quellen genannt werden, die zum Aufsuchen physikalischer Literatur dienen können. Wenn der Name des Verfassers gegeben ist, so findet man die älteren und, nach dem hoffentlich baldigen Erscheinen der Fortsetzung auch die neueren Aufsätze in Poggendorff-Oettingen's Handwörterbuch am bequemsten. Ist die Zeit des Erscheinens ungefähr bekannt, so dienen die

Beiblätter zu den Annalen oder bequemer die Fortschritte der Physik zum Nachschlagen und meist, wenn auch nicht immer, zugleich zur Orientirung über den Inhalt. In elektrischen Fragen dürfte unter den neueren Werken G. Wiedemann's Elektricitätslehre am reichhaltigsten sein und meistens genügen; in optischen oft das wertvolle Werk von Dufet, welches die ersten Bände des von der Société Française de Physique herausgegebenen Recueil de Données numériques de Physique bildet, für Spektroskopie bis auf die neueste Zeit das Handbuch von Kayser. Als Nachschlagewerke allgemeinen Inhalts sind natürlich das von Winkelmann herausgegebene Handbuch, ferner nach mancher Richtung die Rapports au Congrès de Physique, dann die Landolt-Börnstein'schen Tabellen, von den Lehrbüchern wohl besonders das von Wüllner mit seiner gewissenhaften Literaturangabe zu nennen.

Ein freilich mühsames und nicht von einem Einzelnen zu bewältigendes, aber gewifs mit Dank begrüfstes Unternehmen würde meines Erachtens in einer ad hoc gemachten sachlich geordneten Zusammenstellung der auf Messungsmethoden bezüglichen Literatur mit Stichwörtern bestehen. Es ist geradezu erstaunlich, welches Wachstum dieser Zweig der Physik in den letzten Jahrzehnten gezeigt hat, so, dafs man bezüglich des Auffindens ohne systematische Hilfsmittel mehr oder weniger dem Zufall unterworfen bleibt, selbst wenn man über die fast zahllosen Quellen, in denen man suchen kann, wirklich verfügen sollte.

Der Leitfaden darf, glaube ich, als für sich in Anspruch nehmen, zuerst und lange Zeit allein eine handliche Zusammenstellung kritisch ausgewählter physikalischer Zahlen gebracht zu haben. Auch diesmal ist dieser, erheblich vergröfserte, Teil des Inhalts unter mehrseitiger Beaufsichtigung mit besonderer Sorgfalt behandelt worden, was freilich nicht mehr so mühsam ist, wie in früheren Zeiten, da jetzt in den bekannten grofsen Tabellensammlungen ein immer reicher werdendes Material als Grundlage vorliegt. Immerhin möchte ich gerade hier die Kollegen um Hinweise auf etwaige Verstöfse bitten.

Genaue Temperaturangaben beziehen sich auf die Skale der Reichsanstalt. Der Kalorimetrie liegt, unter Rücksicht-

nahme auf Herrn Warburg's Darlegungen die Wasserkalorie bei 15° zu Grunde, den Angaben hoher Temperaturen, wo es möglich war, die von den Herren Holborn und Day an das Gasthermometer angeschlossene Skale. Lichtwellenlängen sind einheitlich auf die Michelson'schen Messungen der Cadmiumlinien zurückgeführt. Die Atomgewichte, wie früher auf O = 16 bezogen, schliefsen sich an die Vorschläge der von der Deutschen Chemischen Gesellschaft ernannten Kommission an. Elektrische Leitvermögen werden durchweg auf das Ohm bezogen.

Als Norm für Zimmertemperatur ist 18° so gut wie vollständig durchgeführt worden.

Eine für das Aichen bei Messungen im Gebiete ultraroter oder ultravioletter Strahlen nützliche Tabelle über Brechungsverhältnisse und Absorptionskoefficienten verdankt das Buch Herrn Rubens.

Für die Aufstellung einer neuen erdmagnetischen Tabelle verdienen abermals Herr Neumayer und die Seewarte den Dank der zahlreichen Interessenten. Die Tabelle über Typen magnetisirbaren Materials haben die Herren Gumlich und Schmidt aus den neuesten Bestimmungen ausgezogen, die von ihnen an einer reichen Auswahl von verschiedenen Eisensorten angestellt worden waren.

Zum Zwecke der Vervollständigung oder der Kontrole von Zahlen werden häufig die Quellen angegeben, doch liefs sich dies bei der Zerstreutheit der Arbeiten gerade hier nicht immer durchführen. Es werde also in dieser Hinsicht auf die grofsen Sammelwerke, insbesondere auf die Literaturangaben in den Landolt-Börnstein'schen Tabellen verwiesen.

Charlottenburg im Mai 1901.

Inhalt.

Seite

Alphabetisches Verzeichnis XIX

Allgemeines über Messungen.

1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler . . . 1
2. Beurteilung des Fehlers aus der Methode. Einfluſs auf das Resultat 4
   Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Gröſsen 8
3. Bestimmung empirischer Konstanten mit kleinsten Quadraten . . 9
   Rechnung bei gleich groſsen Intervallen. Auflösung von Gleichungen, wenn Näherungswerte vorliegen. Das Gauſs'sche Rechenverfahren 14
4. Korrektionen und Korrektionsrechnungen 22
5. Interpolation 25
6. Graphische Darstellung von Beobachtungen 26
7. Genauigkeit von Messungen. Zahlenrechnen 27
8. Technisches 29
   1. Quecksilber. 2. Wasser. 3. Gase. 4—10. Glas. 11. Amalgamiren. 12. Löten. 13. Platin schweiſsen. 14. Stahl härten. 15. Ausglühen. 16. Magnetisiren; entmagnetisiren. 17. Schleifen und Poliren. 18. Galvanoplastik. 19. Paraffiniren. 20. Cocon. 21. Quarz. 22. Luftpumpenfett. 23. Wasser- u. 24. Quecksilberluftpumpe. 25. Quecksilberdichtungen. 26. Motoren. 27. Temperaturbäder. 28. Rührer. 29. Elektrische Heizung. 30. Luftverflüssigungsmaschine. 31. Kautschuk. 32. Dämpfer. 33. Aufstellung in unruhigen Gebäuden.
9. Herstellung von Lösungen 43

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

10. Wage und Wägung 45
11. Empfindlichkeit einer Wage 50
12. Verhältnis der Wagearme 51
13. Absolute Wägung eines Körpers. Doppelwägung. Tarirung . . 53
    Reduktion auf den leeren Raum 54
14. Korrektionstabelle eines Gewichtsatzes 55
15. Dichtigkeit oder specifisches Gewicht; Bestimmungsmethoden . . 58
16. Korrektion einer Dichtigkeitsbestimmung wegen Luftauftriebs und Temperatur 67
17. Volumenometer 70
18. Umrechnung der Zustände von Gasen. Berechnung der Dichtigkeit 71

Seite

18a. Eudiometer 73
19. Dampfdichte 74
20. Gasdichte. Wägungs- und Ausströmungsmethode 81

Raummessung.

21. Längenmessung. Strichmafse. Kontaktmafse. Sphärometer . . 85
22. Kathetometer 90
22a. Ophthalmometer 91
23. Bestimmung eines Hohlvolumens durch Auswägen 93
24. Kalibrirung einer engen Glasröhre 94
25. Winkelmessung mit Spiegel und Skale 97
26. Ableitung der Ruhelage aus Schwingungen 100
27. Dämpfung und logarithmisches Dekrement 101
27a. Bifilare Aufhängung 103

Zeitmessungen. Geographische Bestimmungen.

28. Schwingungsdauer 105
29. Trägheitsmoment 108
29a. Messung sehr kurzer Zeiten 110
30. Astronomische Bezeichnungen 112
30a. Theodolit, Universalinstrument 113
31. Meridianrichtung eines Ortes 116
32. Polhöhe 118
33. Zeitbestimmung aus Sonnenhöhen 119
34. Gang einer Uhr. Festhaltung einer absoluten Zeit 122
35. Gravitationskonstante. Sekundenpendel 123

Druck.

36. Druckmessung. Manometer 127
37. Atmosphärischer Druck. Barometer 132
38. Barometrische Höhenmessung 135

Wärme.

39. Formen von Thermometern. Allgemeines 138
40. Quecksilberthermometer. Eis- und Siedepunkt 140
Veränderlichkeit der Fixpunkte. Thermometrie mit steter Nullpunktsbestimmung. Herausragender Faden. Reduktion auf das Gasthermometer 142
41. Kalibrirung eines Thermometers 146
42. Gas- oder Luftthermometer 151
43. Elektrische Temperaturmessung. Thermoelement. Widerstands-Thermometer („Bolometer“) 154
43a. Messung tiefer und hoher Temperaturen. Luftpyrometer. Elektrische Pyrometer 156
44. Wärme-Ausdehnungskoefficient. Durch Längenmessung, Lichtinterferenz und Wägung. Flüssigkeiten. Gase 159

		Seite
45.	Schmelz- oder Gefrierpunkt	165
46.	Siedepunkt	168
46a.	Dampfspannung	171
47.	Luftfeuchtigkeit (Hygrometrie)	175
48.	Specifische Wärme; Mischungsverfahren. Wasserkalorimeter	179
49.	Specifische Wärme; elektrische Methode	185
49a.	Specifische Wärme; Erkaltungsmethode	187
50.	Eiskalorimeter	187
50a.	Dampfkalorimeter	190
51.	Andere kalorimetrische, physikalische u. chemische Messungen	191
51a.	Wärmeleitvermögen	193

Elasticität und Schall.

52.	Elasticitätsmodul durch Ausdehnung	197
53.	Elasticitätsmodul aus Längsschwingungen	200
54.	Elasticitätsmodul durch Biegung	202
55.	Torsionsmodul	204
55a.	Elasticitätszahl. Querkontraktion	206
55b.	Elastische Nachwirkung	208
56.	Wellenlängen. Schallgeschwindigkeit	210
57.	Absolute Schwingungszahl eines Tones	214

Kapillarität und Reibung.

58.	Kapillarkonstante	217
59.	Reibungskoefficient einer Flüssigkeit	220

Licht.

59a.	Lichtquellen. Spektrum	225
60.	Brechungsverhältnis eines Prismas. Spektrometer	227
	Dispersion. Fraunhofer'sche Linien. Wellenlänge	235
61.	Reflexionsgoniometer	237
62.	Brechungsverhältnis einer Planplatte mit dem Mikroskop	238
63.	Brechungsverhältnis aus totaler Reflexion	239
	Totalreflektometer. Refraktometer	240
63a.	Lichtbrechungsverhältnis mit dem Interferenz-Refraktor	245
63b.	Schlierenmethode	250
64.	Spektralanalyse	252
65.	Lichtwellenlänge	257
66.	Krümmungshalbmesser	263
67.	Brennweite	267
68.	Vergrößerungszahl. Lupe. Fernrohr. Mikroskop	274
69.	Polarisationswinkel eines Körpers	279
70.	Polarisationsapparat. Untersuchung doppelbrechender Körper	281
	Einaxige Krystalle. Zweiaxige Krystalle. Axenwinkel	283
71.	Optisches Drehvermögen. Saccharimetrie	287

Seite
71a. Erzeugung und Untersuchung elliptischen Lichtes. Babinet's Kompensator. Metallreflexion 296
72. Photometrie 304
72a. Wärmestrahlung. Schwarze Strahlung 312

Magnetismus.

72b. Allgemeines. Stahlmagnete. Aufhängung. Astasirung etc.. . 317
73. Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus 319
Kompensirtes Magnetometer. Bifilarmagnetometer 325
74. Zeitliche erdmagnetische Deklinations- und Intensitätsschwankungen 328
75. Vergleichung der Intensität an zwei Orten 332
76. Magnetisches Moment 334
76a. Temperaturkoefficient eines Magnets 336
76b. Polabstand eines Magnets 338
77. Torsionsverhältnis 339
78. Erdmagnetische Deklination. Magnetischer Theodolit 340
79. Inklination 342

Elektricität. Galvanismus.

80. Allgemeines über galvanische Arbeiten. Elektrische Einheiten. 345
Ohm-Kirchhoff'sche Gesetze. Stromerreger. Normalelemente. . 345
Stromverbindungen und Rheostaten 353
81. Absolute Strommessung. Tangentenbussole 357
82. Sinusbussole 360
83. Spiegelgalvanometer 361
83a. Bifilargalvanometer 365
84. Elektrodynamometer. Elektrodynamische Wage 366
85. Formen von Stromzeigern. Nadel-, Spulen-, Weicheisen-, Hitzdraht-Strommesser 369
85a. Hörtelephon. Optisches Telephon. Vibrationsgalvanometer. . 372
86. Messung starker Ströme mit Abzweigung 373
87. Strommessung durch Elektrolyse. Voltameter 374
88. Strommessung durch Kompensation eines Normalelements. . . 380
89. Prüfung eines Strommessers. Empirische Bestimmung eines Reduktionsfaktors 382
90. Widerstandsbestimmung durch Vertauschen 385
91. Widerstandsbestimmung durch Strommessung 387
92. Differentialgalvanometer 389
93. Wheatstone'sche Brücke. Brücke mit gleichen Widerstandspaaren und Wheatstone-Kirchhoff'sche Drahtbrücke. 392
Sehr kleine Widerstände 397
94. Widerstandsvergleichung durch Dämpfung. 399
94a. Sehr grofse Widerstände. Isolationsmessungen 399
95. Kalibrirung eines Rheostaten oder eines Brückendrahtes . . . 401

Seite

95 a. Temperaturkoefficient eines Leiters 407
95 b. Quecksilberwiderstände 408
96. Leitvermögen von Elektrolyten 409
Äquivalentleitvermögen und Jonenbeweglichkeit. Dissociation 417
96 a. Koncentration einer Lösung aus ihrem Leitvermögen. Löslichkeit 418
97. Widerstand galvanischer Elemente 419
98. Widerstand eines Galvanometers 422
99. Vergleichung elektromotorischer Kräfte oder Spannungen . . 426
Kompensationsverfahren 428
100. Elektromotorische Kraft in absolutem Maſse. Spannungsmesser 430
101. Spannungsdifferenz im Schlieſsungskreise. Klemmspannung . . 432
Messung groſser Stromstärken mit dem Spannungsmesser . . 433
102. Universalgalvanometer und Torsionsgalvanometer 434
103. Kompensationsapparat 436
104. Beziehungen der elektrischen Spannung zur Chemie der Lösungen. Koncentrationsspannung. Normalelektroden 440
Polarisation. Zersetzungsspannung 442
105. Bestimmung eines magnetischen Feldes durch Strommessung 443
106. Windungsfläche einer Drahtspule 445
107. Elektromagnetische Drehung des Lichtes 447
108. Bewegungsgesetze eines schwingenden Körpers mit elektromagnetischer Dämpfung 448
109. Messung kurz dauernder elektrischer Ströme oder entladener Elektricitätsmengen. Ballistisches Galvanometer 452
110. Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode 457
111. Erdinduktor. Hervorbringung bekannter Integrale von elektromotorischer Kraft. Inklination 459
112. Magnetinduktor 461
113. Induktions-Koefficient eines Magnetstabes in schwachem Felde 462
114. Bestimmung eines starken magnetischen Feldes 463
115. Untersuchung magnetisirbaren Materials. Magnetisirungskoefficient. Permeabilität. Induktion 467
116. Absolute Widerstandsmessung. Dämpfung. Erdinduktor . . . 472
Rotirende Scheibe. Aus der Induktion zweier Stromleiter . . 475
Aus der Stromwärme 476
117. Selbstinduktions-Koefficient 477
118. Gegenseitiger Induktions-Koefficient 482
119. Gleichstrom-Dynamomaschinen 483
120. Messungen an Wechselströmen 488
121. Wechselstrom-Dynamomaschinen 496
122. Transformatoren 498
123. Elektrische Lampen 500
124. Geiſsler'sche Röhren. Kathodenstrahlen 502
125. Hertz'sche Wellen 506

Elektrostatik.

Seite

126. Allgemeines über elektrostatische Messungen 511
127. Messung von Potentialen. Elektrometer. Sinuselektrometer, Quadrantelektrometer, Kapillarelektrometer, andere Elektrometer 512
128. Absolute Messung elektrostatischer Potentiale. Thomson'sches Elektrometer. Kirchhoff'sche Wage. Schlagweite 517
129. Aichung und Kalibrirung eines Elektrometers. 519
130. Elektrometrische Messung von Spannung, Widerstand, Stromstärke und Stromleistung 521
131. Elektricitätsmenge eines Kondensators. Mit Elektrometer, Mafsflasche, Galvanometer, Luftthermometer 523
132. Elektrostatische Kapacität. 523
133. Dielektricitätskonstante 532

Das auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte „absolute" Mafssystem mit Anschlufs von Gesetzen und Erläuterungen.

Dimensionen 542
1. Fläche. 2. Raum. 3. Winkel. 4. Geschwindigkeit 545
5. Beschleunigung. 6. Dichte. 7. Kraft. 8. Druck 545
9. Arbeit. Energie. 9a. Wärmemenge. 9b. Absolute Temperaturskale 546
10. Leistung. 10a. Wärmeleitvermögen. 11. Drehmoment 548
11a. Direktionskraft. 12. Trägheitsmoment. 13. Elasticitätsmodul . 548

Elektrostatische Einheiten.

14. Elektricitätsmenge. 14a. Flächendichte 549
14b. Feldstärke. 14c. Kraftlinie. 15. Potential 550
16. Kapacität. 17. Dielektr.-Konst. 18. Strom. 18a. Widerstand . 551

Magnetische Einheiten.

19. Magnetpol. 19a. Flächendichte. 20. Magnetisches Moment . . 552
20a. Specif. Magnetismus, Magnetisirung. 21. Feldstärke 554
22. Magnetisirungs-Koefficient. 22a. Permeabilität. 22b. Magnetische Induktion. 555
23. Stromstärke, chemische Einheit. 556

Elektromagnetische Einheiten.

24. Stromstärke. 25. Elektricitätsmenge 557
26. Elektromotorische Kraft, Potential. 26a. Induktionsflufs . . . 559
27. Kapacität. 28. Induktions-Koefficient, elektrodynam. Potential. 563
29. Leitungswiderstand 565
30. Stromleistung, Stromarbeit, Stromwärme. 566

Tabellen.

1. Korrektion einer Wägung auf den leeren Raum 571
2. Dichtigkeit fester und flüssiger Körper 571
2a. Dichtigkeit von Gasen. 572

Tab.		Seite
3.	Procentgehalt und specifisches Gewicht wässriger Lösungen	572
3a.	Wässrige Normallösungen von 1 gr-Äquiv./Liter: Gehalt, Dichtigkeit, elektrisches Leitvermögen und Wanderung der Ionen	574
4.	Dichtigkeit des Wassers und Volumen eines Glasgefäſses aus der Wägung mit Wasser	575
5.	Ausdehnung des Wassers von 0 bis 100°	575
6.	Specifisches Gewicht der trocknen atmosphärischen Luft von 0 bis 30° und von 700 bis 770 mm Barometerstand	576
7.	Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm	577
8.	Reduktion der Barometerablesung auf 0°	578
9.	Mittlerer Barometerstand in verschiedenen Höhen	579
10.	Kapillardepression des Quecksilbers	579
10a.	Ausdehnungskoefficient wässriger Lösungen um 18°	579
11.	Wärmeausdehnung, specifische Wärme, Wärmeleitvermögen, Schmelzpunkt und Schmelzwärme fester Körper	580
12.	Wärmeausdehnung, specifische Wärme, Schmelzpunkt u. Siedepunkt von Flüssigkeiten	581
13.	Hygrometrische Tabelle u. Spannkraft des Wasserdampfes bis 90°	582
14.	Spannkraft des Wasserdampfes zwischen 90° und 101°	582
14a.	Siedepunkt des Wassers zwischen 680 und 780 mm Druck	583
15.	Löslichkeit in Wasser	583
16.	Quecksilberthermometer und Luftthermometer	584
17.	Absorption von Gasen in Wasser	585
18.	Dampfspannung und kritische Daten	585
19.	Elasticitätsmodul und Tragfähigkeit einiger Metalle	586
20.	Zusammendrückbarkeit und innere Reibung von Flüssigkeiten	586
20a.	Reibungskoefficient des Wassers	586
21.	Tonhöhe und Schwingungszahl ($a_1 = 435$)	587
22.	Spektrallinien nach der Skale von Bunsen und Kirchhoff	587
23.	Wellenlänge der wichtigsten Linien chemischer Elemente und des Sonnenspektrums, zurückgeführt auf $D_1 = 0{,}58960\,\mu$	588
24.	Lichtbrechungsverhältnis einiger Körper und Drehung im Quarze	589
24a.	Brechungsverhältnis von Quarz, Fluſsspat, Steinsalz und Sylvin im sichtbaren, ultraroten und ultravioletten Spektrum	590
25.	Absorptionsvermögen von Kalkspat, Quarz, Fluſsspat, Sylvin, Steinsalz, Wasser, Wasserdampf und Kohlensäure	591
25a.	Reflexionsvermögen von Metallen	591
26.	Farben Newton'scher Ringe	592
27.	Reduktion einer Schwingungsdauer auf kleine Schwingungsweite	593
28.	Reduktion einer Beobachtung mit Spiegel und Skale	593
29.	Zur Reduktion von Beobachtungen gedämpfter Schwingungen	594
30.	Elektricitätsleitung einiger Metalle	595
31.	Elektrisches Leitvermögen wässriger Lösungen	595
32.	Elektrochemische Äquivalente	596
33.	Äquivalent-Leitvermögen von Elektrolyten in wässriger Lösung	596

Tab.		Seite
34.	Ionen-Beweglichkeiten in verdünnter wässriger Lösung	596
35.	Potential und elektrische Schlagweite	597
36.	Dielektricitäts-Konstanten	597
36a.	Schwach magnetische oder diamagnetische Körper	597
37.	Magnetisirbarkeit einiger Eisensorten	598
38.	Erdmagnetische Horizontalintensität im mittleren Europa für 1902	599
39.	Erdmagnetische Deklination im mittleren Europa für 1902	599
40.	Erdmagnetische Inklination im mittleren Europa für 1902	599
41.	Dimensionen einiger Gröfsenarten im absoluten Mafssystem nebst ihrem Mafsverhältnis bei verschiedenen Grundeinheiten	600
42.	Chemische Atomgewichte	601
43.	Schwerbeschleunigung an der Erdoberfläche	601
44.	Geographische Lage und Höhe einiger Orte	601
45.	Deklination der Sonne, Zeitgleichung u. Sternzeit für d. mittl. Mittag	602
46.	Korrektionstabelle für den Jahresanfang	603
47.	Halbmesser der Sonne	603
48.	Astronomische Strahlenbrechung	603
49.	Mittlere Örter einiger Fixsterne für 1900,0	603
50.	Verschiedene Zahlen	604
51.	Quadrate. Quadratwurzeln. Kubikwurzeln. Verwandlung von Bogengraden in absolutes Winkelmafs	605
52.	Tafel zur Wheatstone'schen Brücke	606
53.	Vierstellige Logarithmen	608
54.	Trigonometrische Zahlen	610

Alphabetisches Verzeichnis.

(Die römischen Zahlen bedeuten die Tabellen am Schlufs des Buches.)

Abgeleitete Einheiten 540
Ablenkungsvariometer, magn. 331
Absolute Einheiten 540. XLI
„ Feuchtigkeit 175
„ Temperatur 71. 547
Absorptions-Koeff. XVII. opt. 311. XXV
„ -spektrum 256
„ -wärme 191
Abzweigung, el. 352. 355. 373
Äquivalent, el.-chem. 374. 417. 558. XXXII
„ -leitvermögen 417. XXXIII und XXXIV
Akkumulatoren 351
Aktivität, opt. 287; el.-opt. 447
Albedo 305
Amalgamiren 34. 348
Ampere, el. 345. 358. 559
Aneroid 134
Aperiod. Schwingung 451
Apertur, numerische, opt. 278
Aräometer 61. 65
Arbeit 546; el. 487. 491; von Gasen 547
Astasirung, magn. 318
Astronom. Bezeichnungen 112
„ Tabellen XLV—XLIX
Atomgewichte XLII
Atomvolumen 59
Atomwärme 180
Atwood-Fallapparat 125
Aufhängefaden 37. 60. 64. 109. 317
Auflösung von Gleichungen 15
Aufstellung, erschütterungsfreie 42
Augenblickskontakt, el. 497
Ausbreitungswiderstand, el. 346
Ausdehnung, kubische 24. 70. 163
„ der Gase 71. 164. VI. VII
„ des Quecksilbers 145. XVI
„ des Wassers IV. V
Ausdehnungskoefficient 10. 159 ff. Xa. XI. XII
Ausflufsthermometer 162
Avogadros Gesetz 74. 547
Axen, opt. 285
Azimut 112

Babinet's Kompensator 299
Barometer-Reduktion 25. 133. VIII
Barometerstand und Höhe 132. IX
Beleuchtung 304
Beobachtungsfehler 1 ff.
Beschleunigung 545
Beugung, opt. 257
Biegung, elast. 202
Bifilar-Aufhängung 102. 109. 318. 549
„ -dynamometer, el. 366. 493
„ -galvanometer 365. 443
„ -magnetometer, absolutes 326
„ -variometer 329
Bifilare Wicklung 354
Bildweite einer Linse 268
Bogenlampe, el. 501
Bolometer 155. 314
Bombe, kalorim. 193
Boyle's Gesetz 71

Brechender Winkel 227
Brechungsverhältnis, opt. 227ff. XXIV. XXIVa
„ v. Flüssigkeiten 228. 235. 239. 242. 287
„ v. Krystallen 241
Brennweite 267
British-Association-Einheit 345
Brücke, el. 347. 392 ff. LII
Bunsen-Kirchhoff'sche Spektralskale 253. XXII
Bussole, geodät. 342. XXXIX

Cal-, Cap-, Coll-, Comp-, Corr- etc. siehe unter K
Cailletet'sche Pumpe 129
Chronoskop 110
Cirkularpolarisirtes Licht 284. 296. 301
Cocon 36. 317. 339
Coulomb, el. 453. 559

Dampfdichte 74 ff.
Dampfkalorimeter 190
Dampfspannung 171 ff. XVIII
„ der Lösungen 173
„ des Wassers 175. XIII. XIV. XIVa
„ der Schwefelsäure 379
Dampfwärme 192. XII
Dämpfer 42
Dämpfungsverhältnis 101. 399. 448. 454. XXIX
Deklination, magn. 328. 340. XXXIX
„ astr. 112. XLIX
„ der Sonne 112. 120. XLV
Dekrement, logarithmisches 101. 448
Depression des Eispunktes 142
Dichtigkeit 58 ff. II—VI
„ der Gase 71 ff. IIa. VII
„ der Luft 71. VI
„ des Quecksilbers 93
„ des Wasserdampfs 175
„ Fehlerrechnung 7
Dickenmessung 88. 198
Dielektr.-Konstante 532. 551. XXXVI
Differential-Galvanometer 389
Differentialinduktor 392. 416
Dilatometer 160. 163
Dimensionen abs. Maſse 542. XLI
Direktionskraft 103. 548
Dispersion, opt. 235. 249; el. 537
„ anomale 236. 537
Dissociation 74. 167; el. 418
Doppelbrechung, opt. 282. 296
Doppelquarz, opt. 290
Doppelschaltung, el. 515
Doppelwägung 25. 53
Drahtstärke, günstigste, galv. 356
Drehaxe, Nivellirung 114
Drehmoment 548
Drehvermögen, opt. 287. 292
„ el.-opt. 447. 465
Druck 127 ff. 546
Durchbiegung, 90. 202
Dynamomaschinen, el. 351. 483. 496
Dynamometer 488; el. 366. 493
Dyne 545

Effekt, el. 486; Effektmesser 493
Einheiten, absol. 540. XLI
„ el. 345. 549 ff. 557 ff. XLI
Eisenuntersuchung, magn. 467
Eiskalorimeter 187
Eispunkt, Therm. 140
Elasticitätsmodul 197 ff. 549. XIX
Elast. Nachwirkung 200. 208
Elasticitätszahl 206.
Elektricität, s. auch Äquivalent, Arbeit, Dynamometer, Elemente, Induktion, Integral, Isolirung, Kapacität, Kirchhoff, Leistung, Leitvermögen, Quadrant, Rückstand, Spannung, Strom, Temperaturmessung, Wärmeleitvermögen, Wage, Widerstand etc.
Elektricitätsmenge 452. 523. 549. 559
Elektr. Heizung 41
Elektr. Lampen 500
Elektrodynam. Wage 368
Elektrolyte 166; Leitvermögen 409. IIIa. XXXI. XXXIII. XXXIV
Elektrolytisches Gesetz 374

Elektrometer 512 ff.
Elektromot. Kraft 345 ff. 426 ff. 434. 436. 489. 497. 499. 521. 559. L
„ „ schwache 352
„ „ Temperaturkoeff. 568
Elektromotoren 39
Elektrostatik 511 ff.
Elemente, galv. 349. 419. 567
Ellipt. Polarisation, opt. 297. 300
Empfindliche Farbe 290
Energie 546, el. 486. 493. 566
Energievergeudung, magn. 469
Entmagnetisiren 35. 469
Entmagnetisirungsfaktor 467
Erdinduktor 459. 473. 475. 561
Erdmagnetismus 319. 358. XXXVIII ff. s. Deklination, Feld, Inklination, Intensität, Variationen
Erg 546
Erhellung 304
Erkaltungsmethode 187
Eudiometer 73

Faden, herausragender 144
Fadenkreuz, beleuchtbares 229
Faden-Steifheit 103
Farad 529. 563
Farbe 235
Farben Newton'scher Ringe XXVI
Federwage 65; el. 371
Fehlerrechnung 1 bis 22
Feld, el. 550
„ magn. 319. 443. 463. 554. 555. 558
Fernrohr, Einstellung 97. 229
„ Vergröfserung 275
Festigkeit XIX
Fett 37
Fixsterne XLIX
Fizeau'sche Methode, kal. 160
Flächendichte, el. 549; magn. 552
Flächenhelle 305. 308
Fluorescir. Okular 236. 255
Fourier'sche Reihe 498
Fraunhofer'sche Linien 235. XXII—XXIV

Frühlingspunkt 112
Fühlhebel, Fühlniveau 88

Galvanisch s. Elektricität
Galvanometer 357. 361 ff.
„ ballistisches 365. 448 ff. 452
„ -funktion 449. 473
„ Reduktionsfaktor 361. 382. 473
„ Widerstand 422
Galvanoplastik 36
Gase 30; Siedepunkt 159
Gasdichte 6. 81 ff. 213. VI. VII
Gaskonstante 547
Gasspektrum 227. XXII. XXIII
Gasthermometer 145. 151
Gasvolumen 71. 378. VII
Gaufs, magn. 554
Gaufs' Rechenverfahren 19
Gaufs-Weber'sche Einheiten 540 ff.
Gay-Lussac'sches Gesetz 71
Gefrierpunkt 165; von Lösungen 166
Geifsler'sche Röhren 227. 502
Geographische Tab. XLIV
Geschofsgeschwindigkeit 110. 455
Gesichtsfeld, opt. 277. 278
Gewicht und Masse 541
Gewicht einer Messung 3. 15
Gewichtsatz 55
Gitter, opt. 226. 257
Glas, Eigenschaften 32. 143
„ Löslichkeit 31
„ blasen 33; platiniren 33
„ schneiden 34; teilen 88
„ versilbern 32; zeichnen 34
Glasplatte, Untersuchung 89. 231. 266
Glasröhre, Durchmesser 96
Gleicharmigkeit der Wage 46. 51. 52. 53
Gleitmodul 206
Glimmerplatte 284
Glühlampe, el. 501
Goniometer 228. 237
Gramm 541
Gramm-Molekül 59. 74.
Graphische Methode 26

Gravitationskonstante 123. 126. XLIII
Grenzwinkel d. totalen Reflexion 240
Güteverhältnis, el. 487

Halbschattenapparat 291. 292
Haupt-Azimut, -einfallswinkel, opt. 298. 303
Hauptebene, Hauptpunkt, opt. 270. 282
Hauptlage, magn. 320. 446
Heifsluftmotor 40
Hefner-Licht 304
Henry 565
Hitzdraht, el. 371
Höhe, astr. 112. 115
Höhen, korrespondirende 117. 120
Höhenmessung, barometr. 135. IX
Höhen-Tabelle XLIV
Hohlvolumen 93. IV
Hydrometer 62
Hygrometer 175 ff. XIII
Hygroskopische Körper 85. 178
Hypsometrie 137
Hysterese, magn. 468. 556

Impedanz, el. 490
Induktion, Induktionsflufs, magn. 470. 556. 561
Induktion e. Solenoids, el. 476. 565
Induktions-Koefficient, magn. 324. 462
„ el.-dynam. 476. 482. 563.
„ -gesetz, magn.-el. 470. 560. 561
„ -stofs 459. 461. 473
Induktor, Erd- 459. 473. 475
„ Magnet- 461. 560
Induktorium 352
Influenzmaschine 352
Inklination, magn. 342. 459. XL
Integral elektrom. Kraft 455. 459
Intensität, erdmagn. 319 ff. 443. 554 XXXVIII
„ magnetisirende 467. 554
Interferenz, akust. 212; opt. 260
Interferenzrefraktor 245
„ -spektrum 258
Interferenzstreifen 89. 160. 245. 259. 263. XXVI
Interpolation 25. 48. 386. 395
Invertzucker 295
Ionenbeweglichkeit, el. 417. XXXIII. XXXIV
Joule 546
Isolationsmessung, el. 399
Isolirung, el. 511

Kältemischung 40
Kalibrirung einer Röhre 94 ff. 408
„ e. Thermometers 146 ff.
„ e. Rheostaten od. Drahtes 401. 404
Kalorie 179. 546
Kalorimeter 181. 187. 190; Bombe 193
Kapacität, elektromagn. 477. 563
„ elektrostat. 354. 523. 551
„ Widerstands-, el. 409. 413
Kapillar-Depression d. Quecksilbers 133. 220. X
„ -elektrometer 515 ff.
„ -konstante 217. 220
„ -röhre 94. 96. 217. 408
Kathetometer 90.
Kathodenstrahlen 498. 502
Kautschuk 42
Kegel, Widerstand el. 346
Kirchhoff'sche Gesetze 347; Wage 518
Klemmspannung 432. 521
Koercitivkraft, magn. 469
Koincidenzen, Methode der 124
Kollimationsfehler 115
Kollimator 229
Kommutator, el. 353. 357. 390
Komparator 85. 90
Kompensator, opt. 250. 293. 299
Kompensation, el. 380. 420. 428 ff.
„ -Apparat 436
Kompensirtes Magnetometer 336
Komplementärfarben 283.
Koncentration e. Lösung 63. 418. III. IIIa.
„ spannung, el. 440.
Kondensator, el. 479. 523 ff. 551. 563
„ Kalibrirung 526 ff. 531

Konstantan 155. 354. XXX
Konstanten-Bestimmung 9
Kontaktmafsstab 88 ff.
Kontrastphotometer 307
Korrektionen 8, 22 ff.
Kraft 545; lebendige 546
Kraftlinien, el. 550; magn. 555. 561
Kritische Daten XVIII
Krümmungshalbmesser 263
Krystall 35. 200. 241. 283. XXIV
„ -winkel 237
Kulmination, astr. 112. 117
Kundt'sche Federn 39

Längenmessung 85 ff.
Leidener Flasche 523
Leistung 546; el. 486. 491. 493. 566
Leistungsfaktor, el. 492. 500
Leistungsmesser, el. 493
Leitvermögen, el. 346. 409 ff. IIIa. XXX. XXXI. XXXIII
Libelle 113. 131
Licht, s. Brechung, Interferenz etc.
Lichteinheiten 304
Lichtquellen 225
Linse 267 ff.
Lokalvariometer, magn. 332
Logarithmen LIII
Log. Dekrement 101. 448. XXIX
Longitudinalschwingungen 200
Löslichkeit 418. 441. XV
Lösungen 43
„ Dampfspannung 173
„ Gefrierpunkt 166. XII
„ Gehalt 43. 63. 418. 440. III. IIIa. XXXI
„ Spannung, el. 440
Löten 34
Luft, Dichtigkeit 71. VI
„ -blasen 218
„ -feuchte 72. 85. 175. XIII
„ -pumpe 37
„ -thermometer 151; el. 523
„ -verflüssigung 42
Lupe 274

Magnete 317 ff.
„ Fernwirkung 321. 552
„ -induktor 461. 562
Magnetisiren 35. 344
Magnetisirungs-Koefficient 467. 555. XXXVII
Magnet. Moment 334. 455. 552
„ „ e. el. Stromes 557
Magnetisirende Kraft 467. 555
Magnetismus, freier 552; specifischer 317. 554
„ s. auch Cocon, Dämpfung, Deklination, Feld, Gaufs, Induktion, Maxwell, Permeabilität, Pol, Schwingungsdauer, Temperatur, Torsion, Wage etc.
Magnetometer 325. 328
Bifilar- 326. 329
Magnetomotor. Kraft 555
Magnetpol 317. 552
Manganin 354. XXX
Manometer 127 ff.
Mariotte'sches Gesetz 71
Masse und Gewicht 541
Mafsflasche, el. 523
Mafsstab 10. 85. 88
Maxwell 470. 561.
Mega-, Mikro- 545; Mikron (μ) 258
Meldometer 166
Meniskus 95
Meridian-Bestimmung 116
Metallreflexion 297. XXVa
Meterkerze 304
Mikrofarad, el. 529. 563
Mikroskop, Längenmessung 87
„ Vergröfserung etc. 277
Minimumstellung, opt. 232. 252
Mischungsmethode, kal. 179
Mittag, wahrer und scheinbarer 113
Mittagsverbesserung 121
Mohr'sche Wage 61
Molekular-Gewicht 74. 166. 167. 170. 173. 228
„ -wärme 180
„ -volumen 58

Molekulare Brechung, opt. 228
„ Drehung, opt. 288
„ Koncentration 44. 166
„ Leitvermögen, el. 417. XXXIII
Monochord 215
Motoren 39
Multiplikationsmethode 457
Multiplikator, Ausmessung 356. 445

Nadelschaltung, el. 514
Näherungsformeln 5. 8
Natronlinie 236. XXII. XXIII
Neusilber; Nickelin 155. 354. XXX
Newton'sche Ringe 262. XXVI
Nicol 281
Nonius 86
Normal-Elektroden 442
„ -emente, el. 349 ff.
„ -flüssigkeiten, el. 414
Normale Lösungen 44. IIIa

Oberflächenwellen 219
Öffnungswinkel, opt. 278
Ohm, el. 345. 472. 566
Ohm'sche Gesetze 345
Okularmikrometer 87
Ophthalmometer 91. 265
Orts-Tabelle XLIV
Oscillograph, el. 498
Osmotischer Druck 547

Paraffiniren 36
Parallaktischer Winkel 112
Parallaxe 85. 140. 229
Patentnickel 155. 354. XXX
Pendel 111. 123. 549
„ -unterbrecher 456. 536
Permeabilität, magn. 467. 556. XXXVII
Pferdestärke 548. 566
Phasenverschiebung, el. 490. 500
Phonisches Rad 216
Photographie 255. 257. 308
Photometrie 303. 500
Pipette 94
Planparallelismus 231. 266
Platin, amalgamiren, schweifsen 34
Platiniren 36
Polabstand, magn. 317. 323. 338
Polarisation, el. 410. 442
„ opt. 279. 281. 296. 309
Polarisationswinkel, opt. 279
Polaristrobometer, opt. 289
Polarstern 116. 118. XLIX
Polhöhe 112. 118. XLIV
Poliren 35
Potential, el. 512 ff. 517. 519. 550. 563. XXXV
„ -nullpunkt 512
„ -unterschied 426. 432
Prisma, opt. 225. 231 ff.
„ Cornu-Jellet'sches 292
„ Nicol'sches 281
Psychrometer 177
Pyknometer 59. 63. 67
Pyrometer 156

Quadrant, el. 563
„ -elektrometer 512 ff.
„ -schaltung, el. 514
Quadrate, Quadratwurzeln LI
Quadrate, kleinste 9
Quarz, opt. 288. 299. XXIV. XXIVa. XXV
„ Ausdehnung, th. 161
„ schmelzen 37
„ -faden 37
„ -keil 293. 299
Quecksilber-Horizont 115
„ -luftpumpe 38
„ Reinigung 29
„ -thermometer 140 ff. XVI
„ -verschlüsse 39
„ -widerstände 345. 408
„ siehe auch Ausdehnung, Dampfspannung, Dichtigkeit, Kapillar, Siemens, Thermometer, Volumen
Querkontraktion, elast. 206
Querschnitts-Bestimmung 96. 198. 404. 408.

Radiometer 315
Randwinkel 219

Rauchglas 308
Reflexion, Lichtverlust 297. 312
„ totale 239
Reflexionsgitter 226. 257
„ -vermögen 298
Refraktion, astr. 118. XLVIII
Refraktometer, opt. 242. 244
Reibung 217. XX. XXa.
Rektascension 112. XLIX
Relaxationszeit, el. 563
Remanenz, magn. 468. XXXVII
Reversionspendel 125
Rheograph 498
Rheostat 354. 401
Ringinterferenz, opt. 260. 267
Rotirender Spiegel 111
Rowland'sches Gitter 226
Rückflufskühler 40. 169
Rückstand, el. 523
Rührer 41

Saccharimeter 293 ff.
Sättigungsgrad, hygr. 175
Schallgeschwindigkeit 210 ff.
Scheerung, magn. 468
Schlagweite, el. 519. XXXV
Schleifen 35
Schlierenmethode 250
Schlufsjoch, magn. 471
Schmelzpunkt 165 ff. XI. XII
Schmelzwärme 192. XI. XII
Schutzring, el. 517. 524
Schwarze Strahlung 313
Schwebemethode 61. 66
Schwebungen, akust. 214
Schwefelsäure, Dampfspannung 379
Schwere 123. XLIII
Schwingungsdauer 105 ff. 448. XXVII
Schwingungen, el. 536. 564
Sehweite 274
Sektor, rotirender, opt. 308
Sekundenpendel 123. XLIII
Selbst-Potential (oder Induktions-koeff.), el. 477. 561
Senkwage 62. 65
Siedepunkt 168. XII. XVIII
„ d. Wassers XIII. XIV. XIVa
„ e. Thermometers 141. XIVa
Siemens-Einheit, el. 345. 566
Sinusbussole 360
„ -elektrometer 512
„ -induktor, el. 488. 489
„ -schwingungen, el. 488 ff.
Solenoid s. Spule
Sonne 119. XLV. XLVII
Sonnenzeit 113. XLV
Spannkraft s. Dampfspannung
Spannung, el. s. Potential u. elektromot. Kraft
Spannungsmesser, el. 431
Specif. Gewicht s. Dichtigkeit
„ Volumen 58
„ Wärme 179 ff. XI. XII
„ „ von Gasen 213. 547
Spektralanalyse 226. 252. XXII. XXIII
Spektrometer 228
Spektrum 225. 236. 259. XXII—XXIV
Sphärometer 88. 263
Spiegelgalvanometer 361 ff. 383. 422. 452
Spiegel, Krümmungshalbmesser 265
„ rotirender 111
„ u. Skale 97. XXVIII
Spule, magn. Feld 463
„ Windungsfläche 445
Stahl 35
Staubfiguren 210
Steighöhe, kapill. 217; magn. 466
Sterntabelle XLIX
Sterntag, Sternzeit 112. XLV
Stimmgabel 110
Strahlenfilter 225
Streifender Eintritt, opt. 234
Stroboskop. Methode 215
Strom, el. 357 ff
„ kurzdauernder 398. 452 ff.
„ starker 373. 381. 433. 436. 448
„ -einheit 345. 357. 552. 557
„ -integral oder Menge 452.
„ -leistung, -arbeit 368. 486. 491. 522. 566

Strom-Messer 357 ff. 369
„ -schlüssel 353. 398
„ -verzweigung 347. 355
„ -wage, 367. 518
„ -wärme, 355. 476. 568
„ -wender, 353
Stundenkreis, Stundenwinkel 112
Susceptibilität, magn. 467. 555. XXXVII

Talbot'sche Streifen 259
Tangentenbussole 6. 357
Tarirung, Wägung 53
Taupunkt 175
Teilmaschine 87
Telephon 372. 410
Temperatur 138. 213 ff.; -bäder 40. 78
„ absolute 71. 547
„ hohe oder tiefe 156
Temperaturkoefficient, magn. 336
„ el. Leiter 407. 417. IIIa. XXX. XXXI
Theodolit 113; magn. 340
Thermochemische Messungen 191
Thermoelemente 154. 157. 314
Thermometer 138
„ Eispunkt, Siedepunkt 140. 141
„ -kalibrirung 146
„ -vergleichung 150
Thermosäule 314
Thermostaten 40
Thonzellen 348
Tonhöhe 201. 214. XXI
Torsions-Galvanometer 434
„ -modul 204. XIX
„ -verhältnis, magn. 339
Totalreflektometer 240
Tragfähigkeit XIX
Trägheitsmoment 108 ff. 549
Transformator, el. 352. 498
Trigonometr. Tafel LIV
Tropfen 219
Turmalinzange, opt. 283

Überführzahl, el. 417. IIIa
Übergangsfarbe 290
Übergreifender Nebenschlufs, el. 391
Übersetzungsverhältnis, el. 499
Uhr, Gang 122
Ultraviolett, ultrarot 226. 255. XXIII. XXIVa
Universalgalvanometer 434
„ -induktor 415

„v“ 508. 543. 559
Variationen, erdmagn. 318. 328
Verdampfungswärme 192
Verdrängungsmethoden 78. 157
Vergolden etc. 36
Vergröfserung, opt. 274
Vibrationsgalvanometer 373. 479
Vierstab-Variometer, magn. 331
Viertelwellenplatte, opt. 284
Volt 345. 560
Voltameter 374
Volumenometer 70
Volum-Messung 63. 77. 93. IV. V

Wage 45 ff.; el. 518; magn. 471
„ elektrodynamische 368
Wägung, Korrektionen 23. 25. 45. 53. I
Wahrscheinlicher Fehler 2
Wanderungszahl, el. 417. IIIa
Wahrscheinlichkeitsrechnung 1. 10
Wärme-Äquivalent 477. 547
„ -ausdehnung 10. 24. 159 ff. IV. V Xa. XI. XII
„ -leitvermögen 193. 548. XI
„ -menge 179; absolute 546
„ specifische 179 ff. XI. XII
„ -spektrum 315
„ -strahlung 312
„ -theorie, zweiter Hauptsatz 547
Wasser, Ausdehnung IV. V
„ Reibung XXa
„ reines 30
„ Schmelzwärme 188. XI. XII
„ spec. Wärme 179
„ -dampf 175. XIII. XIV. XIVa
„ -luftpumpe 37; -motoren 39
„ -wert, kal. 181
„ -zersetzung, el. 356. 377. XXXII

Watt 486. 548. 567
Wattmesser 494
Weber'sche Einheiten 357. 557. 569
Wechselströme, el. 368. 410. 488. 496. 564
Wellenlänge, akust. 210; el. 506. 536. opt. 235. 257. XXIII
Wheatstone'sche Brücke 347. 3[illegible]2. LII
Wickelung, el. 354
Widerstand, el. 345. 354 ff. 521. 552. XXX. XXXI
„ von Drähten 346
„ günstigster 356
„ Herstellung kleiner Unterschiede 354
„ konischer Röhren 346
„ scheinbarer 490
„ specifischer 346. 566
Widerstandsbestimmung, el. 385 ff. 435. 440. 455. 521
„ absolute 472
„ e. Galvanometers 422
„ grofser Widerstände 395. 399
„ kleiner Widerstände 388. 395. 397
„ mit Wechselströmen 410. 421
„ von Elektrolyten 409
„ von Elementen 419
Widerstands-Einheiten 345
„ -gefäfse 411
„ -kapacität 346. 413. 525
„ -thermometer 155. 158
Windungsfläche einer Spule 445
Winkel 545
Winkelmessung 97 ff. 113 ff. 231. 237. 340. XXVIII
Wirkungsgrad, el. 487. 497. 499
Wismut, el. Widerstand 466. XXX
„ Thermokraft 155
Wood'sches Metall 81

Zähigkeit 220
Zahlen, oft gebrauchte L
Zahlenrechnen 27
Zeit, wahre und mittlere 113
„ Bestimmung kurzer Zeiten 110. 455
„ -bestimmung, astr. 119. 122
„ -gleichung 113. XLV
„ -messung 105 ff.
Zersetzungsspannung 442
Zerstreuung, opt. 236, XXIV. XXIV a
Zucker, Drehvermögen 288. 295
Zurückwerfungsmethode 458
Zusammendrückbarkeit XX
Zustandsgleichung 71

Allgemeines über Messungen.

1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler.

Eine Gröfse messen heifst sie durch eine Zahl darstellen, welche angibt, wie oft die zu Grunde gelegte Einheit in der gemessenen Gröfse enthalten ist.

Die durch Beobachtung gewonnene Zahl wird mit einem Fehler behaftet sein. Über die wahrscheinliche Fehlergrenze kann ein Urteil erstens aus der Übereinstimmung mehrerer Resultate und zweitens durch die Betrachtung der Methode abgeleitet werden.

Wenn eine Gröfse wiederholt gemessen worden ist und wenn, wie hier angenommen werden soll, die einzelnen Bestimmungen an sich denselben Grad von Zuverlässigkeit besitzen, so stellt bekanntlich das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Wert dar.

Aus einer Reihe von Beobachtungen einzelne blofs deswegen auszuschliefsen, weil sie mit der Mehrzahl nicht übereinstimmen, ist im allgemeinen ungerechtfertigt. Der Wahrscheinlichkeit eines bei den abweichenden Zahlen begangenen gröfseren Fehlers wird durch das arithmetische Mittel selbst Rechnung getragen; denn als einzelne unter einer gröfseren Anzahl haben sie einen geringen Einflufs.

Die einzelnen Zahlen zeigen gröfsere oder kleinere Differenzen gegen ihr Mittel, die „Fehler“, aus deren Betrage der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Beobachtung oder des Resultates nach folgenden Regeln bestimmt wird. Man bildet die Summe der Fehlerquadrate (Tab. 51). Diese Summe gibt, durch die um 1 verminderte Anzahl der einzelnen Beobachtungen dividirt, das mittlere Fehlerquadrat; die Quadratwurzel hieraus ist der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung. Dividirt man diesen durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen, so erhält man den sogenannten mittleren Fehler des Resultates.

Die Multiplikation des mittleren Fehlers mit 0,674 (nahe $\frac{2}{3}$) gibt den wahrscheinlichen Fehler, nämlich eine Zahl, von der mit gleicher Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, der Fehler einer einzelnen Beobachtung, bez. des Resultates sei kleiner, wie er sei gröfser als sie. Den Umstand, dafs der gefundene Wert ebensowohl zu grofs, wie zu klein sein kann, deutet man durch ein dem Fehler vorausgesetztes $\pm$ Zeichen an.

Bezeichnen wir also durch

n die Anzahl der einzelnen Bestimmungen,

$\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_n$ ihre Abweichungen vom Mittel,

S die Summe der Fehlerquadrate, d. h.

$$S = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2,$$

so ist der mittlere Fehler

der einzelnen Messung des Mittelwertes

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \qquad \mathsf{E} = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Die wahrscheinlichen Fehler betragen $\frac{2}{3}$ hiervon.

Über die Fehlerrechnung bei mehreren unbekannten Gröfsen vergl. **3**.

Selbstverständlich wird durch diese Rechnung nur der Teil des Fehlers ausgedrückt, welcher durch die eigentliche Unsicherheit der Beobachtung entsteht, das heifst durch solche Beobachtungsfehler, die eben so häufig einen zu grofsen wie einen zu kleinen Wert ergeben. Aufserdem können einseitige Fehler vorhanden sein, die aus den Angaben der Instrumente oder auch daraus entstehen, dafs der Beobachter sich vorwiegend nach einer bestimmten Richtung irrt. Solche Fehler sind besonders zu ermitteln oder durch eine geeignete Kombination von Beobachtungen oder Abwechselung der Methoden zu eliminiren.

Beispiel. Die Dichtigkeit eines Körpers wurde zehnmal bestimmt:

Gefunden	Δ	Δ^2
9,662	− 0,0019	0,000004
9,673	+ 091	083
9,664	+ 001	000
9,659	− 049	024
9,677	+ 131	172
9,662	− 019	004
9,663	− 009	001
9,680	+ 161	259
9,645	− 189	357
9,654	− 0,0099	0,000098
Mittel 9,6639		$S = 0{,}001002$

Also mittlerer Fehler einer Messung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{0,001002}{10-1}} = \pm 0,011$,

mittlerer Fehler des Mittelwertes: $E = \pm 0,011/\sqrt{10} = \pm 0,0033$.

Die wahrscheinlichen Fehler betragen folglich $\pm 0,007$ bez. $\pm 0,0022$.

Die Bedeutung der Zahl 0,007, nämlich daſs der Fehler einer einzelnen Dichtigkeitsbestimmung dieses Körpers, mit denselben Instrumenten mit gleicher mittlerer Sorgfalt und Erfahrung angestellt wie die obigen, ebenso wahrscheinlich kleiner wie gröſser ist, als sie, spricht sich hier zufällig genau aus. Denn es sind je fünf von den Δ kleiner und gröſser als 0,007.

Die obigen Bestimmungen sind von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Gewichtsätzen und Thermometern angestellt worden. Fehler der Wage von einseitiger Richtung sind nicht anzunehmen. Eine Quelle eines einseitigen Fehlers könnte aber z. B. durch nicht beachtete Luftbläschen am Körper entstanden sein, welche die Dichtigkeit immer zu klein erscheinen lassen.

„Gewicht" einer Messung. Die Einzelresultate, aus denen ein Schluſsresultat berechnet wird, sind nicht immer gleich zuverlässig. Diesen Umstand sucht man dadurch zu berücksichtigen, daſs man den Einzelwerten ein verschiedenes „Gewicht" beilegt, d. h. daſs man sie bei der Mittelnahme einfach, doppelt oder dreifach u. s. w. (Gewicht eins, zwei, drei u. s. w.) in Rechnung setzt. Das arithmetische Mittel aus mehreren Resultaten r_1, r_2 etc., deren Gewichte $= p_1$, p_2 etc. sind, ist

$$r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots}.$$

Das Gewicht von Einzelresultaten, die schon aus mehreren gleichwertigen Beobachtungen abgeleitet worden waren, ist je gleich der Anzahl der benutzten Beobachtungen zu setzen, was ja auf das nämliche hinausführt, wie wenn man alle einzelnen Beobachtungen zum Mittel vereinigt. Es können auch andere Ursachen vorliegen, die den einzelnen Resultaten eine verschieden groſse Zuverlässigkeit erteilen und die zur Beilegung verschiedener Gewichte veranlassen; die Beurteilung dieser Frage bleibt der Umsicht und der Gewissenhaftigkeit des Beobachters überlassen. — Kennt man den mittleren Fehler ε eines Resultates, so ist dessen Gewicht p proportional $1/\varepsilon^2$. Vgl. auch 3 III.

2. Beurteilung des Fehlers aus der Methode. Einfluſs der Beobachtungsfehler auf das Resultat.

Im allgemeinen wird ein Resultat nicht direkt durch die Beobachtung gegeben, sondern es muſs aus ihr oder auch aus mehreren Beobachtungen durch Rechnung ermittelt werden: beispielsweise ein Gewicht aus Ablesungen am Zeiger der Wage, eine Gasdichte aus einer Ausströmungszeit, eine elektrische Stromstärke aus einem Ausschlagswinkel, ein specifisches Gewicht aus mehreren Wägungen, ein Elasticitätsmodul aus Längenmessungen. Hierbei entsteht die Aufgabe, den Fehler des Resultats zu kennen, welcher aus einem Fehler der beobachteten Gröſse entspringt.

Den Zweck dieser Fehlerrechnung kann, auſser einer Schätzung der Genauigkeit des Resultates selbst, das Urteil über etwa gestattete Abkürzungen der Rechnung bilden, oder über die Frage, auf welchen Teil der Messung die gröſste Sorgfalt zu verwenden ist. Auch liegt es häufig in unserer Gewalt, die Verhältnisse eines Versuches in verschiedener Weise anzuordnen: die Fehlerrechnung läſst beurteilen, welche Anordnung den geringsten Einfluſs der Beobachtungsfehler auf das Resultat bewirkt.

Aus solchen Betrachtungen folgt z. B. die Regel für die Bestimmung der erdmagnetischen Intensität, daſs man am günstigsten die beiden Abstände des ablenkenden Magnets etwa im Verhältnis 1,4 nimmt. Oder die Regeln, daſs die Messung einer elektrischen Stromstärke mit der Tangentenbussole den relativ genauesten Wert nicht bei einem möglichst groſsen Ausschlage, sondern bei etwa 45° liefert (vgl. S. 6); daſs die beiden Stromstärken, aus denen der Widerstand oder die Spannung einer galvanischen Säule bestimmt wird, etwa im Verhältnis 1 : 2 gewählt werden; daſs das log. Dekrement eines Schwingungszustandes bei einem Verhältnis der beiden Schwingungsweiten ungefähr = 3 relativ am genauesten beobachtet wird. Dagegen wird für die genaue Bestimmung eines Lichtbrechungsverhältnisses der Prismenwinkel thunlichst groſs gewählt u. s. w.

I. Ein aus einer einzigen beobachteten Gröſse abgeleitetes Resultat. Das gesuchte Resultat (z. B. die Stromstärke) heiſse z, die beobachtete Gröſse (der Ausschlagswinkel) heiſse x. Es ist dann z als Funktion von x, d. h. durch irgend einen mathematischen Ausdruck gegeben, in welchem x vorkommt. Nennen wir nun ξ den in x begangenen Fehler, so wird der hierdurch hervorgebrachte Fehler von z, welcher ζ

heifse, dadurch gefunden, dafs man in den Ausdruck, aus welchem z berechnet wird, $x+\xi$ anstatt x einsetzt. Dabei mufs selbstverständlich der Fehler ξ in derselben Einheit ausgedrückt werden wie die Gröfse x selbst. Jetzt wird man ein von dem richtigen Werte z etwas verschiedenes Resultat finden: die Gröfse dieses Unterschiedes ist der Fehler ζ.

Vorausgesetzt, dafs die Beobachtungsfehler relativ kleine Gröfsen sind, lassen sich diese Rechnungen sehr vereinfachen. So beachte man zunächst folgende Regeln:

1. Es ist zur Bestimmung des Fehlers im Resultate erlaubt, für die beobachtete Gröfse, die oben x genannt wurde, einen genäherten Wert zu setzen, was deswegen von Bedeutung ist, weil man den fehlerfreien Wert ja nicht kennt.

2. Korrektionsglieder (4), welche in der Formel für das Resultat vorkommen, dürfen, insofern man nicht etwa ihren Einflufs selbst untersucht, bei der Fehlerrechnung vernachlässigt werden.

3. Der Fehler im Resultat, welcher aus einem Beobachtungsfehler entsteht, wächst im allgemeinen der Gröfse des letzteren proportional. Mit anderen Worten: der Fehler des Resultates, die oben durch ζ bezeichnete Differenz, läfst sich als ein Produkt darstellen, in welchem der Fehler ξ der beobachteten Gröfse der eine Faktor ist.

4. Hieraus folgt auch, dafs die Fehler des Resultates, welche aus gleich grofsen, aber im entgegengesetzten Sinne begangenen Fehlern einer Beobachtung hervorgehen würden, an Gröfse gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Es kommt vor, dafs der Resultatfehler nicht dem Beobachtungsfehler, sondern z. B. dessen Quadrate oder auch dem Produkte mehrerer Fehler proportional ist. Dann werden die Sätze unter 3 und 4 bez. auch unter 2 hinfällig.

Die Rechnung wird gekürzt mittels Näherungsformeln für das Rechnen mit kleinen Gröfsen. Diese lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung zusammenfassen. Ist nämlich ξ der in dem beobachteten Werte x begangene Fehler, so wird der Fehler ζ des Resultates z erhalten, indem man den partiellen Differentialquotienten von z nach x mit ξ multiplicirt. Also

$$\zeta = \xi \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Meistens liefern die am Schlusse dieses Artikels angegebenen Näherungsformeln das Gewünschte ohne Differenziren. Einige Beispiele sollen dies zeigen.

1. Beispiel. Eine Gasdichte z werde aus der Ausströmungszeit x einer gegebenen Gasmenge abgeleitet mittels der Formel $z = C \cdot x^2$, wo C eine für den Apparat bekannte Konstante sein soll. Es fragt sich, um welche Gröfse ζ das Resultat falsch wird, wenn x um den relativ kleinen Wert ξ falsch beobachtet wird. Man hat also den Ansatz $z + \zeta = C(x + \xi)^2$. Für den Ausdruck rechts schreiben wir nach S. 9, 2

$$C(x+\xi)^2 = Cx^2\left(1+\frac{\xi}{x}\right)^2 = z\left(1+2\frac{\xi}{x}\right) = z + 2z\frac{\xi}{x}.$$

Der Fehler ζ ist also $\zeta = 2z\frac{\xi}{x}$, oder es ist $\frac{\zeta}{z} = 2\frac{\xi}{x}$.

Der in z auftretende relative Fehler ist also das Doppelte des in x begangenen relativen Fehlers.

Differentiation von $z = Cx^2$ gibt $\partial z/\partial x = 2Cx$, also den Fehler $\zeta = \xi \cdot 2Cx$, oder wie oben $\zeta/z = 2\xi/x$.

Am einfachsten erhält man relative Fehler oft durch „logarithmisches Differenziren". Schreibt man statt $z = Cx^2$ $\lg z = \lg C + 2\lg x$ und differenzirt diese Formel, so kommt $dz/z = 2dx/x$ ohne Weiteres.

Die Verdoppelung tritt immer auf, wenn das Resultat quadratisch von der beobachteten Gröfse abhängt, also z. B. bei dem aus einer Schallgeschwindigkeit abgeleiteten Elasticitätsmodul oder einer mit dem gewöhnlichen Photometer bestimmten Lichtstärke. Umgekehrt wirkt der relative Fehler der Beobachtung auf das Resultat halbirt ein, wenn dieses die Quadratwurzel der Beobachtung enthält, so dafs eine solche Methode cet. par. viermal günstiger ist als die erstere.

2. Beispiel. Eine elektrische Stromstärke z werde aus dem Ablenkungswinkel x einer Tangentenbussole nach der Formel $z = C \cdot \operatorname{tg} x$ bestimmt, wo C einen konstanten Faktor bedeutet. Wird ein Ablesefehler ξ begangen, so folgt der Fehler ζ in z aus

$$z + \zeta = C \cdot \operatorname{tg}(x+\xi) = C\left(\operatorname{tg} x + \frac{\xi}{\cos^2 x}\right)$$

nach Formel 10 III (S. 9). Also ist

$$\zeta = C\frac{\xi}{\cos^2 x} = z\frac{\xi}{\sin x \cos x} = z\frac{2\xi}{\sin 2x}.$$

Differentiation gibt $dz/dx = C/\cos^2 x$, also $\zeta = \xi \cdot C/\cos^2 x$ etc. q. e. d.

Es ist also $2\xi/\sin 2x$ der in Bruchteilen von z ausgedrückte Fehler, welcher dem Ablesungsfehler ξ entspricht. Hieraus folgt, dafs Winkel von ungefähr 45° am günstigsten sind, weil für $x = 45°$ der Nenner $\sin 2x$ seinen möglichst grofsen Wert Eins erhält.

II. Ein aus mehreren Beobachtungs-Daten zusammengesetztes Resultat. Dasselbe stellt sich also als ein

mathematischer Ausdruck dar, welcher die verschiedenen beobachteten Gröfsen enthält. Von diesen können mehrere einen Fehler enthalten. Den Einflufs des in einer Gröfse begangenen Fehlers findet man, seltene Ausnahmen vorbehalten, ohne Rücksicht auf die übrigen Fehler.

Jeder von den Fehlern kann naturgemäfs das Resultat entweder zu klein oder zu grofs machen, und je nach dem zufälligen Zusammentreffen der Vorzeichen wird der Gesamtfehler gröfser oder kleiner ausfallen. Das Fehler-Maximum wird erhalten, wenn man die Partialfehler sämtlich mit gleichem Vorzeichen nimmt. Den durch das Zusammenwirken zu erwartenden mittleren Fehler findet man, indem man aus der Summe der Quadrate der Partialfehler die Wurzel zieht.

3. Beispiel. Dichtigkeitsbestimmung eines festen Körpers. Es sei m das Gewicht des Körpers in der Luft, m' sein Gewicht im Wasser, so ist die Dichtigkeit $s = \frac{m}{m - m'}$. Also entspricht hier s der oben z genannten Gröfse, m oder m' dem x.

Die Fehler in m und in m' dürfen, da beide Beobachtungen von einander unabhängig sind, einzeln betrachtet werden. Ist bei der Wägung in Luft $m + \mu$ anstatt des richtigen Gewichts m gefunden, so wird die Dichtigkeit erhalten $\frac{m + \mu}{m + \mu - m'}$.

Unter Anwendung der Formel 8, S. 9 schreiben wir hierfür

$$\frac{m}{m - m'} \frac{1 + \mu/m}{1 + \mu/(m - m')} = s\left(1 + \frac{\mu}{m} - \frac{\mu}{m - m'}\right) = s - \mu \frac{m'}{(m - m')^2}.$$

Der Fehler des Resultates ist also $\sigma = -\mu \cdot m'/(m - m')^2$.

Zweitens sei bei der Wägung im Wasser $m' + \mu'$ anstatt m' gefunden. Das fehlerhafte Resultat wird, ähnlich wie oben,

$$\frac{m}{m - (m' + \mu')} = \frac{m}{m - m'} \frac{1}{1 - \mu'/(m - m')} = s\left(1 + \frac{\mu'}{m - m'}\right).$$

Das Resultat würde also um $\sigma' = \mu' \cdot m/(m - m')^2$ zu grofs ausfallen.

Der Gesamtfehler, welcher aus den beiden Beobachtungsfehlern μ und μ' zusammengesetzt ist, hat offenbar den gröfsten Wert $\pm \frac{m'\mu + m\mu'}{(m - m')^2}$, wenn entweder m zu grofs und m' zu klein gefunden ist, oder beide umgekehrt. Der zu erwartende mittlere Gesamtfehler ist

$$\pm \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2} = \pm \frac{\sqrt{(m'\mu)^2 + (m\mu')^2}}{(m - m')^2}.$$

Beispiel. Der Körper (S. 2) wog rund in Luft $m = 244$ und im Wasser $m' = 218$ gr. Der gröfste Fehler der Wage war auf $\mu = 0{,}005$, bei der weniger genauen Wägung unter Wasser auf $\mu' = 0{,}008$ gr zu schätzen. Hiermit ergeben die Formeln

von μ stammend den Fehler $\sigma = 0{,}005 \cdot 218/26^2 = 0{,}0016$,
von μ' „ „ „ $\sigma' = 0{,}008 \cdot 244/26^2 = 0{,}0029$.

Im ungünstigen Falle beträgt der Gesamtfehler, wenn z. B. m zu klein und m' zu grofs bestimmt wurde, 0,0045, im wahrscheinlichen Falle $\sqrt{(\sigma^2 + \sigma'^2)} = \pm 0{,}0033$. Wenn einzelne der Bestimmungen (S. 2) erheblich gröfsere Abweichungen zeigen, so müssen andere Fehlerquellen als die Unsicherheit der Wägung bestanden haben. (Luftbläschen, ungenaue Temperaturbestimmung, fehlerhaftes Abzählen der Gewichtstücke.)

4. Beispiel. Die Schwerbeschleunigung g wird aus der Länge l und der Schwingungsdauer t eines Fadenpendels nach dem Ausdruck $g = \pi^2 \cdot l/t^2$ gefunden. l sei um λ und t um τ falsch bestimmt. Die beiden Fehler sollen gleich mit einander betrachtet werden. Es ist nach Gl. 2 u. 8, S. 9

$$g + \gamma = \pi^2 \frac{l+\lambda}{(t+\tau)^2} = \pi^2 \frac{l}{t^2} \frac{1+\lambda/l}{(1+\tau/t)^2} = g \frac{1+\lambda/l}{1+2\tau/t} = g\left(1 + \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\tau}{t}\right)$$

$= g + g\left(\frac{\lambda}{l} - 2\frac{\tau}{t}\right)$. Also wird $\frac{\gamma}{g} = \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\tau}{t}$, d. h. es kommt der relative Fehler in l einfach, derjenige in t doppelt zur Wirkung.

Differenziren der Gleichung $\lg g = \lg \pi^2 + \lg l - 2 \lg t$ gibt sofort dasselbe, nämlich $dg/g = dl/l - 2dt/t$.

Man beachte aber noch folgendes. Um den Maximalfehler in g zu finden, darf man nicht, wie es nach dem Ausdruck erscheint, den einen Teil vom anderen abziehen. t kann ebensowohl zu klein wie zu grofs beobachtet worden sein; im ersteren Falle würde das Minuszeichen sich umkehren. Der gröfstmögliche Resultatfehler ist stets durch Addiren der Partialfehler zu berechnen.

Im wahrscheinlichen Falle kommt $\frac{\gamma}{g} = \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{t}\right)^2}$.

Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Gröfsen.

Ein mathematischer Ausdruck, in welchem einzelne Gröfsen gegen andere sehr klein sind, läfst sich für die Rechnung oft vereinfachen. Kann man dem Ausdruck eine Form geben, welche die Korrektionsgröfse nur in einem zu 1 addirten Gliede enthält, so wird man häufig von einer der folgenden Formeln Gebrauch zur Vereinfachung machen können.

Die mit δ, ε, ζ ... bezeichneten Gröfsen sollen gegen 1 so klein sein, dafs ihre höheren Potenzen δ^2, ε^2 ... sowie ihre Produkte $\delta \cdot \varepsilon$, $\delta \cdot \zeta$ ..., die ja wieder gegen δ, ε ... selbst sehr klein sind, gegen 1 vernachlässigt werden dürfen. Ist z. B. $\delta = 0{,}001$, so ist $\delta^2 = 0{,}000001$. Wenn etwa ferner $\varepsilon = 0{,}005$, so wird $\delta \cdot \varepsilon = 0{,}000005$. Es kommt oft vor, dafs einige Tausendtel noch wichtig, einige Milliontel dagegen gleichgiltig sind.

Unter diesen Gesichtspunkten gelten die folgenden Formeln, in denen die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke für die Rechnung oft bequemer sind. Die Formeln 2 bis 6 sind specielle Fälle von 1.

Eine Gröfse mit $\pm$ oder $\mp$ soll überall in der Formel entweder mit dem oberen oder mit dem unteren Zeichen genommen werden.

1. $(1+\delta)^m = 1 + m\delta.$ $\qquad (1-\delta)^m = 1 - m\delta.$
2. $(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta.$ $\qquad (1-\delta)^2 = 1 - 2\delta.$
3. $\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta$ $\qquad \sqrt{1-\delta} = 1 - \frac{1}{2}\delta.$
4. $\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta.$ $\qquad \frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta.$
5. $\frac{1}{(1+\delta)^2} = 1 - 2\delta.$ $\qquad \frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + 2\delta.$
6. $\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta.$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} = 1 + \frac{1}{2}\delta.$
7. $(1 \pm \delta)(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \zeta) \cdots = 1 \pm \delta \pm \varepsilon \pm \zeta \cdots$
8. $\frac{(1 \pm \delta)(1 \pm \zeta) \cdots}{(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \eta) \cdots} = 1 \pm \delta \pm \zeta \cdots \mp \varepsilon \mp \eta \cdots$

Weiter kann man statt des geometrischen Mittels zweier wenig verschiedener Gröfsen p_1 und p_2 das arithmetische setzen (Beweis S. 25):

9. $$\sqrt{p_1 p_2} = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

Ferner 10. $\sin(x+\delta) = \sin x + \delta \cos x, \qquad \sin \delta = \delta,$

$\cos(x+\delta) = \cos x - \delta \sin x, \qquad \cos \delta = 1,$

$\operatorname{tg}(x+\delta) = \operatorname{tg} x + \frac{\delta}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg} \delta = \delta.$

Als Einheit für δ gilt der Winkel (57,°3), für welchen der Bogen dem Radius gleich ist. — In zweiter Annäherung ist

11. $\sin \delta = \delta(1 - \frac{1}{6}\delta^2); \qquad \cos \delta = 1 - \frac{1}{2}\delta^2; \qquad \operatorname{tg} \delta = \delta(1 + \frac{1}{3}\delta^2).$

12. $\log \operatorname{nat}(x+\delta) = \log \operatorname{nat} x + \frac{\delta}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{x^2}; \qquad \log \operatorname{nat}(1+\delta) = \delta - \frac{1}{2}\delta^2.$

13. $\log \operatorname{nat} \frac{x+\delta}{x-\delta} = 2\frac{\delta}{x} + \frac{2}{3}\frac{\delta^3}{x^3}.$

3. Bestimmung empirischer Konstanten mit kleinsten Quadraten.

I. Um Beobachtungsfehler auszugleichen, genügt das arithmetische Mittel nicht immer, weil häufig die gesuchte Gröfse neben einer oder mehreren beobachteten nur in einer Gleichung vorkommt, die man nicht auf jene Gröfse auflöst. Sie spielt dann die Rolle einer Konstanten, deren Zahlenwert so ermittelt werden soll, dafs den Beobachtungen genügt wird.

Ein einfaches Beispiel, an welchem die Aufgabe erläutert werden soll, ist die Bestimmung eines Wärmeausdehnungs-Koefficienten, der in einer Gleichung auftritt, welche aufserdem die beobachteten Gröfsen, hier Längen und Temperaturen enthält.

Als sonstige Beispiele können genannt werden die Bestimmungen eines Elasticitätsmoduls aus Ausdehnungen, einer specifischen Wärme aus Abkühlungszeiten, einer Galvanometerkonstante aus Skalenausschlägen, einer elektromotorischen Kraft aus kompensirenden Widerständen, eines Winkels durch ein Repetitionsverfahren. Nicht selten sind in der Gleichung noch andere unbekannte Konstanten, etwa als Faktoren von Korrektionsgliedern, von Temperatureinflüssen etc. vertreten, die gleichzeitig bestimmt oder wenigstens eliminirt werden müssen.

Zu diesem Zwecke werden also mindestens so viele Beobachtungen verlangt, wie unbekannte Gröfsen vorkommen; wenn gerade nur diese Anzahl vorliegt, so werden durch das Einsetzen der beobachteten Werte in den mathematischen Ausdruck so viele Gleichungen wie Unbekannte gewonnen, aus denen man die letzteren bestimmt. Vgl. hierüber auch III S. 15. Wenn aber eine gröfsere Anzahl von Beobachtungen vorliegt, so mufs man, um alles Material auszunutzen, einen anderen Weg einschlagen, eine Arbeit, die durch Kunstgriffe erleichtert werden kann, besonders dadurch, dafs man die Beobachtungen planmäfsig einrichtet. Dergleichen ist aber nicht immer möglich, und Willkür ist schwer zu vermeiden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet in der Methode der kleinsten Quadrate ein systematisches Verfahren, nach welchem ohne Willkür gerechnet wird. Die nicht selten mühsame Rechnung ist durch einen vorher festgestellten Beobachtungsplan meistens zu erleichtern.

Beispiel. Die Länge eines Stabes für 0^0 und seine Verlängerung auf 1^0 Temperaturerhöhung ist aus einer Anzahl von Längenmessungen bei verschiedenen Temperaturen abzuleiten. Nennen wir A die Länge bei 0^0, B die Verlängerung für 1^0, so ist für die Temperatur t die Länge u

$$u = A + Bt.$$

A und B sind die unbekannten, zu bestimmenden Konstanten, u und t sind die beobachteten Gröfsen. Zwei Beobachtungen würden genügen. Sind nur für die Temperaturen t_1 und t_2 die resp. Längen u_1 und u_2 beobachtet, so folgt aus $u_1 = A + Bt_1$ und $u_2 = A + bt_2$

$$A = \frac{t_1 u_2 - t_2 u_1}{t_1 - t_2}, \qquad B = \frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2}.$$

Es mögen aufser t_1, u_1 und t_2, u_2 noch die zusammengehörenden

Werte t_3, u_3 t_4, u_4 u. s. w. vorliegen. Wären die Beobachtungen fehlerfrei, so würden die gesuchten Gröfsen A und B aus irgend welchen zwei Paaren berechnet, stets dieselben Zahlenwerte annehmen. In Wirklichkeit aber findet man der Fehler wegen keine Zahlen für A und B, die den sämtlichen Beobachtungen völlig genügen.

Der Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate sagt: Die Konstanten sollen so bestimmt werden, dafs die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Das heifst: Je nach verschiedenen Zahlenwerten der Konstanten werden die mit letzteren aus dem Gesetze berechneten Werte u von den beobachteten um verschiedene Gröfsen (die Fehler) abweichen. Die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten sind diejenigen, bei denen die Summe der zweiten Potenzen aller Abweichungen möglichst klein wird.

Bezeichnen wir den mathematischen Ausdruck von bekannter Form, welcher die Abhängigkeit der beobachteten Gröfse u von einer anderen t (oder auch von mehreren anderen) darstellt, allgemein als Funktion von t durch $\mathrm{f}(t)$, so kommen in $\mathrm{f}(t)$ die gesuchten Gröfsen als Konstanten vor, die wir durch $A, B \ldots$ bezeichnen. Die Gleichung ist also

$$u = \mathrm{f}(t). \qquad 1.$$

Beobachtet seien mehrere Gröfsen $u_1, u_2 \ldots u_n$, welche zu den bekannten Gröfsen $t_1, t_2 \ldots t_n$ gehören. Nach obigem Satze sollen die Zahlenwerte von $A, B \ldots$ so bestimmt werden, dafs, wenn man sie in $\mathrm{f}(t)$ einsetzt, die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Gröfsen u den möglichst kleinen Wert erhält. Also es soll sein

$$[u_1 - \mathrm{f}(t_1)]^2 + [u_2 - \mathrm{f}(t_2)]^2 + \cdots + [u_n - \mathrm{f}(t_n)]^2 = \text{Minimum}$$

oder durch das Summenzeichen Σ bezeichnet

$$\Sigma [u - \mathrm{f}(t)]^2 = \text{Min.} \qquad 2.$$

Es ist im Auge zu behalten, dafs sämtliche u und t bekannte, beobachtete Gröfsen sind. Wie man nötigenfalls die Gleichungen zuvor auf gleiche Genauigkeit gebracht hat, siehe unter IV.

Nach einem Satze der Differentialrechnung ist zu diesem Zwecke der Ausdruck $\Sigma[u - \mathrm{f}(t)]^2$ nach $A, B \ldots$ zu differenziren, indem man letztere Grössen als Veränderliche behandelt, und jeder partielle Differentialquotient gleich Null zu setzen.

Wir erhalten also gerade so viele „Normalgleichungen“, wie Gröſsen $A, B\ldots$ zu bestimmen sind, nämlich

$$\frac{\partial \Sigma[u-\mathrm{f}(t)]^2}{\partial A}=0, \qquad \frac{\partial \Sigma[u-\mathrm{f}(t)]^2}{\partial B}=0 \text{ u. s. w.} \qquad 3.$$

Auf diesem von Willkür freien Wege können beliebig viele Beobachtungen gleichmäſsig benutzt werden.

Die gewöhnliche Ableitung eines Resultates aus verschiedenen Beobachtungen eines und desselben Objekts als arithmetisches Mittel ist die einfachste Anwendung dieses Satzes. Denn wenn u_1, $u_2 \ldots u_n$ die einzelnen beobachteten Gröſsen und A das aus ihnen abzuleitende Resultat bezeichnen, so soll A also so bestimmt werden, daſs $\Sigma[u-A]^2 = \text{Min.}$, also $\frac{\partial \Sigma[u-A]^2}{\partial A}$ d. h. $2\Sigma(u-A)=0$ oder (u_1-A) $+(u_2-A)+\cdots+(u_n-A)=0$ wird. Dies gibt $A=\frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$.

Freilich kommt es nicht selten vor, daſs die durch Differentiation nach $A, B\ldots$ entstehenden Gleichungen nicht direkt auflösbar sind. Dann muſs die Lösung durch Probiren und Annäherung gesucht werden. In dem häufigen Falle, wo $\mathrm{f}(t)$ die Form hat $\mathrm{f}(t)=A+Bt+Ct^2\ldots$, ist die direkte Lösung immer möglich. Vgl. III und IV.

Fortsetzung des Beispiels. Es sind bei den Temperaturen $t_1\, t_2 \ldots t_n$ die Längen $u_1\, u_2 \ldots u_n$ beobachtet. Im vorliegenden Falle ist $u=\mathrm{f}(t)=A+Bt$. Es sollen A und B so bestimmt werden, daſs

$$(u_1-A-Bt_1)^2+(u_2-A-Bt_2)^2+\cdots+(u_n-A-Bt_n)^2=\text{Min.}$$

oder kurz
$$\Sigma(u-A-Bt)^2=\text{Min.}$$

Die Differentiation ergibt

nach A $\quad \Sigma(u-A-Bt)=0$, $\qquad$ nach B $\quad \Sigma t(u-A-Bt)=0$,

oder, weil hier $\Sigma A = A\cdot n$ ist,

$$\Sigma u - An - B\Sigma t = 0, \qquad \Sigma tu - A\Sigma t - B\Sigma t^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$A=\frac{\Sigma t\,\Sigma tu - \Sigma u\,\Sigma t^2}{(\Sigma t)^2 - n\Sigma t^2}, \qquad B=\frac{\Sigma t\,\Sigma u - n\Sigma tu}{(\Sigma t)^2 - n\Sigma t^2}.$$

Zahlen-Beispiel. Die Länge eines zu kontrolirenden Meterstabes, der auch für höhere Temperaturen dienen soll, sei durch Vergleichung mit einem Normalmaſsstabe gefunden

bei der Temp.	$t_1=20^0$	$t_2=40^0$	$t_3=50^0$	$t_4=60^0$
die Länge	$u_1=1000{,}22$	$u_2=1000{,}65$	$u_3=1000{,}90$	$u_4=1001{,}05$ mm.

Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung ziehen wir von allen Längen u den Betrag 1000 mm ab und nennen den Rest r, dann erhalten wir für A auch nur den Überschuſs der Länge bei 0^0 über 1 m. Die Rechnung stellt sich in folgendem Schema dar:

Nr.	t	r	t^2	tr
1.	20	+ 0,22	400	4,4
2.	40	0,65	1600	26,0
3.	50	0,90	2500	45,0
4.	60	1,05	3600	63,0
	$\Sigma t = 170$	$\Sigma r = 2{,}82$	$\Sigma t^2 = 8100$	$\Sigma tr = 138{,}4$

also ist

$$A = \frac{170 \cdot 138{,}4 - 2{,}82 \cdot 8100}{170^2 - 4 \cdot 8100} = -\,0{,}196\ \text{mm},$$

$$B = \frac{170 \cdot 2{,}82 - 4 \cdot 138{,}4}{170^2 - 4 \cdot 8100} = +\,0{,}0212.$$

Die Länge des Stabes bei 0° ist also 1000 — 0,196 = 999,804 mm und bei der Temperatur t

$$u = 999{,}804 + 0{,}0212\,t.$$

Hiernach berechnen sich die Längen für 20, 40, 50, 60°

Nr.	t	u ber.	u beob.	Δ	Δ^2
		mm	mm	mm	
1.	20°	1000,228	1000,22	+0,008	0,000064
2.	40	1000,652	1000,65	+0,002	0004
3.	50	1000,864	1000,90	−0,036	1296
4.	60	1001,076	1001,05	+0,026	0676
					$\Sigma\Delta^2 = 0{,}002040$

Man kann sich davon überzeugen, dafs jede Änderung von A oder B die Summe der Fehlerquadrate vergröfsert.

Gerade so würde aus mehreren Beobachtungen der Elasticitätsmodul eines Stabes, der gegenseitige Gang zweier Uhren, die Empfindlichkeit einer Wage oder eines Galvanometers berechnet werden können u. s. w.

Für die ungleichmäfsige Ausdehnung der Flüssigkeiten durch die Temperatur und in vielen anderen Fällen führt man als Annäherung eine algebraische Form höheren Grades ein, z. B. $u = A + Bt + Ct^2$. Auch bei der Aufgabe des Beispiels könnte man ein quadratisches Glied hinzunehmen, welches die Ungleichmäfsigkeit der Ausdehnung berücksichtigt. Die Bestimmung von A, B, C aus beliebig vielen Beobachtungen ist im Wesen die nämliche wie oben, nur verwickelter und mühsamer.

Für solche Fälle und, wenn man öfters mit kleinsten Quadraten zu rechnen hat, auch bei einfachen Aufgaben, ist das Gauss'sche Rechenverfahren (IV) bequemer und sicherer.

Die numerischen Rechnungen dürfen bei der Bildung der Quadrate und Produkte nicht mehr gekürzt werden. Man kann aber grofse Zahlen durch Kunstgriffe vermeiden, wie z. B. oben durch Subtraktion des konstanten Wertes 1000 mm von allen u. Wie man diesen Zweck und andere Vorteile durch vorgängige Berechnung von Näherungswerten erreicht, sieht man aus III.

Die Zahlenrechnung betreffend beachte man noch folgende praktische Regel. Die Konstanten $A, B\ldots$ sowie andrerseits

die beobachteten Werte sind unter sich oft von verschiedener Gröfsenordnung. So zählen in dem Beispiel schliefslich die Temperaturen t nach Zehnern, während die Verlängerungen $\mathfrak{r}$ höchstens 1 mm erreichen. Es ist übersichtlicher, wenn die Gröfsen homogen sind, was man durch Multiplikation oder Division durch Potenzen von 10 bewirkt. Anstatt $B.t$ kann man schreiben $(10B).(t:10)$. Hätten wir dies gethan, so würde 2, 4 ... statt 20, 40 ... in die Rechnung gekommen sein, was angenehmer ist. Das Rechnungsresultat $10B$ wäre dann durch 10 zu teilen.

Den sogenannten **mittleren Beobachtungsfehler** erhält man bei diesen Aufgaben aus der Summe der Quadrate der Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Gröfsen, wenn n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten A, B ... d. h. die Anzahl der Normalgleichungen bedeutet, als

$$\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n-m}}. \qquad 4.$$

Also im obigen Beispiele $\pm\sqrt{\frac{0,00204}{4-2}} = \pm\, 0,032$ mm.

II. Rechnung bei gleich grofsen Intervallen.

Liegen die beobachteten Gröfsen in gleichen Abständen voneinander, so wird die Rechnung einfacher. Dergleichen Verhältnisse kommen nicht selten vor; ein periodisches Ereignis sei z. B. wiederholt beobachtet worden, und es werde die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen gesucht [Schwingungsdauer (**28**), Umlaufszeit]. Oder man will den Abstand zweier benachbarter Punkte bestimmen, wenn nicht nur zwei, sondern eine gröfsere Anzahl solcher Punkte nebeneinander liegt, deren Örter beobachtet wurden. [Abstand der Knotenpunkte eines Wellenzuges (**56**).]

Allgemein ändere sich eine Gröfse proportional einer zweiten; von letzterer sei eine Anzahl gleichweit voneinander abstehender bekannter Punkte genommen, zu denen man die zugehörigen Werte der anderen Gröfse beobachtet hat.

So könnten in der vorigen Aufgabe die Stablängen überall in gleichen Temperaturabständen gemessen sein.

Die beobachtete Gröfse u möge der Reihe nach mit den Werten $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n$ gefunden sein. Ohne Fehler sollten die Intervalle $u_2-u_1, u_3-u_2, \ldots u_n-u_{n-1}$ alle gleich grofs sein. In Wirklichkeit sind sie ungleich und man sucht den wahrscheinlichsten Wert. Das arithmetische Mittel aus allen Intervallen würde auf dasselbe hinauslaufen, wie wenn man nur den ersten und den letzten Wert berücksichtigte. Die gleichförmige Benutzung aller Beobachtungen verlangt, dafs man das Intervall berechnet als

$$6\,\frac{(n-1)(u_n-u_1)+(n-3)(u_{n-1}-u_2)+\cdots}{n(n^2-1)}.$$

Das Gewicht dieses Resultates ist $P=n(n^2-1)/12$; der mittlere Fehler des Resultates beträgt dann, wenn ε der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung ist, $\mathsf{E}=\varepsilon/\sqrt{P}$.

Ableitung. Wenn t die Nummer der Beobachtung bedeutet und $u=A+Bt$ gesetzt wird, so ist B das gesuchte Intervall. Also

$$t_1=1,\quad t_2=2\cdots,\quad t_{n-1}=n-1,\quad t_n=n.$$

Die Ausdrücke
$$\begin{aligned}\Sigma t &= 1+2+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1),\\ \Sigma t^2 &= 1^2+2^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\\ \Sigma u &= u_1+u_2+\cdots+u_n,\\ \Sigma tu &= u_1+2u_2+\cdots+nu_n\end{aligned}$$

in B (S. 12) eingesetzt geben den obigen Ausdruck.

III. Auflösung von Gleichungen, wenn Näherungswerte für die Unbekannten vorliegen.

Zuerst soll gezeigt werden, wie man die Aufgabe der Konstanten-Bestimmung einer Gleichung auf die Auflösung linearer Gleichungen zurückführen kann.

Eine beobachtete Gröfse u sei von anderen beobachteten Gröfsen $r, s, t\cdots$ nach einem Gesetze von bekannter Form abhängig; dieses Gesetz enthalte die Konstanten A, B, C, welche eben aus den Beobachtungen bestimmt werden sollen. Eine gröfsere Anzahl als drei wird bei physikalischen Aufgaben selten vorliegen und könnte überdies ebenso behandelt werden wie unser Fall. Es müssen natürlich mindestens so viele Beobachtungen vorliegen, wie zu bestimmende Konstanten. Die beobachteten Gröfsen bezeichnen wir mit $u_1 r_1 s_1 t_1 \quad u_2 r_2 s_2 t_2$ etc.

Die Abhängigkeit der Gröfsen voneinander werde durch das Symbol dargestellt

$$u = \mathrm{f}(A, B, C, r, s, t \ldots). \qquad 5.$$

Die $r, s \ldots$, oft auch die u, werden im allgemeinen Ablesungen an Instrumenten enthalten, wie Uhr, Wage, Mafsstab, Teilkreis, Thermometer, Manometer, Rheostat, Galvanometer, Brückendraht etc. $r, s, t \ldots$ brauchen nicht voneinander unabhängig zu sein. Ein gewöhnlicher Fall z. B. ist der, in welchem etwa $r = 1$, $s = q$, $t = q^2 \ldots$ wäre; q kann eine Temperatur, Belastung, Zeit, einen Druck, eine Skalenablesung etc. bedeuten. Oder, wenn u die Ablenkung eines Magnetometers durch einen Magnet aus der Entfernung l ist, so kann $r = l^{-3}$, $s = l^{-5} \ldots$ sein, wo A das magnetische Moment, B den Polabstand enthalten mag. u könnte auch eine Dichtigkeit, einen elektrischen Strom oder Widerstand, ein Lichtbrechungsverhältnis bedeuten etc. etc.

Endlich braucht auch nicht die eine beobachtete Gröfse (u) durch die übrigen ausgedrückt zu sein, sondern es kann die Beziehung zwischen allen durch irgend eine Gleichung von der Form

$$\mathrm{f}(A, B \ldots r, s \ldots) = 0$$

gegeben sein, in welcher die Konstanten A, B .. so bestimmt werden sollen, dafs die Abweichungen des Ausdrucks f von Null, die hier die übrigbleibenden Fehler vorstellen, möglichst klein werden, wenn man die beobachteten r, s .. einsetzt. Das was oben u genannt ist, bedeutet also in diesem Falle Null, vorausgesetzt, dafs die Beobachtungen r, s .. richtig und die Konstanten A, B .. mit den richtigen Werten eingesetzt wären.

Die zu bestimmenden Konstanten A, B, C, welche hier die Unbekannten vorstellen, lassen sich häufig nicht direkt aus den Gleichungen entwickeln. Hat man sich aber Näherungswerte für A, B, C verschafft, so führt man die Aufgabe in folgender Weise auf die stets mögliche Auflösung linearer Gleichungen zurück.

Die Näherungswerte seien $[A]$, $[B]$, $[C]$; die richtigen werden dann sein

$$A = [A] + \alpha \qquad B = [B] + \beta \qquad C = [C] + \gamma. \qquad 6.$$

Diese Korrektionen α, β, γ sind also jetzt die Unbekannten, welche zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke bilde man die partiellen Differentialquotienten der Funktion u oder f nach A, B, C, indem man letztere Gröfsen zunächst als Veränderliche behandelt, nach der Differentiation aber $[A]$, $[B]$, $[C]$ dafür einsetzt. Wir bezeichnen die so definirten Werte der Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] = a \quad \left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] = b \quad \left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = c. \qquad 7.$$

In diese drei Ausdrücke sollen nun für die darin vorkommenden Werte r, s, t.. eben die beobachteten Zahlen eingesetzt werden, z. B. $r_1, s_1, t_1 \ldots$ dann $r_2, s_2, t_2 \ldots$ etc.; die so entstehenden Gröfsen sollen bez. $a_1, b_1, c_1 \quad a_2, b_2, c_2$ etc. heifsen.

Endlich nennen wir $[u]$ den Wert, der für die Funktion u entsteht, wenn man $[A]$, $[B]$, $[C]$ in die Funktion f einsetzt, während u den wirklich beobachteten Wert bedeute. u und $[u]$ werden sich durch einen Rest $\mathfrak{r}$ von einander unterscheiden, so dafs

$$\mathfrak{r} = u - [u]. \qquad 8.$$

Nach dem Taylor'schen Satze ist dann, wenn $\mathfrak{r}$, α, β, γ hinreichend klein sind,

$$\mathfrak{r} = \alpha\left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] + \beta\left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] + \gamma\left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = \alpha a + \beta b + \gamma c. \qquad 9.$$

Indem man in diese Gleichung die sämtlichen Beobachtungen einsetzt, erhält man so viele Gleichungen wie Beobachtungen, in denen aufser α, β, γ alles zahlenmäfsig gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \qquad 10. \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Beispiel: Die Temperatur eines sich in konstanter Umgebung abkühlenden Körpers (oder die Lage einer aperiodisch gedämpften Magnetnadel oder eines in einem zähen Mittel sich bewegenden Körpers; oder der Verlauf einer langsam vor sich gehenden chemischen Reaktion etc.) sei für die Zeit t durch den Ausdruck dargestellt

$$u = A \,.\, 10^{-Bt} + C.$$

Es seien zunächst 3 Beobachtungen vorhanden, welche zu den Zeiten $t_1\ t_2\ t_3$ für u die Werte $u_1\ u_2\ u_3$ ergeben haben. Setzt man zusammengehörige Paare in den Ausdruck ein, so erhält man allerdings drei Gleichungen, durch welche A, B, C bestimmt sind. Die Elimination z. B. von C und A führt aber für B auf die Beziehung $\frac{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_2}}{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_3}} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$, eine Gleichung, welche nicht nach B aufgelöst werden kann. Wohl aber kann man durch Probiren leicht eine Zahl für B finden, welche der Gleichung genähert genügt. — Oder man zeichnet $u_1\ u_2\ u_3$ als Ordinaten zu $t_1\ t_2\ t_3$ in Koordinatenpapier, zieht die Kurve durch und legt zwei Tangenten an dieselbe, welche das Gefälle q' und q'' für zwei, der Rechnung bequem gewählte Abscissen t' und t'' ergeben. Dann ist

$B = (\lg q' - \lg q'')/(t'' - t')$, der Wert wird aber nicht genau sein. — Oder endlich, es ist für die dritte Beobachtung t_3 etwa so grofs, dafs u_3 nahe den Endwert C vorstellt. — Sobald man A oder B oder C hat, so lassen die beiden übrigen Gröfsen sich geschlossen ausdrücken, werden aber auch nur Näherungswerte sein, wenn die erste ein solcher ist.

So habe man sich die Näherungen $[A]$, $[B]$ und $[C]$ verschafft. Es ist dann

$$\mathfrak{r} = u - [A] \cdot 10^{-[B]\cdot t} - [C]. \qquad 8\text{a}.$$

$$a = \left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] = 10^{-[B]\cdot t} \quad b = \left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] = -\frac{[A]\cdot t \cdot 10^{-[B]\cdot t}}{\log e} \quad c = \left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = 1. \qquad 7\text{a}.$$

Durch Einsetzen der drei Beobachtungspaare in Gl. 7a und 8a und der hieraus erhaltenen Zahlen für $\mathfrak{r}$, a, b, c in Gl. 9 erhält man drei Gleichungen (10). Aus diesen bestimmt man α, β, γ und dann aus Gl. 6 A, B, C, welche meistens den Beobachtungen schon genügen werden. Andernfalls benutzt man sie als bessere Näherungswerte und wird bei Wiederholung der einfachen Rechnung sicher zum Ziele kommen.

Liegen nur so viele Beobachtungen vor wie Unbekannte, so kann man die Gleichungen in gewöhnlicher Weise auflösen. Im anderen Falle dient die Methode der kleinsten Quadrate. Vgl. hierüber I und IV.

Es ist kaum nötig zu bemerken, dass, wenn u schon in der Form $u = A \cdot r + B \cdot s + C \cdot t$ gegeben ist (z. B. als $u = A + B \cdot s + C \cdot s^2$, wo s etwa eine Temperatur vorstellt), dafs dann die eben auseinandergesetzte Reduktion nicht notwendig ist. Trotzdem wird man dieselbe oft mit Vorteil gebrauchen, d. h. sich Näherungswerte für A, B, C verschaffen und mit den Resten rechnen, um nämlich kleinere Zahlen einzuführen, welche im Kopfe oder mit Multiplikationstafeln zu rechnen gestatten. Man hätte dann

$$a = \frac{\partial u}{\partial A} = r \qquad b = \frac{\partial u}{\partial B} = s \qquad c = \frac{\partial u}{\partial C} = t.$$

Dies sieht man hier auch ohne Differentialrechnung, denn wenn

$$[u] + \mathfrak{r} = ([A] + \alpha)\, r + ([B] + \beta)\, s + ([C] + \gamma)\, t,$$

so ist eben $\qquad \mathfrak{r} = \alpha \cdot r + \beta \cdot s + \gamma \cdot t.$

An dem Beispiel von S. 12 mit zwei zu bestimmenden Konstanten A und B kann man den Vorteil leicht sehen. Es war $u = A + Bt$. Einen Näherungswert für B liefern offenbar die beiden Beobachtungen

$$t_1 = 20 \quad u_1 = 1000{,}22 \quad \text{und} \quad t_4 = 60 \quad u_4 = 1001{,}05,$$

nämlich $\qquad [B] = \dfrac{1001{,}05 - 1000{,}22}{60 - 20} = \dfrac{0{,}83}{40} = 0{,}021.$

Aus der Beobachtung 1 findet man dann für A die Näherung

$$[A] = 1000{,}22 - 20 \cdot 0{,}021 = 999{,}8.$$

Also
$$[u] = 999{,}8 + 0{,}021 \cdot t.$$

Da nun $a = \frac{\partial u}{\partial A} = 1$ und $b = \frac{\partial u}{\partial B} = t$, so wird die Gleichung

$$u - [u] = \mathfrak{r} = \alpha \cdot a + \beta \cdot b = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t.$$

Hierin sind α und β mit kleinsten Quadraten zu bestimmen. $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2 \ldots$, $a_1\, a_2 \ldots$ und $b_1\, b_2 \ldots$ berechnen sich:

Nr.	u mm	t	$[u] = 999{,}8 + 0{,}021 \cdot t$ mm	$\mathfrak{r}$ mm	a	b
1.	1000,22	20°	1000,22	±0,00	1	20
2.	1000,65	40	1000,64	+0,01	1	40
3.	1000,90	50	1000,85	+0,05	1	50
4.	1001,05	60	1001,06	—0,01	1	60

wo man nun alles nach dem Schema S. 13, aber im Kopfe rechnen kann; am einfachsten, wenn man noch $\mathfrak{r}$ in Hunderteln mm und b in Zehnern von Graden als Einheiten ausdrückt. Die so berechneten α bez. β wären natürlich zum Schlufs durch 100 bez. 1000 zu dividiren.

IV. Das Gauss'sche Rechenverfahren bei der Auflösung linearer Gleichungen mit kleinsten Quadraten.

Es seien n Beobachtungen gemacht und nötigenfalls mit Näherungswerten nach III in linearen Zusammenhang gebracht. Die in Bezug auf α, β, γ als Unbekannte aufzulösenden Gleichungen heifsen

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{r}_n &= \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n. \end{aligned}$$

Es wird im allgemeinen genügen, die Zahlen für $a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \ldots$ so weit auszurechnen, dafs ihre Ziffernzahl derjenigen der bleibenden Reste $\mathfrak{r}$ ungefähr gleichkommt. Es ist dabei von grofsem Vorteil, wenn die Näherungswerte so nahe richtig sind, dafs die Reste zwei, höchstens drei Ziffern umfassen. Dann kann man die Quadrate und Produkte mit Rechentafeln, z. B. von Crelle oder Zimmermann, oder mit drei- oder vierstelligen Logarithmen bilden. Bei diesen Rechnungen darf, wie schon oben bemerkt wurde, nicht weiter gekürzt werden.

Allen Gleichungen soll dasselbe wahrscheinliche Mafs der Genauigkeit zukommen. Liegt eine Veranlassung vor, den verschiedenen Beobachtungen eine ungleiche Genauigkeit zuzuschreiben, so seien die Gleichungen bereits durch Multiplikation mit der Quadratwurzel des einer jeden zukommenden Gewichtes

auf gleiche Genauigkeit gebracht. Dabei ist zu beachten, dafs auch Faktoren 1 in demselben Verhältnis geändert werden müssen.

Um die Gleichungen nach kleinsten Quadraten aufzulösen kann das S. 11 ff. erörterte Verfahren dienen unter Beachtung, dafs den dortigen u $t\ldots$ $A, B\ldots$
hier die Gröfsen entsprechen $\mathfrak{r}$ a, b, c α, β, γ.
Für eine gröfsere Anzahl von Unbekannten, z. B. schon für unsere drei, ist aber die folgende Auflösung bequemer.

Man findet links die Reihenfolge der Hauptrechnung; daneben rechts für deren Richtigkeit eine Kontrole, welche man neben der Hauptrechnung führt. Es handelt sich zunächst um die Berechnung von Summen der Quadrate oder der Produkte zusammengehöriger Gröfsen, die wir in leicht verständlicher Weise abgekürzt so bezeichnen:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = [aa] \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = [ab]$$
$$a_1 \mathfrak{r}_1 + a_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + a_n \mathfrak{r}_n = [a\mathfrak{r}] \text{ u. s. w.}$$

Rechnung.	Kontrole.
Man bilde $[aa]$ $[ab]$ $[ac]$ $[a\mathfrak{r}]$	Es sei $a + b + c = S$.
$[bb]$ $[bc]$ $[b\mathfrak{r}]$	Ferner, wie oben bezeichnet,
$[cc]$ $[c\mathfrak{r}]$	$a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_n S_n = [aS]$ etc.
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$	Dann muss sein
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$ ist nur für die letzte Kontrole notwendig.	$[aa] + [ab] + [ac] = [aS]$ $[ab] + [bb] + [bc] = [bS]$ $[ac] + [bc] + [cc] = [cS]$ $[a\mathfrak{r}] + [b\mathfrak{r}] + [c\mathfrak{r}] = [\mathfrak{r}S]$.

Die Normalgleichungen zur Bestimmung von α, β, γ sind dann

$$[aa]\cdot\alpha + [ab]\cdot\beta + [ac]\cdot\gamma = [a\mathfrak{r}]$$
$$[ab]\cdot\alpha + [bb]\cdot\beta + [bc]\cdot\gamma = [b\mathfrak{r}]$$
$$[ac]\cdot\alpha + [bc]\cdot\beta + [cc]\cdot\gamma = [c\mathfrak{r}].$$

Die Auflösung geschieht folgendermafsen:

Man bilde und bezeichne	Man berechne
$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb]_{\mathrm{I}}$	$[bS] - \frac{[ab]}{[aa]}[aS] = [bS]_{\mathrm{I}}$
$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc]_{\mathrm{I}}$	$[cS] - \frac{[ac]}{[aa]}[aS] = [cS]_{\mathrm{I}}$
$[b\mathfrak{r}] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}$	$[\mathfrak{r}S] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[aS] = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}}$;

$$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc]_{\text{I}}$$

$$[c\mathfrak{r}] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [c\mathfrak{r}]_{\text{I}}.$$

Endlich

$$[cc]_{\text{I}} - \frac{[bc]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}}[bc]_{\text{I}} = [cc]_{\text{II}}$$

$$[c\mathfrak{r}]_{\text{I}} - \frac{[bc]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}}[b\mathfrak{r}]_{\text{I}} = [c\mathfrak{r}]_{\text{II}}.$$

dann mufs sein

$$[bb]_{\text{I}} + [bc]_{\text{I}} = [bS]_{\text{I}}$$

$$[bc]_{\text{I}} + [cc]_{\text{I}} = [cS]_{\text{I}}$$

$$[b\mathfrak{r}]_{\text{I}} + [c\mathfrak{r}]_{\text{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\text{I}}.$$

Man berechne

$$[cS]_{\text{I}} - \frac{[bc]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}}[bS]_{\text{I}} = [cS]_{\text{II}}$$

$$[\mathfrak{r}S]_{\text{I}} - \frac{[b\mathfrak{r}]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}}[bS]_{\text{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\text{II}};$$

dann mufs sein

$$[cc]_{\text{II}} = [cS]_{\text{II}} \quad \text{und} \quad [c\mathfrak{r}]_{\text{II}} = [\mathfrak{r}S]_{\text{II}}.$$

Hieraus erhält man die Unbekannten α, β und γ:

$$\gamma = \frac{[c\mathfrak{r}]_{\text{II}}}{[cc]_{\text{II}}} \qquad \beta = \frac{[b\mathfrak{r}]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}} - \gamma\frac{[bc]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}} \qquad \alpha = \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\beta - \frac{[ac]}{[aa]}\gamma.$$

Kontrole der ganzen Rechnung. Die Einsetzung der gefundenen α, β, γ in die ursprünglichen Gleichungen lasse die Fehler übrig

$$\mathfrak{f}_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 - \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{f}_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 - \mathfrak{r}_2 \quad \text{etc.}$$

Dann mufs sein

$$\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots \mathfrak{f}_n^2 = [\mathfrak{r}\mathfrak{r}] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] - \frac{[b\mathfrak{r}]_{\text{I}}}{[bb]_{\text{I}}}[b\mathfrak{r}]_{\text{I}} - \frac{[c\mathfrak{r}]_{\text{II}}}{[cc]_{\text{II}}}[c\mathfrak{r}]_{\text{II}}.$$

Die Gewichte der so bestimmten α, β, γ werden erhalten

$$p_\gamma = [cc]_{\text{II}} \qquad p_\beta = p_\gamma\frac{[bb]_{\text{I}}}{[cc]_{\text{I}}} \qquad p_\alpha = p_\gamma\frac{[ca]\cdot[bb]_{\text{I}}'}{[cc]\cdot[bb] - [bc]\cdot[bc]}.$$

Die Quadrate der mittleren Fehler von α, β, γ erhält man, indem man den Ausdruck $(\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots \mathfrak{f}_n^2)/(n-3)$ durch p_α, p_β, p_γ dividirt; 3 ist hier die Anzahl der bestimmten Konstanten.

Es kann vorkommen, dafs die mit kleinsten Quadraten erhaltenen Korrektionen α, β, γ nicht genügen. Dann hat man die jetzt entstandenen Werte $[A]+\alpha$, $[B]+\beta$, $[C]+\gamma$ wieder als Näherungswerte von A, B, C zu betrachten und die Rechnung zu wiederholen.

Rechenschema. Es empfiehlt sich, bei solchen Rechnungen die Zahlen immer in derselben Ordnung zu schreiben, z. B. (die Klammern der Produktsummen sind weggelassen):

$\lg aa$		
$\lg ab$	$\lg bb_{\mathrm{I}}$	
$\lg ac$	$\lg bc_{\mathrm{I}}$	$\lg cc_{\mathrm{II}}$
$\lg aS$	$\lg bS_{\mathrm{I}}$	
$\lg a\mathfrak{r}$	$\lg b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}$	$\lg c\mathfrak{r}_{\mathrm{II}}$
$\lg \frac{ab}{aa}$	$\lg \frac{bc_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}$	$\lg \frac{c\mathfrak{r}_{\mathrm{II}}}{cc_{\mathrm{II}}}$
$\lg \frac{ac}{aa}$	$\lg \frac{b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}$	
$\lg \frac{a\mathfrak{r}}{aa}$		

	aa	ab	ac	aS	$a\mathfrak{r}$		
		bb	bc	bS	$b\mathfrak{r}$		
		$\frac{ab}{aa}ab$	$\frac{ab}{aa}ac$	$\frac{ab}{aa}aS$	$\frac{ab}{aa}a\mathfrak{r}$		
Diff. =		bb_{I}	bc_{I}	bS_{I}	$b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}$		
			cc	cS	$c\mathfrak{r}$	$\mathfrak{r}S$	$\mathfrak{r}\mathfrak{r}$
			$\frac{ac}{aa}ac$	$\frac{ac}{aa}aS$	$\frac{ac}{aa}a\mathfrak{r}$	$\frac{a\mathfrak{r}}{aa}aS$	$\frac{a\mathfrak{r}}{aa}a\mathfrak{r}$
Diff. =			cc_{I}	cS_{I}	$c\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}$	$\mathfrak{r}S_{\mathrm{I}}$	
			$\frac{bc_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}bc_{\mathrm{I}}$	$\frac{bc_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}bS_{\mathrm{I}}$	$\frac{bc_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}$	$\frac{b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}bS_{\mathrm{I}}$	$\frac{b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}}{bb_{\mathrm{I}}}b\mathfrak{r}_{\mathrm{I}}$
Diff. =			cc_{II}	cS_{II}	$c\mathfrak{r}_{\mathrm{II}}$	$\mathfrak{r}S_{\mathrm{II}}$	
							$\frac{c\mathfrak{r}_{\mathrm{II}}}{cc_{\mathrm{II}}}c\mathfrak{r}_{\mathrm{II}}$
						Diff. =	$\Sigma\mathfrak{f}^2$

4. Korrektionen und Korrektionsrechnungen.

Die gesuchten Resultate gehen selten aus den Beobachtungen rein hervor; die Übung im Anbringen der Korrektionen ist eine der wesentlichsten Bedingungen des genauen und trotzdem bequemen physikalischen Arbeitens. Mit steigendem Anspruch auf Genauigkeit wächst sowohl die Anzahl der zu berücksichtigenden Nebeneinflüsse, wie die Schwierigkeit, sie zu eliminiren, so dafs hierin oft der gröfsere Teil der Arbeit besteht.

Zu den Ursachen der Korrektionen gehören erstens Instrumentalfehler wie die Ungleicharmigkeit der Wage, Abweichungen von der genauen Proportionalität zwischen Ursachen und Wirkungen z. B. bei Ausschlagswinkeln, Abweichungen von genähert giltigen Gesetzen wie bei magnetischen Fernwirkungen u. dgl. Ferner die Nebeneinflüsse, besonders die von der Atmosphäre herrührenden, wie der Auftrieb der Körper in der Luft, die Wirkungen der Luftfeuchtigkeit, die Barometerschwankungen, vor allem aber die Einflüsse der Temperatur, welche sich auf fast sämtliche Eigenschaften der Körper erstrecken.

Nimmt man auf diese Umstände keine Rücksicht, so wird das entstehende Rohprodukt der Arbeit meistens viel fehlerhafter ausfallen, als der Beobachter denkt. Eine Einschränkung ist andrerseits auch unvermeidlich, denn sonst kann eine einzige

Messung z. B. von einer Pendellänge, einem elektrischen Leitvermögen, ja von einer Masse zu einer grofsen Arbeit werden.

Es ist nötig, sich von vorn herein über den Betrag der Korrektionen zu orientiren, und sodann, sie auf möglichst einfache Weise in die Rechnung aufzunehmen. Wie weit man die Korrektionen berücksichtigen kann, hängt von äufseren Umständen und von der Grenze ab, welche auch hier durch die Fehler der Beobachtung sowie durch die unvollkommene Kenntnis der Naturgesetze und der in diesen vorkommenden Zahlenwerte gesteckt ist. Andrerseits aber ist es oft überflüssig, die Genauigkeit der Korrektion bis zu dieser Grenze zu führen; es genügt vielmehr offenbar immer, so weit zu gehen, dafs der vernachlässigte Teil der Korrektionen erheblich kleiner wird als der mögliche Einflufs der Beobachtungsfehler auf das Resultat. Hieraus ergeben sich ähnliche Kürzungsregeln, wie früher für die Fehlerrechnung.

Eine der einfachsten physikalischen Messungen ist z. B. Massenbestimmung durch Wägung. Hier bestehen zunächst die eigentlichen Beobachtungsfehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Gesichtswahrnehmung und des Urteils über dieselbe, sowie aus einigen nicht zu berechnenden Mängeln der Wage, wie Reibung, Veränderlichkeit der Hebelarme u. s. w., zusammengesetzt sind. Auch die fehlerfreie Herstellung oder Prüfung eines Gewichtsatzes ist unmöglich. Indessen werden keineswegs besonders ausgezeichnete Instrumente oder feine Beobachtungen vorausgesetzt, damit andere ebenfalls unvermeidliche, aber ihrer Gröfse nach bestimmbare und daher zu eliminirende Fehler merklich werden, welche, wo Genauigkeit beansprucht wird, berücksichtigt werden müssen. Hierher gehört erstens die Ungleicharmigkeit der Wage, welche bei gröfseren Gewichten in der Regel einen merklichen Einflufs hat. Sie wird nach **13** eliminirt.

Zweitens erleiden die Körper einen Gewichtsverlust durch die verdrängte Luft, welcher schon bei einer Krämerwage, die bei 1 kg Belastung noch 1 gr anzeigt, gröfser werden kann als der Wägungsfehler. Um die Wägung auf den leeren Raum zu reduciren, mufs man die Dichtigkeit der Luft kennen, eine innerhalb gewisser Grenzen veränderliche Gröfse. Aber obwohl die

vollständige Vernachlässigung der Korrektion nur bei einer sehr rohen Wägung gestattet ist, so läfst sich leicht überschlagen, dafs für gewöhnliche Ansprüche auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft nicht berücksichtigt zu werden brauchen; man darf der Korrektion einen mittleren Wert zu Grunde legen. Indem man sich entsprechend auch auf eine genäherte Ausrechnung der Korrektion beschränkt oder eine Tabelle benutzt, wird die erhebliche Verbesserung des Resultates sehr einfach.

Etwas mühsamer wird die Arbeit, wenn die mittlere Luftdichtigkeit nicht genügt; dann mufs noch die Temperatur und der Druck der Luft beobachtet werden. Dieser wird aber nicht aus der blofsen Ablesung am Barometer erhalten, sondern, da Quecksilber und Mafsstab sich mit ihrer Temperatur ausdehnen, so ist auch diese zu berücksichtigen. Auch die Veränderlichkeit der Schwere an der Erdoberfläche hat einen Einflufs. Endlich hängt die Dichtigkeit der Luft von ihrer Feuchtigkeit ab, die also bei feinen Wägungen auch bestimmt und in Rechnung gesetzt werden mufs.

Wollte man alle diese Beobachtungen und Rechnungen mit vollkommener Schärfe durchführen, so würden sie eine grofse Mühe verursachen. Allein nachdem man sich über das verlangte oder erreichbare Mafs der Genauigkeit und über den Einflufs der Korrektionen orientirt hat, findet man, in wie weit eine Annäherung erlaubt ist, und wird dann auch eine genaue Messung bei einiger Übung mit geringer Mühe durchführen.

In ähnlicher Weise treten Korrektionen in die meisten Aufgaben ein, insbesondere durch die wechselnde Temperatur.

Eine gleichmäfsige Änderung der Temperatur läfst sich übrigens häufig eliminiren, indem man die Beobachtungen in umgekehrter Reihenfolge wiederholt und die Mittel nimmt.

Zur Rechnung wird man oft das Verfahren und die Näherungsformeln auf S. 9 gebrauchen können.

Beispiele. 1. Eine der gebräuchlichsten Kürzungen ist der Ausdruck des kubischen Ausdehnungskoefficienten durch den linearen β als 3β. Streng entspricht einer Änderung der Längen-Dimensionen im Verhältnis $1+\beta t$ das Volumenverhältnis $(1+\beta t)^3 = 1 + 3\beta t + 3\beta^2 t^2 + \beta^3 t^3$. Aber für fast alle festen Körper ist $\beta < 0{,}00003$, so dafs für $t = 100^0$ der vernachlässigte Teil $3\beta^2 t^2$ nur $< 0{,}000027$ oder $1/_{37000}$ des Ganzen ist.

Nur wenn so kleine Gröfsen in Betracht kommen, dürfte man die abgekürzte Rechnung nicht anwenden. Dann aber kommt zugleich in Betracht, dafs der Ausdehnungskoefficient selbst sich mit der Temperatur ändert. Ganz ohne merklichen Einflufs wird $\beta^3 t^3$.

2. In **37** wird bei der Reduktion des Barometers auf 0° die Ausdehnung des Quecksilbers als Korrektionsgröfse behandelt, indem $l/(1 + 0{,}00018\,t) = l - 0{,}00018\,lt$ (Formel 4, S. 9) gesetzt wird. Dabei vernachlässigt man höhere Potenzen von $0{,}00018\,t$. Man sieht aber, dafs selbst für $t = 30°$ schon die nächste Potenz nur 0,00003 beträgt, also mit $l = 760$ mm multiplicirt nur etwa $^1/_{45}$ mm, eine hier fast immer zu vernachlässigende Gröfse liefert.

Unerlaubt dagegen ist es meistens, die 20mal gröfsere Ausdehnung der Gase ebenso zu behandeln.

3. Wird das Gewicht eines Körpers durch Doppelwägung (**18**) bestimmt, und hat man auf der einen Seite das Gewicht p_1, auf der anderen p_2 gefunden, so ist streng genommen $p = \sqrt{(p_1 p_2)}$ das wirkliche Gewicht. Anstatt dieses geometrischen Mittels kann aber das arithmetische $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ gesetzt werden (Formel 9, S. 9). Denn setzt man $p_1 = p + \delta$, $p_2 = p - \delta$, wo eben $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ist, so wird (Formel 3)

$$\sqrt{p_1 p_2} = \sqrt{p^2 - \delta^2} = p\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{p^2}} = p\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{p^2}\right).$$

Nun müfste eine Wage sehr schlecht justirt sein, wenn δ/p den Wert 1/1000 erreichte. In diesem Falle wäre $\frac{1}{2}\delta^2/p^2 = \frac{1}{2}$ Milliontel, eine Gröfse, welche im Verhältnis zu 1 jedenfalls nicht in Betracht kommt, wenn man mit einer solchen Wage wägt.

Über die Anwendung graphischer Methoden auf Korrektionen s. Mehmke, Wied. Ann. 41, 892. 1890; H. Maurer, Archiv d. Deut. Seewarte 1894 Nr. 6.

5. Interpolation.

Oft soll eine Gröfse y, die von einer anderen x abhängt, für einen ganz bestimmten Wert von x ermittelt werden, während nur zusammengehörige Werte in der Nachbarschaft bekannt sind.

Ähnlich besteht die Aufgabe einer Beobachtung häufig darin, dafs man festzustellen hat, durch welche Verhältnisse eine bestimmte Einstellung des Beobachtungsobjektes bedingt wird. Es ist jedoch oft mühsam oder sogar unmöglich, die Verhältnisse ganz genau bis zur Erfüllung dieser Forderung einzurichten. So ist es meistens mit Schwierigkeiten verknüpft, die Temperatur eines Körpers auf einem vorbestimmten Grade, bei welchem etwa sein Volumen, seine Elasticität, sein elektrisches Leitungs-

vermögen bekannt sein sollen, genau zu erhalten; bei einer Wägung die Gewichtstücke gerade so abzupassen, dafs der Zeiger auf Null steht, kostet, wenn es überhaupt möglich ist, Zeit. Ähnliches gilt, wenn galvanische Leitungen so abgeglichen werden sollen, dafs eine Galvanometernadel einen bestimmten Teilstrich anzeigt. In solchen sehr häufigen Fällen kann man oft aus Beobachtungen in der Nachbarschaft die genauen gesuchten Verhältnisse interpoliren und dadurch Vorteile in der Einfachheit der Hilfsmittel, in dem Zeitaufwand und dazu noch in der Genauigkeit erzielen.

Es sei x_0 der Punkt, für den die Gröfse y_0 gesucht wird, und man kenne die Nachbarwerte y_1 für x_1 und y_2 für x_2, wobei x_1 und x_2 womöglich auf verschiedenen Seiten von x_0 genommen werden.

Liegen die Einstellungen so nahe bei einander und bei x_0, dafs innerhalb dieser Grenzen die Änderung von y derjenigen von x proportional ist, so gilt

$$(y_0 - y_1):(x_0 - x_1) = (y_2 - y_1):(x_2 - x_1),$$

woraus

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Beispiele siehe unter anderem in **10** und **90**.

Ändern y und x sich nicht einander proportional, so werden zur Interpolation, wenn nicht etwa das Gesetz des Wachstums bekannt ist, mindestens drei benachbarte Beobachtungen verlangt. Für die Rechnung sind Formeln z. B. von Lagrange und Gauss gegeben.

Vgl. Weinstein, Physik. Mafsbest. § 291.

Meist wird im letzteren Falle die graphische Interpolation (6) angewandt.

6. Graphische Darstellung von Beobachtungen.

Eine Gröfse y sei zu mehreren Werten einer anderen Gröfse x, von der sie abhängt, beobachtet worden, vielleicht die Empfindlichkeit einer Wage zu verschiedenen Belastungen, die Skalenteile eines Spektralapparats zu bekannten Lichtwellenlängen, das spec. Gewicht oder eine andere Eigenschaft einer Lösung zu mehreren Koncentrationen derselben, oder Volumina, elektromotorische Kräfte, Löslichkeiten, Leitvermögen u. dgl. zu ver-

schiedenen Temperaturen. In jedem Falle erlangt man dann am raschesten eine Übersicht über den gegenseitigen Zusammenhang der Gröſsen, auch über ihren regelmäſsigen Verlauf, wenn man sie geometrisch darstellt, indem man in Koordinatenpapier x als Abscisse und y als Ordinate einträgt. Wenn, wie es häufig vorkommt, ein einfaches mathematisches Gesetz für die Abhängigkeit der einen Gröſse von der anderen nicht bekannt ist, so gewährt diese graphische Darstellung, indem die eingetragenen Punkte durch eine Kurve verbunden werden, die einzige Übersicht über ihren Zusammenhang.

Graphische Ausgleichung von Fehlern. Diese geometrische Darstellung gemessener Werte kann, wie leicht zu sehen, zur Kontrole bez. zur Verbesserung von Beobachtungen dienen. Denn Beobachtungsfehler machen sich in Unregelmäſsigkeiten der Zeichnung geltend, man kann aber häufig den richtigen Verlauf trotz den Unregelmäſsigkeiten erkennen und eine ausgleichende Kurve durchziehen. Vorsichtig aber muſs dies Verfahren gehandhabt werden; es verleitet leicht zu Irrtümern, besonders an den Enden der Kurven.

7. Über die Genauigkeit von Messungen. Zahlenrechnen.

Die vornehmste Regel bei einer Messung ist, daſs die Genauigkeit des Resultats den Grundlagen und dem Zweck nach richtig beurteilt wird. Eine Überschätzung liegt einerseits vor, wenn man sich oder Andere durch eine übertriebene Anzahl von Ziffern über die Genauigkeit täuscht. Derselbe Fehler wird aber öfter noch in der Form begangen, daſs man sich durch eine von vorn herein begangene Überschätzung des Endergebnisses dazu verführen läſst, einzelne Teile der Arbeit mit zweckloser Sorgfalt auszuführen oder Korrektionen mit unnötiger Genauigkeit zu behandeln. Eine Dichtigkeitsbestimmung mit direkter Volumausmessung von $^1/_{10}$ cm³ Unsicherheit oder die Herstellung einer Lösung von einem Salze, dessen Masse wegen Hygroskopie auf 1% unbekannt bleibt, läſst sich nicht wesentlich dadurch verbessern, daſs man auf 1 mg genau wägt. Wird das Leitvermögen eines Elektrolytes gemessen, dessen Temperatur auf $\pm \frac{1}{2}^0$ bekannt ist, so folgt aus letzterem Umstande allein etwa 1% Unsicherheit, die sich auch nicht dadurch vermindern läſst, daſs man das Leitvermögen selbst besonders genau bestimmt.

Überhaupt wird bei Messungen nicht selten eine unnötige Genauigkeit angestrebt und Mühe dadurch verschwendet. Dies ist u. A. bei solchen Objekten zu beachten, die an sich nicht scharf definirt sind. Dazu gehören z. B. die Eigenschaften vieler fester Substanzen, ganz

besonders organischer. Von diesen lassen sich ihre Dichte, Elasticität, Festigkeit, elektrische und thermische Eigenschaften, z. B. die verschiedenen Leitvermögen, als Eigenschaften der Substanz durchaus nicht genau bestimmen, weil sie eben nicht in bestimmter Gröfse vorhanden sind, sondern von nicht genau definirbaren Eigenschaften, etwa vom hygroskopischen Zustande abhängen und weil sie meistens sogar innerhalb des untersuchten Stückes schwanken. Das spec. Gewicht einer Holzart auf $1/_{10000}$ anzugeben hat überhaupt keinen Sinn.

Zu den gewöhnlichsten Formen der Unterschätzung einer Genauigkeit des Resultates andrerseits gehört das Übersehen oder ungenügende Behandeln von Nebenumständen während der Messung. Vor allem gilt dies von der Temperatur; diese, man darf beinahe sagen unter allen Umständen, zu beachten ist eine Vorsicht, die der Beobachter sich nicht früh genug angewöhnen kann und die besonders dann am Platze ist, wenn man den Temperatureinflufs auf einen Vorgang noch nicht kennt.

Kritik nach beiden Seiten bildet die Vorbedingung zweckentsprechenden Arbeitens.

Zahlenrechnen.

Das nämliche gilt von einer kritischen Behandlung der Zahl. Die numerische Berechnung der Resultate lässt sich nur mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern ausführen, was bei den meisten Rechenoperationen die vollständige Genauigkeit unmöglich macht. Meistens würde die letztere auch zwecklos sein.

Im allgemeinen halte man die Regel fest, das Resultat in so vielen Ziffern mitzuteilen, dafs die letzte wegen der Beobachtungsfehler keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, dafs die vorletzte aber noch für ziemlich richtig gelten kann. Im zweifelhaften Falle soll eher eine Stelle zu viel als eine zu wenig genommen werden.

Der Rechnung nach sollen alle mitgeteilten Ziffern richtig sein. Hieraus folgt, dafs wenigstens eine längere, beispielsweise logarithmische Rechnung, welche durch das Vernachlässigen der späteren Ziffern die letzte Stelle nach und nach um einige Einheiten fälschen kann, mit einer Stelle mehr geführt werden mufs, als man im Resultat mitteilen will. Angehängte oder einen Decimalbruch beginnende Nullen bleiben bei der Ziffernzahl aufser Betracht. Bei dem Abstofsen der letzten Rechnungsziffer wird, wenn sie mehr als 5 beträgt, die vorletzte Ziffer bekanntlich um Eins erhöht.

Ein übertrieben genaues Rechnen gehört zu den gewöhnlichsten Fehlern. Es wird z. B. das Volumen v eines rechteckigen Körpers durch Ausmessen der drei Dimensionen bestimmt. Die letzteren seien etwa gleich 10,5 15,7 30,9 mm gefunden. Das genaue rechnerische Resultat $v = 5093{,}865$ cbmm mitzuteilen würde kritiklos sein. Denn ein Fehler bei dem Ausmessen um je $1/_{20}$ mm kann das Resultat bis zu 50 cbmm zu grofs oder zu klein gemacht haben. Es genügt also $v = 5090$ oder äufserstenfalls 5094 zu berechnen, also abgekürzt zu multipliciren oder

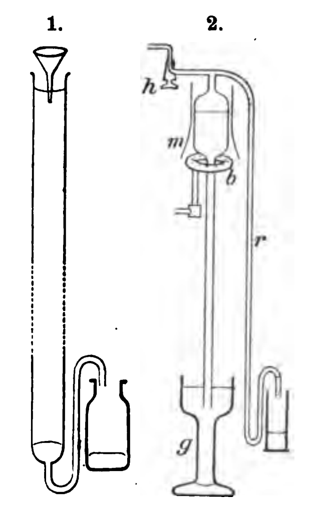
mit 4stelligen Logarithmen zu rechnen. Auf etwa 1 promille genau kann auch ein gewöhnlicher Rechenschieber arbeiten. Umgekehrt findet man oft Divisionen auf zu wenige Stellen ausgeführt, vielleicht ein specifisches Gewicht mittels Wägungen auf Zehntel mg mit einer feinen Wage bestimmt und schliefslich = 2,5 berechnet, während vielleicht die 4te Decimale noch richtig sein könnte.

Für genauere nicht logarithmische Rechnungen sind u. A. die Crelle'schen Rechentafeln geeignet.

8. Technisches.

1. **Reines Quecksilber.** Das in eisernen Flaschen aus Idria bezogene Quecksilber genügt nach Filtriren für die meisten Zwecke.

Getrocknet wird Quecksilber oberflächlich mit Fliefspapier, vollkommener durch Erwärmen in einer reinen eisernen oder Porzellan-Schale auf etwa 150° unter Umrühren. Staub entfernt man mittels Filtrirens, am einfachsten durch ein gewöhnliches, bei gröfserem Druck mehrfach genommenes Filter mit einem oder einigen feinen Löchern an der Spitze. Fett wird durch Ausschütteln mit etwas Kali- oder Natronlauge oder Benzol und Alkohol und wiederholtes Nachschütteln mit Wasser beseitigt. Fremde unedle Metalle und Oxyd zieht man durch Schütteln des Quecksilbers mit verdünnter Salpetersäure oder Lösungen von Eisenchlorid oder doppeltchromsaurem Kali aus, natürlich unter wiederholtem gründlichen Nachschütteln mit Wasser. Oder man läfst das Quecksilber aus einem, mit ganz feinen Öffnungen versehenen Trichter durch 1 bis 1½ m hohe Säulen von solchen Flüssigkeiten und schliefslich durch Wasser laufen. Ein aufgebogener unterer Fortsatz des Rohres (Fig. 1) fängt das Queeksilber auf, welches durch seinen Druck die Flüssigkeitssäule hält und im Überschufs abfliefst.



Schwer flüchtige Metalle entfernt man durch Abdestilliren des Quecksilbers, am besten im Vacuum, d. h. in Barometer-ähnlichen Vorrichtungen (Fig. 2). Durch den fettfreien (s. Nr. 25) Hahn *h* hindurch wird das Quecksilber aus dem Vorrat in *g* mit der Luftpumpe gehoben; die Öffnung von *r* läfst man dabei in Quecksilber tauchen. Ist das Kühlrohr *r* hinreichend eng, so gelingt es, durch Heben des Gefäfses *g* Gase, welche über dem Quecksilber geblieben oder während der Destillation ausgeschieden sind, mit dem überfliefsenden Quecksilber auszutreiben, falls dieselben nicht von selbst mit dem Quecksilber in *r* abwärts wandern. Die Wärme des kleinen Rundbrenners *b* wird durch den Mantel *m* zusammengehalten.

S. z. B. Weinhold, Carl Rep. 9, 69. 1873; 23, 791. 1887; Leonh. Weber ib. 15, 1. 1879; Dunstan u. Dymond, Phil. Mag. 29, 367. 1890.

Flüchtigere Metalle werden am sichersten durch Elektrolyse beseitigt. Das Quecksilber kommt auf den Boden eines breiten Gefäſses als Anode in eine Lösung von Merkuronitrat; in derselben Lösung steht ein kleineres Gefäſs mit einer Platinkathode. Durch einen elektrischen Strom (etwa 0,01 Am/cm^2) wird die Anode gelöst und das Quecksilber unter Zurücklassung der oxydirbareren Metalle an der Kathode niedergeschlagen. Jaeger, Z. S. f. Instr. 1892, 354.

2. **Reines Wasser.** Zu Kühlröhren beim Destilliren pflegt man Silber, Zinn oder Glas zu verwenden. Glas giebt anfangs Bestandteile an das Wasser ab, was aber bei guten Gläsern mit der Zeit aufhört. Sehr hartnäckig kann ein stattgefundenes Überspritzen durch die eingetrockneten festen Verunreinigungen stören. Das Stoſsen beim Sieden in Glasgefäſsen wird durch eingeworfene Metallstückchen (Platin) vermindert.

Das zuerst übergegangene Wasser ist häufig wegen der mitgegangenen flüchtigen Verunreinigungen schlechter als der Vorrat.

Unvermeidlich ist die Verunreinigung des Destillates durch die atmosphärische Kohlensäure, besonders wenn dieselbe durch Flammen oder Atmung vermehrt ist. In diesem Falle kann das Wasser schon durch Schütteln oder besser durch einen Luftstrom verbessert werden, der mittels der Wasserluftpumpe in einer Waschflasche aus einer engen Rohröffnung in kleinen Blasen durchgesaugt wird. Gründlicher reinigt ein Luftstrom, dem durch Überleiten über Aetzkali oder Natronkalk oder in einer Waschflasche mit verdünnter Alkalilösung die Kohlensäure entzogen worden ist. Langsamer wirkt das Anstreichen des äuſseren Flaschenhalses mit gutem gelöschten Kalk und Überstülpen eines Glases, welches die Kommunikation der Luft über dem Wasser mit dem Kalk gestattet.

Verunreinigungen des Wassers lassen sich auch durch Ausfrieren beseitigen, indem man den nicht gefrorenen Teil weggieſst (Nernst). Geschmolzenes oberflächlich vorher gereinigtes käufliches Eis kann schon ein gutes Wasser liefern.

Bei der Aufbewahrung in Glas löst das Wasser, je nach der Glassorte rascher oder langsamer, mehr oder weniger Bestandteile, besonders Alkali, aus den Wänden. Vgl. Nr. 4.

Das feinste Prüfungsmittel auf die Anwesenheit unorganischer gelöster Stoffe im Wasser ist sein elektrisches Leitvermögen. Gutes Wasser hat nicht mehr als 10^{-6}; durch Entziehung der Kohlensäure (vgl. oben) kann das Leitvermögen auf etwa $5 \cdot 10^{-7}$ kommen. Doch steigt es dann an der Luft wieder an (**96**).

3. **Bereitung von Gasen.** Man erhält Wasserstoff aus reinem Zink mit verdünnter Schwefelsäure oder Salzsäure; Kohlensäure aus weiſsem Marmor mit Salzsäure; Sauerstoff durch Erhitzen von chlorsaurem Kali, ev. gemischt mit Braunstein; Ammoniak aus koncentrirter wässriger Lösung, die, bei etwa 30° siedend, fast nur Ammoniak abgiebt; schweflige

Säure durch Erhitzen koncentrirter Schwefelsäure mit Kupferspänen; Chlor aus Braunstein und Salzsäure.

Verunreinigungen werden durch Waschflaschen entfernt, wobei das Gas in kleinen Blasen nicht zu rasch durchtreten soll. Als Waschflüssigkeiten dienen u. A.: Wasser gegen mitgerissene Salze, Spuren von Säuren oder Alkalien; gegen Säuren sicherer alkalische Lösungen (doppeltkohlensaures Natron, wenn Kohlensäure gewaschen wird); gegen flüchtiges Alkali Schwefelsäure- oder Phosphorsäurelösung; gegen Sauerstoff Pyrogallussäurelösung; gegen organische Verunreinigungen, z. B. Kohlenwasserstoffe, übermangansaures Kali. Auch Überleiten durch Glasröhren z. B. mit zerkleinertem Ätzkali oder Bimstein mit Schwefelsäure wird gebraucht. Wasserstoff kann auch so gereinigt werden, dafs man ihn nach dem Waschen mit einer alkalisch gemachten Lösung von $KMnO_4$, welche Säuren, auch Arsen zurückhält und Kohlenwasserstoffe zerstört, über ausgeglühten Palladiumschwamm leitet, ev. ihn von diesem absorbiren läfst und durch Erhitzen später wieder frei macht.

Zum Austrocknen führt man Gase über Stücke von geschmolzenem Chlorcalcium, oder Bimstein mit koncentrirter Schwefelsäure, oder durch eine Waschflasche mit letzterer, am sichersten über wasserfreie Phosphorsäure in einem langen Rohr.

Käuflich sind Bomben mit Gasen zu beziehen z. B. von den Firmen: Akt.-G. f. Kohlensäureindustrie, Berlin (CO_2); Kunheim u. Co., Berlin (CO_2, NH_3); Gesellsch. f. flüssige Gase, Pictet u. Co., Berlin ($O, H, CO_2, NH_3, SO_2, Cl$); Sauerstofffabrik, Berlin (O, H, N_2O, Cl); Romenhöller, Berlin (O, H, CO_2); Verein chemischer Fabriken, Mannheim (NH_3); Sauerstofffabrik Luzern (O, H).

4. Glassorten. Die Löslichkeit der Gläser in Wasser und ihre damit zusammenhängenden hygroskopischen Eigenschaften sind von sehr verschiedener Gröfse. 1 dm^2 giebt bei den besten Gläsern in gewöhnlicher Temperatur täglich etwa 0,002, bei schlechten bis zu 0,2 mg Substanz in Lösung. Temperatursteigerung beschleunigt die Auflösung ungeheuer stark. Besonders haltbar ist das Jenaer Geräteglas. Eine Schätzung der Güte eines Gefäfses ergiebt sich am einfachsten aus der Haltbarkeit der Wasserfüllung selbst mittels seines elektrischen Leitvermögens (**96**). Rascher gewinnt man ein Urteil, wenn man das Glas im Stahlmörser und der Achat-Reibschale unter Vermeidung von Verunreinigungen fein pulverisirt und einen Wasseraufgufs auf sein Leitvermögen oder durch Eindampfen auf blankem Platin auf seinen Gehalt an fester Substanz prüft. Auch die hygroskopische Wasseranziehung liefert, bei Pulvern aus der Gewichtszunahme, bei gröfseren Flächen nach der elektrischen Isolirung in feuchter Luft beurteilt, eine Prüfung der Güte. Oder man bringt die Glasfläche in mit Wasser gesättigten Äther, der mit etwa $^1/_{10}$% E o s i n gefärbt ist. Je löslicher das Glas, desto intensiver färbt es sich im allgemeinen (Mylius). In einer Salzsäure-Atmosphäre bekommen schlechte Gläser eine stärkere Trübung als gute (R. Weber).

Gute und mittlere Gläser werden durch den Gebrauch, insbesondere auch durch Behandeln mit warmem Wasser, mit der Zeit besser.

S. u. a. die Abhandlungen von Warburg u. Ihmori, Mylius u. Förster, R. Weber, E. Pfeiffer, Schott, F. Kohlrausch in Wied. Ann., Ber. d. Deutsch. Chem. Ges., ZS. f. Instr.-Kunde, ZS. f. Analyt. Chem., ZS. d. Vereins z. Beförd. d. Gewerbfleifses. Eine Literaturzusammenstellung z. B. bei Kohlrausch, Wied. Ann. 44, 577. 1891.

5. **Physikalische Eigenschaften verschiedener Gläser.** Von einheitlicher Beschaffenheit moderner Glassorten kann bei deren sehr verschiedener Zusammensetzung nicht mehr die Rede sein, selbst wenn man von den specifisch optischen Gläsern absieht. Die folgenden Zahlen bedeuten die Grenzen der Eigenschaften von Gläsern für gewöhnliche Zwecke; in Klammern sind extreme Werte angegeben.

Dichtigkeit	$s =$	2,4	(2,4)	bis	2,6	(5,9)
Kub. Temp.-Ausd.-Koeff.	$\alpha =$ 0,0000	18	(11)	„	31	(34)
Specif. Wärme	$c =$ 0,	18	(08)	„	21	(23)
Wärmeleitvermögen	$k =$ 0,00	18	(11)	„	20	(22)
Elast.-Modul	$E =$ 100 ×	59	(47)	„	75	(79) kg/mm²
Lichtbrechungsverhältnis	$n =$	1,51	(1,50)	„	1,53	(1,75)

Aus der bekannten Zusammensetzung des Glases kann man die Eigenschaften genähert nach dem Ausdruck

$$C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 \ldots$$

berechnen, wenn 1 Gew.-Teil Glas m_1, $m_2 \cdots$ Teile der einzelnen Stoffe enthält und wenn jede Substanz die Konstante C der folgenden Tabelle bekommt:

		SiO_2	B_2O_3	K_2O	Na_2O	CaO	BaO	ZnO	PbO	Al_2O_3
für α	0,000	008	001	085	100	050	030	018	030	050
für c	0,	191	237	186	267	190	067	125	051	207
für E	100 ×	65	20	71	100	100	100	15	47	160

für das specif. Volumen oder die reciproke Dichtigkeit:

$1/s$	0,	435	526	357	385	303	143	169	104	244.

Winkelmann u. Schott, Wied. Ann. 49, 401. 1893; 51, 697, 730. 1894; Winkelmann, 61, 105. 1897.

Ein gutes Thüringer Glas wird durchschnittlich etwa 0,70 SiO_2, 0,06 K_2O, 0,12 Na_2O, 0,10 CaO, 0,02 Al_2O_3 haben.

6. **Glas versilbern.** Recept von Böttger. 1) Man löst 5 gr Silbernitrat in destillirtem Wasser, versetzt mit Ammoniak, bis der Niederschlag beim Umrühren fast vollständig verschwindet, filtrirt und verdünnt die Lösung auf 500 ccm. 2) 1 gr Silbernitrat wird in etwas Wasser gelöst und in $^1/_2$ lit siedendes Wasser eingegossen. Dazu setzt man 0,83 gr Seignettesalz und läfst die Mischung kurze Zeit sieden, bis der entstandene Niederschlag grau aussieht. Die Lösung wird heifs filtrirt. Die Lösungen halten sich im Dunkeln einige Monate.

Die gut (mit Salpetersäure, Ätzkali, Alkohol) gereinigte Glasfläche

wird in einem Gefäfs mit einer einige mm hohen Schicht aus gleichen Raumteilen beider Lösungen bedeckt oder noch besser nach unten gerichtet in dieses Gemisch eingesenkt. Nach einer Stunde ist die Reduktion beendigt, die Platte wird abgespült, die Operation erneuert u. s. f., bis die genügende Dicke der Silberschicht erreicht ist. Nach dem Trocknen kann man die Silberfläche mit dem Ballen der Hand vorsichtig poliren. Soll das Silber als Belegung auf der Rückfläche dienen, so ist das Poliren natürlich überflüssig. Man mag in diesem Falle die Operation auch beschleunigen dadurch, dafs man die zweite der obigen Flüssigkeiten vor der Mischung auf etwa 70° erwärmt. Zum Schutz kann dann das Silber mit einem Lack überzogen werden; dünne Spiegel verziehen sich allerdings hierdurch leicht.

Andere Recepte, mit Anwendung von Zucker- und (kohlensäurefreier!) Alkalilösung z. B.: Martin, Pogg. Ann. 120, 335. 1863; Lohse, Jahrbuch für Photographie, 1887.

7. **Glas platiniren.** Nach Kundt: 3 gr Platinchlorid, in 10 ccm abs. Alkohol gelöst, werden mit 30 ccm koncentrirter alkoholischer Lösung von Borsäure versetzt. Hierzu kommt die doppelte Menge einer Mischung von venetianischem Terpentin und Lavendelöl, je nach der beabsichtigten Dickflüssigkeit in verschiedenem Verhältnis. Für optisch brauchbare Spiegel wird ein Tropfen von mäfsig dünnflüssiger Lösung aufgebracht und eine zweite Glasplatte aufgelegt, so dafs sich zwischen beiden eine dünne Flüssigkeitsschicht bildet. Man zieht die Platten von einander ab und erwärmt langsam in einem vorn offenen Muffelofen zu ganz schwacher Rotglut.

Um Glas zu löten, bestreicht man es mit dickflüssiger Lösung und erwärmt über der Flamme langsam zur Rotglut. Das eingebrannte Platin wird galvanisch verkupfert und kann dann mit Zinn gelötet werden.

Auch versilbertes Glas läfst sich nach Einbrennen des Silbers und Verkupfern löten, der Zusammenhang ist aber weniger fest (Röntgen).

8. **Glas blasen.** Eingehende Anweisung z. B. in Ebert, Anleitung zum Glasblasen, Leipzig 1895. Im allgemeinen ist folgendes zu beachten. Das Aufblasen oder Ausziehen wird in der Regel nach dem Entfernen aus der Flamme ausgeführt. — Das Anwärmen ist auf eine beträchtliche Strecke auszudehnen; die Gefahr des Zerspringens pflegt vorüber zu sein, sobald das Glas die Flamme färbt. — Dünnere Röhren biegt man in der rufsenden Flamme (Fischschwanzbrenner); dickere müssen während des Biegens durch Blasen geformt werden. — Zusammengeschmolzene verschiedene Glasstücke sind einige Zeit in der Flamme gut zu „verblasen", so dafs keine scharfe Berührungsfläche bleibt, und nachher in der leuchtenden Flamme zu kühlen, bis sie schwarz werden. — Für Arbeiten an dünnen Stücken ist der Bunsenbrenner oft bequemer als die Gebläselampe. — Platin wird durch Vermittlung von „Einschmelzglas" (Bleiglas) eingeschmolzen; Jenaer Thermometerglas XVI verträgt direktes Einschmelzen. Das Kühlen von Stücken mit eingeschmolzenem Platin, für welches die

rufsende Flamme zu vermeiden ist, kann über dem Cylinder eines Argandbrenners geschehen. — Feine Löcher lassen sich in dünnwandiges Glas mit einer zugespitzten glühend gemachten Lichtkohle drücken; Dvorák.

9. **Glas und Metall zeichnen.** Vorübergehend zeichnet man mit Glastinte, die vor dem Gebrauch aufgeschüttelt wird oder mit den blauen Fettstiften von Joh. Faber, dauernd mit „Diamanttinte" oder mit dem Schreibdiamant, wobei aber bei Glas ein Schneiden, welches leicht mit der Zeit oder bei Erschütterungen zu Sprüngen führt, vermieden werden mufs. Über Glasteilen s. S. 88.

10. **Glas schneiden.** Der Schneiddiamant ist auf seine richtige Stellung auszuprobiren und mit geringem Druck gut parallel zu führen. Weite Glasröhren schneiden sich am besten mit dem Röhrendiamant von innen. Enge Röhren ritzt man mit dem Glasmesser und bricht sie nachher. Mit dem Brechen soll bei Platten wie bei Röhren thunlichst eine auseinanderziehende Kraft verbunden werden. — Sprengkohle soll nicht viel Asche geben. Sie wird stets etwas vor den Sprung, den man fortführen will, gehalten.

11. **Metalle amalgamiren.** Zink wird in Salzsäure, Kupfer und Messing in verdünnter Salpetersäure mit einer metallischen Oberfläche versehen und dann in Quecksilber getaucht oder mit solchem eingerieben. Nachher wäscht man mit Wasser und entfernt ev. überschüssiges Quecksilber. Statt einzureiben kann man in eine etwas saure Lösung von Quecksilber-Chlorid bez. Nitrat eintauchen.

Um Eisen zu amalgamiren, verzinnt man es zuerst in der Hitze.

Platin, ganz frisch gereinigt, amalgamirt sich häufig schon beim Eintauchen in Quecksilber, sonst bringt man es als Kathode in eine Lösung von Quecksilbernitrat oder wendet Natriumamalgam an.

12. **Löten.** Bei dem gewöhnlichen Löten ist besonders die vorgängige Entfernung des Oxyds durch Benetzen mit Lötwasser etc. und Erhitzen, sowie das Ruhighalten während des Erstarrens zu beachten. Dünne Körper verzinnt man durch Eintauchen in einen Fingerhut mit geschmolzenem Zinn. Das Lötwasser nachher abspülen! Salmiakpulver, Stearin oder Kolophonium können einigermafsen das Lötwasser ersetzen. Die Schneide eines Lötkolbens wird heifs auf einem Stück Salmiak gerieben.

Mit Gold löten. Ein Stückchen Goldblatt oder Golddraht wird mit etwas Boraxpulver zwischen den zu verlötenden Flächen in der Stichflamme zum Schmelzen gebracht.

13. **Platin schweifsen.** Die zu verbindenden Stückchen werden in Berührung mit einander (zwei Drahtenden etwa einmal umeinander gewickelt, oder ein Draht durch ein oder zwei Löcher in einem Blech durchgesteckt) in der Spitze der Gebläseflamme weifsglühend gemacht und auf einer dicht darunterstehenden blanken Eisenfläche durch einen oder zwei kurze Schläge mit einem kleinen Hammer vereinigt.

Zusammenschmelzen kann man Platinstückchen in der Stichflamme des Sauerstoffgebläses. Platin und Kupfer lassen sich in der gewöhnlichen Gebläseflamme leicht haltbar zusammenschmelzen.

14. **Stahl härten.** Der zur Kirschrotglut gleichmässig und rasch erwärmte Stahl wird in Wasser oder Öl abgelöscht; Einreiben mit Seife vermindert das Oxydiren. Gestreckte Stücke sind, damit sie sich nicht verwerfen, longitudinal einzusenken. Um glasharten Stahl anzulassen, kann je nach dem gewünschten Grade siedendes Wasser, heifses Öl oder langsam die Flamme gebraucht werden, in welcher die Anlafsfarbe (gelb bis blau) den Grad des Anlassens giebt. (Vgl. Holborn, ZS. f. Instr. 1891, 114.)

15. **Metalle ausglühen.** Dünne Drähte soll man ohne Spannung in oder über eine kleine Flamme halten, ev. auf eine Röhre gewickelt erhitzen. Ein bequemes Mittel ist unter Umständen der elektrische Strom. Oxydirbare Metalle glüht man im bedeckten Gefäfs unter einem Strom von Kohlensäure oder Wasserstoff. Platin darf nicht in die rufsende Flamme und im Bunsen-Brenner nicht dauernd in den unteren Kegel kommen, der unverbrannten Kohlenstoff enthält!

16. **Magnetisiren. Entmagnetisiren.** Kurze Stäbe hält man zum Magnetisiren zwischen die Pole eines Hufeisenmagnets und hebt sie parallel den Kraftlinien heraus. Längere magnetisirt man durch Streichen oder mittels Einlegens in oder Durchziehens durch eine Stromspule. Plötzliches Unterbrechen des Stromes, während der Stab in der Spule liegt, ist zu vermeiden. Entmagnetisiren kann man kleine Stücke durch Rotation zwischen den Polen eines Magnets oder ruhend zwischen den Polen eines rotirenden Magnets (Centrifugalmaschine), indem man sie während der Bewegung langsam entfernt. Oder man behandelt die in einer Spule liegenden Stücke mit kräftigen Wechselströmen, welche man durch allmähliches Einschalten eines Flüssigkeitsrheostaten bis auf Null abschwächt.

17. **Schleifen und Poliren.** Das Schneiden des Körpers geschieht mit einem Schmirgeldrahte oder mit der Laubsäge, das Abschleifen auf einem Stein oder einer Glasplatte bei harten Körpern mit Schmirgel, bei weicheren mit Bimstein oder blofs auf mattem Glase. Polirt wird mit Englisch Rot, Tripel oder Zinnasche, oder bei ganz weichen Körpern ohne Polirmittel, auf einer mit Leinwand oder Papier stramm bezogenen Glasplatte thunlichst mit gerader Führung des Körpers, deren Richtung man oft wechselt. Als Schleif- oder Polirflüssigkeit dient, wenn Wasser den Körper angreift, Alkohol. Den Finger mag man im letzteren Falle mit Kautschuk bedecken. Englisch Rot oder Tripel wird trocken angewandt. — Krystallen für optische Untersuchung gibt man zuerst eine oberflächliche Politur, um unter dem Polarisationsapparat (**70**) zu erkennen, ob die Platte richtig orientirt ist. Andernfalls korrigirt man die Flächen, bis die richtige Richtung erzielt ist, und polirt nach vollständigem Eben- und Fein-Schleifen fertig.

Glasschliffe, z. B. Glasstöpsel lassen sich mit feinem Schmirgelpulver, welches mit etwas Wasser zwischen die Flächen gebracht wird, durch gleichmäfsiges Drehen unter mäfsigem Druck oft verbessern.

18. **Rezepte für Galvanoplastik,** auf 1 Liter Wasser berechnet. Die Stromstärken gelten als Stromdichten auf 1 dm^2.

Vergolden. $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ Am; 10 gr Goldchlorid, 20 gr Cyankalium oder 1,5 gr Goldchlorid, 1 gr Cyankalium, 15 gr kryst. Natriumsulfit, 50 gr kryst. Natriumphosphat.

Versilbern. 0,3 bis 0,6 Am; 46 gr Kaliumsilbercyanid, 12 gr Cyankalium.

Verkupfern. 0,4 bis 0,5 Am; 20 gr kryst. Kupferacetat, 20 gr Cyankalium, 17 gr Soda, 25 gr kryst. Natriumsulfit.

Vernickeln. $\frac{1}{2}$ bis 1 Am; 70 gr kryst. Ammoniumnickelsulfat, 25 gr Ammoniumsulfat, 5 gr Citronensäure.

Verplatiniren (blank). 510 gr Soda, 250 gr Citronensäure in 1 Liter Wasser gelöst. In die heifse Lösung wird Platinsalmiak eingetragen, der aus 37 gr Platinchlorid gefällt ist. Die Elektrolyse geschieht bei etwa 80°.

Überziehen von Metallen mit Platinschwarz. Man bringt das Metall (Platin oder Silber) in eine verdünnte, mit etwas Salzsäure versetzte Lösung von Platinchlorid, entweder als negative Elektrode eines Stromes, oder einfacher, indem man das Blech unter der Flüssigkeitsoberfläche mit Zink berührt.

Nach Lummer und Kurlbaum wird 1 Teil Platinchlorid in 30 Teilen Wasser unter Zusatz von 0,008 Teilen Bleiacetat angewandt, wodurch ein guter schwarzer Überzug entsteht. Die Stromdichte soll etwa 0,03 Am/cm^2, betragen; auch ohne Strommessung erkennt man die richtige Stromstärke an einer Gasentwicklung von mäfsiger Stärke. 5 bis 10 min Strom wird ausreichen.

19. **Holz etc. paraffiniren.** Das Holz wird, in Paraffin untergetaucht, mit dem letzteren erheblich über den Siedepunkt des Wassers (etwa auf 140°) so lange erhitzt, bis das Entweichen von Gasblasen aufhört. Alsdann läfst man so langsam erkalten, dafs der Luftdruck Zeit hat, die Holzporen mit Paraffin zu füllen. So behandeltes Holz isolirt auch statische Elektricität. Papier zieht man langsam durch das heifse Paraffin (über 100°! sodafs zugleich das Wasser verdampft) und läfst während des Erkaltens den Überschufs abtropfen. — Über Hygroskopie des Holzes s. auch **21.**

20. **Cocon abspulen.** Der Cocon wird etwa 10 min in heifses Wasser untergetaucht, damit der Klebstoff sich auflöst, dann entfernt man, den Cocon in der Hand drehend, die oberflächliche lose Seide, an welche der eigentliche Coconfaden sich anschliefst. Man spult den auf erneuertem heifsen Wasser schwimmenden Cocon auf ein Röllchen ab, welches auf einen konischen Stab (Stahlfederhalter) gesteckt ist. Den Faden läfst man auf eine so grofse Strecke durch die Luft gehen, dafs er trocken aufläuft, weil sonst die Fäden zusammenkleben. Der Coconfaden wird nach innen

feiner; um über verschiedene Stärken zu verfügen, spult man die Teile auf mehrere Rollen. Ein während des Abspulens verlorenes Ende sucht man durch leichtes Schlagen mit einem Stäbchen wieder zu finden.

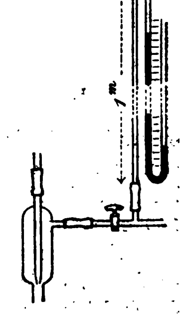
Über das Aufhängen am Cocon s. **55a.**

21. **Quarz schmelzen.** Ein Krystall wird durch Erhitzen und Ablöschen rissig gemacht; die Teile lassen sich im Knallgasgebläse zusammenschmelzen und formen. Aus Stäbchen können auch Röhren zusammengesetzt werden. Die verschwindende Wärmeausdehnung so behandelten Quarzes gestattet dabei auch schroffes Kühlen. — Vgl. Dufour, Gautier, Le Chatelier in C. R. 130. 1900.

Quarzfäden. Boys, Phil. Mag. (5) 45, 489. 1887. Man befestigt Quarzstäbchen an einem Pfeil aus Holz oder aus einem Strohhalm mit einer Nadelspitze durch Kitt oder durch eine Klammer. Darauf wird die Mitte des Stäbchens im Knallgasbrenner geschmolzen und der Pfeil von einer am Blastisch im Schraubstock befestigten Armbrust aus gröfserer Entfernung in ein Brett abgeschossen, nachdem der Quarz weich geworden ist. Die hintere Hälfte des Stäbchens hält man fest. Auch kann man mit der Stichflamme Fäden direkt weg- und an ein hintergestelltes Stück Sammet anblasen (Nichols). Quarzfäden sind nicht hygroskopisch und besitzen bei grofser Festigkeit eine sehr geringe elastische Nachwirkung. Versilberte (Nr. 6) oder hygroskopisch gemachte Fäden kann man als leitende Aufhängung für Elektrometernadeln benutzen (Himstedt, Dolezalek).

22. **Luftpumpen- und Hahn-Fett.** Talg mit Schmalz oder Olivenöl; oder Wachs mit Knochenöl, zu passender Konsistenz gemischt. Ein Gemisch aus Wachs und Vaselin hat den Vorteil, wenig Dämpfe abzugeben, dichtet aber auf die Dauer weniger gut.

23. **Wasserluftpumpe.** Hat die Wasserleitung grofsen Druck, so wendet man die Strahlpumpe an, mufs aber auch dafür sorgen, dafs der Druck nicht etwa durch eng gebohrte Hähne aufgehoben wird. Die Strahlpumpe kann bei Zimmertemperatur bis auf 20 mm Quecksilberdruck auspumpen. Absätze aus kalkhaltigem Wasser an der Spitze können die Wirkung beeinträchtigen; man entfernt dieselben mit Salzsäure. Bei geringem Druck, wenn aber Gefälle zur Verfügung steht, dient die Bunsen'sche Tropfenpumpe (Fig.). Für ein langsam gleichförmiges Saugen, z. B. beim Austrocknen von Röhren, ist die letztere überhaupt sicherer und ökonomischer. Jede Strahlpumpe läfst sich durch ein Abfallrohr, welches durch einen Schlauch mit der Austrittsöffnung des Wassers verbunden wird, zeitweilig in eine Tropfenpumpe verwandeln.



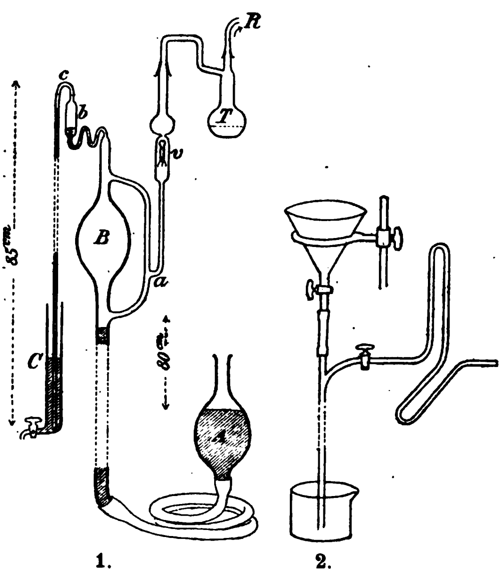
Um bei dem Abstellen des Zuflufshahnes das Eindringen von Wasser in den evakuirten Raum zu vermeiden, soll an dem Luftrohr ein Hahn sitzen, den man vor dem Abstellen schliefst.

Zur Beurteilung des Vakuums kann an die Pumpe ein käufliches

Metallmanometer oder ein selbstzufertigendes Quecksilbermanometer (Fig.) angeschlossen sein.

24. **Quecksilberluftpumpe.** Hahnlose Pumpe (Geissler-Töpler). Während des Hebens tritt das Quecksilber aus *A*, den Kanal nach dem Recipienten *R* bei *a* absperrend, aber durch das Schwimmventil *v* am Eindringen in *R* verhindert, durch *B* und *b*, die Luft in das Barometer *c* schiebend. Man läfst in *C* überfliefsen, bis die Luft entwichen ist, und senkt, worauf schliefslich das in *B* entstandene Vakuum sich mit dem Recipienten verbindet. Der Austrockner *T* enthält koncentrirte Schwefelsäure oder besser Phosphorsäureanhydrid.

Zu Anfang und nachdem bereits ein hohes Vakuum entstanden ist, soll behutsam gehoben werden; im letzteren Fall wird besonders die Biegung bei *c* leicht durch den Stofs des Quecksilbers verletzt. Zum Schlufs genügt es, die Luftbläschen nur in *b* zu treiben und von dort nur selten weiter zu befördern.



1. 2.

Solange noch viel Luft aus dem Recipienten zurücktritt, mufs auch vorsichtig gesenkt werden, um erstens heftige Stöfse des über *a* in *B* geschleuderten Quecksilbers und zweitens das Aufstäuben der trockenen Phosphorsäure in die Pumpe hinein zu vermeiden.

Wenn eine Pumpe keine innere Trockenvorrichtung hat, so liegt die Ursache einer schlechten Wirksamkeit meistens an Feuchtigkeit über dem Quecksilber, die man häufig eben nur daran erkennt, dafs sie durch Auspumpen nicht zu beseitigen ist. Man mufs dann wiederholt mit trockener Luft füllen oder auch die Pumpe entleeren und mit einem Luftstrom trocknen und das Quecksilber auf etwa 140° erwärmen. Die in die Pumpe eintretende Luft soll stets getrocknet sein.

Phosphorsäure trocknet nachhaltig und selbst, wenn sie bereits feucht erscheint, oft noch merklich vollkommen. Das Trocknen geschieht aber durch Diffusion, also, besonders in dichterer Luft, langsam. Selbst nachdem stark evakuirt ist, bleibt über dem Trockenmittel Luft von der Spannkraft des anderswo vorhandenen Wasserdampfs, der hindurch diffundiren mufs. Man hat also, alles verbunden, diesem Vorgange Zeit zu lassen.

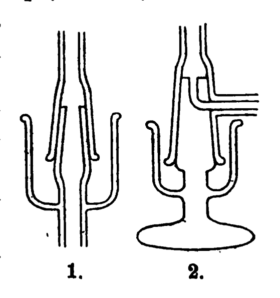
Kleine Volumina pumpt man bequem mit der kontinuirlich wirkenden Sprengel'schen Tropfenpumpe aus, welche aus einem Glastrichter mit Hahn und einem $1^1/_2$ m langen Rohr von 3 mm lichter Weite mit Seitenansatz leicht zu improvisiren ist (Fig. 2).

Biegsame Verbindungen bilden die Kundt'schen Federn aus dünnen Glasröhren mit nach zwei Seiten ausgebogenen Teilen von etwa $^1/_3$ m Länge (Fig. 2). Man achte auf etwaige Undichtheit durch feine Luftröhren in der Rohrwandung. Zum Ansetzen dient Siegellackkittung nicht zu kurzer Berührungsflächen, z. B. zweier ineinander geschobener Röhren; oder der gefettete Glasschliff, dessen Dichtheit verbürgt ist, wenn er klar durchsichtig erscheint.

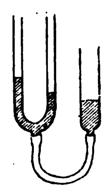
Glasröhren, welche evakuirt abgeschmolzen werden sollen, sind, um nicht eingedrückt zu werden, vorher an der betr. Stelle auf 2 bis 3 mm Lumen zu verjüngen.

Selbstthätig wirkende Pumpen u. A. von Raps, Neesen, Kahlbaum.

25. Quecksilberdichtungen. Um einen Glasschliff ohne Fett zu dichten, wird hinter den Spitzkonus ein kleines Gefäfs angeschmolzen, welches man nach dem Aufsetzen und Andrücken des Hohlkonus bis mindestens etwa 6 mm über den Rand des Hohlkonus mit Quecksilber füllt. Passen die Flächen einigermafsen aufeinander, so leistet der Kapillardruck des Quecksilbers dem Atmosphärendruck Widerstand (Lehmann). Ähnlich können verbindende Hähne hergestellt werden (Fig. 2, Kahlbaum, ZS. f. Instr. 1894, 21. S. daselbst auch die Doppelschliffe mit zwei auswechselbaren Ansätzen).



Eine Rohrverbindung, die durch Quecksilber abgesperrt werden kann, gibt z. B. ein gebogenes Rohr mit Ansatzsteigrohr, welches unten in ein Gefäfs mit Quecksilber taucht oder durch einen biegsamen Schlauch mit einem Quecksilberbehälter verbunden ist (Fig.). Durch Heben oder Senken des Quecksilbers kann man absperren oder verbinden. An evakuirten Räumen mufs eine Steighöhe von Barometerlänge verfügbar sein.



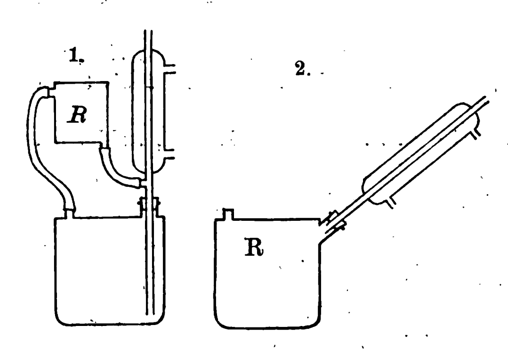
26. Motoren. Wassermotoren. Die Zuleitung und Hahnbohrung der Wasserleitung mufs genügend weit sein, um bei dem Laufen keinen Druckverlust zu bewirken. Man hat Motoren mit Kolbendruck und mit Stofskraft. Die letzteren, verbreiteteren betreffend, sei bemerkt, dafs dieselben unökonomisch arbeiten, wenn man das Wasser aus weiter Spitze ausströmen läfst und den Zuflufs mit dem Hahn der Wasserleitung abschwächt. Enge Spitze und weiter Hahn nutzen den Druck aus. Hat die Wasserleitung geringen Druck, so kann für geringe Kräfte ein kleines oberschlächtiges Mühlrad brauchbar sein.

Elektromotoren. Bei der Bestellung ist die kleinste Spannung

anzugeben, mit der der Motor laufen soll. Für die gebräuchlichen Lichtleitungsspannungen von 65, 110 und 220 Vt sind Wicklungen meist vorrätig. Zu kleine Normalspannung des Motors ist durch Vorschaltung von Widerstand korrigirbar, bedingt dann aber Energievergeudung.

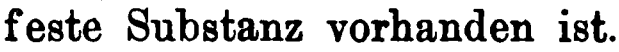
Heifsluftmotoren. In Ermangelung elektrischen oder Wasserdruck-Antriebes wird vielfach der Heinrici'sche Heifsluftmotor gebraucht, der freilich mehr Raum und einige Zeit zum Anheizen beansprucht.

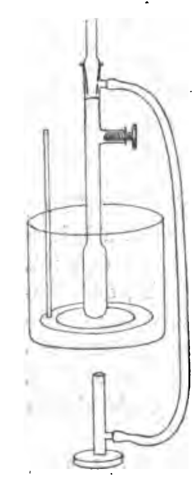
27. **Konstante Temperaturbäder.** Höhere Temperaturen liefert dauernd eine siedende Flüssigkeit (Tab. 12) oder besser ihr Dampf entweder in dem Siedegefäfs oder in einem anderen, von dem Dampf durchspülten oder umspülten Raum *R*. Ein Rückflufskühler mit hinreichend weitem Rohr führt ev. den überschüssigen Dampf zurück. Schemata siehe neben.



Für hochsiedende Flüssigkeiten genügt oft ein Rückflufskühler in Luft; vgl. die zweite Figur in **46.**

Tiefere Temperaturen: 0° Gemisch von Eis und Wasser; —21° Gemisch von Kochsalz mit etwa 4 Teilen zerstofsenem Eis oder besser Schnee; —79° Äther mit fester Kohlensäure, die letztere im Überschufs; —191° siedende flüssige Luft im Dewar'schen Gefäfs. Durch das Abdestilliren des leichter flüchtigen Stickstoffs steigt der Siedepunkt bis —186°. Die Mischungen müssen gerührt werden, besonders wenn wenig feste Substanz vorhanden ist.





Mittlere Temperaturen zwischen derjenigen des Zimmers und dem Siedepunkt der Bad-Flüssigkeit hält man durch Regulirung des Heizgas-Verbrauchs durch einen Thermostaten konstant. Derselbe drosselt selbstthätig den Gaszuflufs, sobald eine bestimmte Temperatur erreicht ist, durch eine sich ausdehnende und dadurch den Weg sperrende Flüssigkeit, deren Vorratsgefäfs sich in dem zu regulirenden Raume befindet. Eine kleine seitliche Öffnung hindert das vollständige Verlöschen der Flamme. Schema eines Quecksilber-Thermostaten s. Fig.

Der Quecksilberstand mufs für verschiedene Temperaturen regulirbar sein. Die hierzu dienende Vorrichtung stellt der Seitenansatz mit verstellbarer Schraube vor. Andere Thermostaten bei Ostwald, Phys.-chem. Messungen, S. 60.

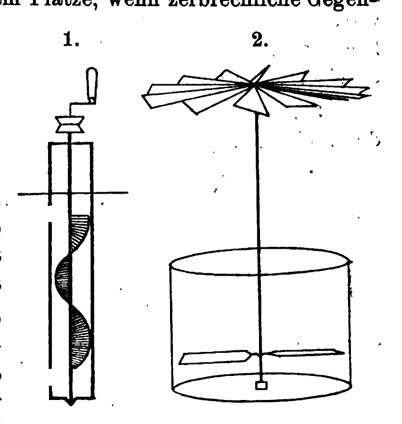
Temperaturen etwas über oder unter Zimmertemperatur lassen sich oft durch Nachwärmen mit der Hand oder Abkühlen mit einem an die Gefäſswand geklebten feuchten Flieſspapier erhalten.

Zu beachten ist, daſs das Verdunsten des Wassers aus einem nicht bedeckten Bad die Temperatur stark herabsetzen kann.

Flüssigkeiten für Bäder sind Wasser, Petroleum, Vaselinöl, konc. Lösungen von Chlorcalcium oder Chlorzink (bis etwa 130° brauchbar), geschmolzenes Palmin (bis 230°) oder Paraffin (bis 300°), geschmolzenes Kalium- oder Natriumnitrat oder ein Gemisch von beiden. Ein Gemisch aus gleichen Teilen schmilzt etwa bei 225° und ist bis 600° brauchbar.

28. Rührer. Der einfachste Rührer und viel öfter genügend, als die Mode glaubt, ist eine Feder oder dgl. Einen Ringrührer (Fig. vor. S. u. 49) biegt man aus einem dicken Draht oder einem Glasstab, indem man den gebogenen Ring flach klopft oder bei dem Glase erweicht und flach kneift. Oder man setzt den geraden Stiel aus Draht, Holz, Hartkautschuk an einen flachen Ring aus Blech, Glimmer, Federn etc. Der Stiel erhält nötigenfalls eine Führung.

Der Schraubenrührer (1) ist am Platze, wenn zerbrechliche Gegenstände im Gefäſs sind oder wenn ein Motor zum Rühren angewandt werden soll. Ein Rohr (Glas, Blech, im letzteren Falle vielleicht an eine Wand des Gefäſses angelötet) hat je eine untertauchende Öffnung unten und oben; eine Drehungsaxe trägt einen Schraubenflügel. Die Schraube saugt und stöſst die umgebende Flüssigkeit durch das Rohr. Oder man setzt Flügel (2) in das Gefäſs selbst ein, die, wenn ihre Drehungsaxe gut vertikal steht, sich mit geringer Reibung drehen, so daſs die Triebkraft eines Flügelrades mit untergestelltem Flämmchen genügt (Ostwald, Phys.-chem. Mess. S. 70). Um in einem hermetisch verschlossenen Gefäſs zu rühren, kann ein Stückchen Eisen am Rührer dienen, welches durch einen auſsen rotirenden Hufeisenmagnet gedreht wird (vgl. Forch, Wied. Ann. 55, 104. 1895).



29. Elektrische Heizung. Man leitet den Strom durch einen geeignet aufgewundenen Draht um den zu heizenden Raum herum. Die Drahtstärke etc. ist so zu wählen, daſs die verfügbare Spannung nicht ganz ausgenutzt wird, um durch Vorschalten von Widerstandsballast reguliren zu können. Nach den Enden einer Heizspule hin werden, wenn gleichmäſsige Heizung verlangt wird, die Windungen dichter gelegt werden müssen. Bis 600° ist Konstantandraht geeignet, der auf Thonrohre, z. B. auf Cylinder für galvanische Elemente gewickelt ist. Bis

1100 oder 1200° genügt Nickeldraht auf Porzellan oder Chamotte; höher hinauf Platiniridium. Die Isolirung geschieht mit Chamottemehl, welches mit Wasser versetzt auf die Windungen aufgetragen und dann hart gebrannt wird.

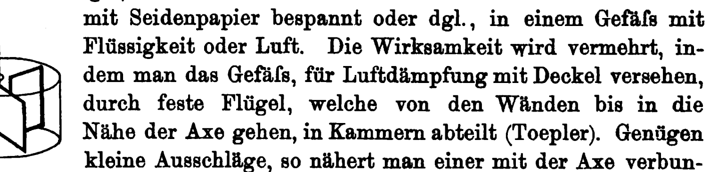
Vgl. Holborn u. Day, Wied. Ann. 68, 836. 1899.

30. **Zur Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine.** Der Kompressor ist gleich nach jedem Gebrauch auseinanderzunehmen und zu reinigen; der Gegenstromapparat, besonders die Kühlschlange vor und nach dem Gebrauch kräftig bis zur Trocknung auszublasen. Namentlich beim Beginn mufs, um Verstopfung des Apparats zu vermeiden, das Nadelventil gut arbeiten.

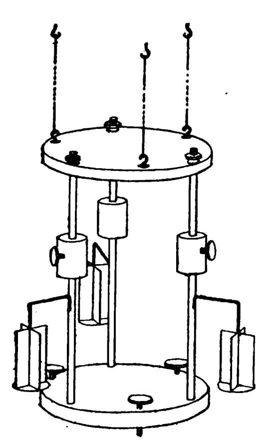
In einer lose bedeckten doppelwandigen Flasche mit evakuirtem Zwischenraum zwischen den versilberten Wänden (Dewar'sches Gefäfs) in Wolle verpackt, hält verflüssigte Luft sich längere Zeit. Die Gefäfse sind vor Verletzungen zu behüten, da der auf ihnen lastende Luftdruck ohnehin heftige Zertrümmerung bewirken kann.

31. **Kautschuk.** Die Haltbarkeit leidet besonders durch Ozon. Licht und harziges Holz sind nachteilig. Man bewahrt im Keller oder im verschlossenen Metall- oder Thongefäfs zusammen mit einer offenen Wasserfläche auf. Die Ausschwitzungen an neuem Hartkautschuk lassen sich durch Wasser oder Salzsäure beseitigen.

32. **Dämpfer.** Schwingungen um eine vertikale Axe dämpft man durch einen Flügel, bestehend aus dünnem Blech oder aus einem Rähmchen



mit Seidenpapier bespannt oder dgl., in einem Gefäfs mit Flüssigkeit oder Luft. Die Wirksamkeit wird vermehrt, indem man das Gefäfs, für Luftdämpfung mit Deckel versehen, durch feste Flügel, welche von den Wänden bis in die Nähe der Axe gehen, in Kammern abteilt (Toepler). Genügen kleine Ausschläge, so nähert man einer mit der Axe verbundenen vertikalen Scheibe eine feste Fläche (W. Thomson).



Elektromagnetische Dämpfung liefert ein Stück Kupfer an der Axe, dem man einen Magnet unterlegt oder noch besser die Pole eines Hufeisenmagnets von zwei Seiten nähert.

Vertikale Schwingungen werden z. B. durch einen mit dem Körper verbundenen Cylinder gedämpft, der sich in einem unten geschlossenen, nur wenig weiteren, mit Luft oder einer Flüssigkeit (Wasser, Glycerin) gefüllten Cylinder bewegt.

33. **Aufstellung in unruhigen Gebäuden** (Julius; Fig.). Man hängt die Bodenplatte mittels dreier Stäbe, die zur Regulirung des Schwerpunkts mit Laufgewichten versehen sind, an Stahldrähten trifilar auf. Die Horizontirung etc. geschieht durch Schraubenverstellung der Aufhängepunkte.

In drei Becher mit zäher Flüssigkeit (Öl, Glycerin) tauchen Dämpferkreuze mit Horizontalscheibe gegen vertikale Erschütterungen. Stellschrauben in der Bodenplatte gestatten ein zeitweiliges Feststellen auf einen nahe darunter befindlichen Tisch. Das Ganze mufs unter Umständen gegen die Luftströmungen eingebaut werden. — Die Anwendung beschränkt sich auf Instrumente, an denen man selten Manipulationen vorzunehmen hat. Vgl. Julius, Wied. Ann. 56, 151. 1895; ZS. f. Instr. 1896, 267.

Cailletet'sche Pumpe s. **36**; Thermometer in **39**; Lichtquellen in **59a**.

Über Destillation im Vacuum s. Anschütz, Bonn 1895. Über Werkzeuge, Konstruktionsteile, Verbindungen, Giefsen, Kitten, Metallbearbeitung etc. s. Lehmann, Physikalische Technik.

9. Herstellung von Lösungen.

Nach Gewichtsgehalt.

1. Man wägt die Menge K des Körpers ab und löst sie zum Gesamtgewicht L, dann ist K/L der Gehalt, 100 K/L der Procentgehalt.

Aus einer Lösung vom Gehalt p erhält man eine verdünntere vom Gehalt p', indem man das Gewicht K' der Lösung zum Gesamtgewicht $L' = K' \cdot p/p'$ verdünnt, oder wenn man zu K' das Gewicht $K'(p - p')/p'$ Lösungsmittel zusetzt (Schütteln nicht vergessen!).

Von Korrektionen kommt nur diejenige der Wägungen auf den leeren Raum herein, die man aus einer (genäherten) Kenntnis der specifischen Gewichte nach Tab. 1 ermittelt.

Zu beachten ist, dafs zur Wägung der gröfseren Menge der Lösung meistens eine weniger feine Wage genügt, als für den Körper. Ungleicharmigkeiten sind dann aber ev. durch Doppelwägung (**13** I) zu eliminiren.

2. Das zu K gr des Körpers zugesetzte Lösungsmittel kann, wenn sein specif. Gewicht Q bekannt ist, nach Volumen v cm^3 abgemessen werden. Dann ist $p = K/(K + v \cdot Q)$. Über Q bei Wasser s. Tab. 4.

3. Im Princip identisch mit 1. ist die Ermittelung der in einem Gewicht L einer Lösung enthaltenen Menge K durch Eindampfen oder chemische Analyse.

4. Das bekannte specif. Gewicht einer wässrigen Lösung liefert den Gehalt aus Tabellen. Die Angaben der specif. Gewichte beziehen sich auf Wasser teilweise von gleicher Temperatur ($s_{t/t}$), teilweise von 4° ($s_{t/4}$). Man reducirt nach der Beziehung $s_{t/4} = Q_t \cdot s_{t/t}$; Q ist die Dichtigkeit des Wassers (Tab. 4).

Um eine Lösung von einer Temperatur t auf t_0 zu reduciren, hat man $s_0 = s_t(1 + \alpha(t - t_0))$; vgl. **44** u. Tab. 12.

Der Gewichtsgehalt selbst hängt natürlich nicht von der Temperatur ab.

Gelegentlich wird anstatt des Gehaltes p in 1 (bez. 100) Teilen der Lösung der Gehalt $[p]$ in 1 (bez. 100) Teilen des Lösungsmittels angegeben. Es ist $[p] = p/(1 - p)$ bez. $[p] = p/(100 - p)$.

Über specifische Gewichte s. Tab. 3 u. 3a. Ausführlicher bei Gerlach, Salzlösungen, Freiberg 1859; ZS. f. Analyt. Chemie 8, 279. 1869; Hof-

mann, Tabellen für Chemiker (unter Beachtung des Druckfehlerverzeichnisses für die Temperaturen); Landolt und Börnstein, Tabellen; Kohlrausch und Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte Tab. 1a bis 1c. Den mittleren Ausdehnungskoefficienten α zwischen t u. t_0 s. z. B. bei Gerlach, Salzlösungen (l. c.); Kremers, Pogg. Ann. 105, 367. 1858; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt u. Börnstein, Tabellen; auch Tab. 3a.

Nach Gehalt in der Volumeinheit.

Der „Volumgehalt" wird als Gewicht q des gelösten Körpers, oder aber als Anzahl m der gelösten Moleküle (bez. Äquivalente) in der Volumeinheit angegeben. $1/m$ heifst molekulare Verdünnung der Lösung. Zu der Koncentration p nach Gewichtsverhältnissen besteht die Beziehung (s = specif. Gewicht der Lösung, A = Molekular- bez. Äquivalentgewicht des Körpers)

$$q = ps \qquad m = q/A = ps/A.$$

Wird p nach Procenten oder nach gr in 100 cm^3 gerechnet, m aber wie gewöhnlich nach gr-Molek./Liter, so kommt natürlich $m = 10 \cdot ps/A$.

5. Der Körper K wird zum Volumen V gelöst, dann ist $q = K/V$. Wegen der Volumänderung beim Lösen wartet man vor dem Ablesen oder dem endgiltigen Abgleichen des Volumens, bis alles gelöst ist, schüttelt auch vorher (überhaupt Schütteln nicht vergessen!).

Eine Normallösung von 1 gr-Mol./Liter wird durch Auflösen von A gr zu 1 l erhalten. Einen bekannten Krystallwassergehalt des Körpers rechnet man bei wässriger Lösung gleich mit in A. Beim Abwägen wird von A der Auftrieb in der Luft d. h. A mal die betr. Zahl aus Tab. 1 abgezogen. Über das specif. Gewicht von Normallösungen s. Tab. 3a.

Von einer koncentrirten Lösung geht man zu einer verdünnteren hier am bequemsten mit Pipetten u. dgl. über. Das Volumen v einer Lösung von der Koncentration q zum Volumen V verdünnt, gibt die neue Koncentration $q' = q \cdot v/V$.

Verdünnt man in der Weise, dafs zu einem Volumen v der Lösung das Volumen v_0 des Lösungsmittels gesetzt wird, so ist natürlich $q' = q \cdot v/(v_0 + v)$. Es sind also, um von q auf q' zu verdünnen, die Volumina Lösungsmittel : Lösung $= (q - q') : q'$ zu nehmen.

Diese Verdünnung durch ein abgemessenes Volumen Lösungsmittel bringt aber eine Korrektion mit sich, wenn Kontraktion bei der Verdünnung eintritt. Es sei s die Dichtigkeit der Originallösung q; q' sei die ohne Kontraktion berechnete neue Koncentration. Dann würde $s'' = 1 + (s - 1)q'/q$ die neue Dichtigkeit ohne Kontraktion sein. Ist die Dichtigkeit wirklich $= s'$, so hat man die richtige Koncentration $= q' \cdot s'/s''$.

Bei genauen Angaben hat man auch darauf zu achten, dafs der auf die Volumeinheit bezogene Gehalt durch die Ausdehnung mit der Temperatur etwas veränderlich ist, auch ist bei dem Auflösen oder Verdünnen die Temperatur zu beachten.

Praktische Bemerkungen auch über sehr verdünnte Lösungen bei Kohlrausch u. Holborn, Elektrolyte § 16 u. 17.

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

10. Wage und Wägung.

Die Wägung ermittelt die Masse eines Körpers. Als Einheit gilt das Gramm, die Masse eines Kubikcentimeters[1]) Wasser von + 4°.

Genau wie die Massen verhalten sich die durch die Erde auf sie ausgeübten Anziehungskräfte, die „Gewichte im leeren Raum". In der Luft verliert der Körper durch den hydrostatischen Auftrieb ein Gewicht gleich dem Gewicht der verdrängten Luftmenge. Da feste und tropfbare Körper mindestens 600 mal schwerer sind als Luft, so bleiben hier die relativen Fehler durch den Luftauftrieb kleiner als 1/600. Über die Reduktion der Wägung auf den leeren Raum vgl. **13**.

Bei dem fast immer gebrauchten Wägungsverfahren wird die gleiche Länge der beiden Wagearme, an denen Körper und Gewichtstücke wirken, vorausgesetzt. Vgl. **12**.

Die folgenden Vorschriften zur Behandlung einer Wage schliefsen sich an die zur chemischen Analyse gebräuchliche Form an.

I. Aufstellung und Prüfung der Wage.

Schneiden und Pfannen müssen ganz rein sein. Sie werden mit einem Pinsel von Staub gereinigt oder mit einem Leder geputzt. Ein kleines Stäubchen oder Fäserchen kann die Einstellungen verderben.

Man stellt mit den Fufsschrauben das Senkel oder die Libelle ein; besitzt die Wage keine solche Vorrichtung, so setzt man eine Dosenlibelle auf den Fufs der Wage oder nivellirt nach einem Senkel, welchem man den arretirten Zeiger parallel stellt.

Nun löst man die Arretirung aus, korrigirt ein etwaiges gröberes einseitiges Übergewicht und überzeugt sich, dafs alsdann die Wage eine stabile Gleichgewichtslage hat. Sollte das Gleichgewicht labil sein (die Wage „umschlagen"), so wird zunächst das in der Mitte befindliche Laufgewicht herabgeschraubt, bis dies beseitigt ist.

---

1) Das gesetzlich festgelegte Gramm ist nach neueren Ermittelungen die Masse von 1,00005 cm^3 Wasser von 4°.

Die Empfindlichkeit der Wage (vgl. auch **11**) wird durch das Hinauf- oder Herabschrauben des genannten Laufgewichtes regulirt; sie läfst sich aus der Schwingungsdauer beurteilen, deren zweiter Potenz sie für eine bestimmte Wage proportional ist. Die Dauer einer Schwingung ist bei der langarmigen Wage etwa zwischen 10 und 15 sec, bei der kurzarmigen zwischen 6 und 10 sec zu wählen. Eine gröfsere Schwingungsdauer verursacht Zeitverlust, stärkere Dämpfung und meistens Unregelmäfsigkeiten der Einstellung, welche die gröfsere Empfindlichkeit nutzlos machen.

Nun wird mittels der für diesen Zweck vorhandenen Einrichtung (Laufgewicht am Ende des Balkens; Durchbohrung des vertikalen Laufgewichtes; drehbarer Arm u. s. w.) bewirkt, dafs die unbelastete Wage um den mittelsten Teilstrich nach beiden Seiten gleich weit schwingt. Eine Unsymmetrie von einigen Zehnteln eines Skalenteils, die mit der Zeit auch immer wieder entstehen kann, mag man mit den Fufsschrauben korrigiren, deren eine man um gleich viel verkürzt, wie man die andere verlängert.

Prüfung der Wage. In erster Linie ist zu fordern, dafs die Wage, wiederholt arretirt und ausgelöst, dieselbe Einstellung zeigt und dafs die Schwingungen nur langsam abnehmen. Fehlerquellen können von dem Lockern einer Verschraubung am Wagebalken herrühren, oder von einer Unsauberkeit, ungeeigneter Gestalt oder Verletzung der Schneiden oder Pfannen.

Arretirt soll der Zeiger gerade über dem mittleren Teilstrich stehen; die Arretirung soll den Balken beiderseitig gleich loslassen.

Die Gleicharmigkeit prüft man durch beiderseitiges Aufsetzen von hinreichend grofsen Gewichtstücken, welche sich das Gleichgewicht halten: ihre Vertauschung darf die Einstellung nicht ändern. Über die Messung der Ungleicharmigkeit s. **12.**

Es ist endlich nicht überflüssig, zu prüfen, ob ein Gewicht auf jeder Stelle der Wagschale gleich wirkt. An Brücken- und Tafel-Wagen können grobe Verstöfse hiergegen vorkommen; kleinere auch bei der gewöhnlichen Wage, wenn nämlich die Schale ohne Zwischengehänge an der Schneide hängt, was fehlerhaft ist.

Einem rauhen Gange der Reiterverschiebung oder der Arretirung hilft man durch Abwischen mit einem Läppchen eventuell mit einer Spur Petroleum nach. Die Reiterverschiebung soll durch Anschläge vor dem Anstossen an den Balken geschützt sein.

Als Gröfse des Skalenteils am Zeiger empfiehlt sich etwa das Millimeter. Zur Vermeidung der Parallaxe beim Ablesen spiele die Zeigerspitze dicht vor oder besser über der Teilung. Eine vor der Teilung fest angebrachte Lupe, etwa eine auf die Glaswand geklebte Linse von geeigneter Brennweite erleichtert das Ablesen.

Dafs die beiden gewöhnlichen Schalen einander genau gleich sind, ist nebensächlich; eine etwa vorhandene kürzere Wagschale aber soll einer der anderen an Gewicht genau gleich sein.

Gebrauch der Wage. Der Tisch der Wage soll vor Erschütterungen vom Fufsboden geschützt stehen, auch vor Verbiegungen durch Auflegen des Arms gehütet werden; die Wage ist ferner vor Ungleichheiten der Erwärmung zu bewahren. Gegen Rost oder Luftfeuchtigkeit kann unter Umständen ein Gefäfs mit Ätzkalk oder Chlorcalcium im Wagekasten angebracht sein. Das Auflegen von Gewichten geschieht nur bei arretirter Wage. Pendelschwingungen der Schalen während der Wägung können zu Fehlern Veranlassung geben.

Bei der endgiltigen Wägung sind Luftströmungen, die auch z. B. durch geringe Erwärmung des zu wägenden Körpers entstehen können, zu vermeiden. Ein Wagekasten wird selbstverständlich geschlossen. Grobe Fehler können, wenn Glasteile des Wagekastens frisch geputzt sind, durch elektrische Ladungen entstehen.

Einen gegebenen abzuwägenden Körper legt man gewöhnlich links; soll dagegen eine bestimmte Menge, etwa Flüssigkeit oder Salz hergestellt werden, so pflegt die rechte Schale bequemer zu sein.

Spiegelablesung. Für die feinsten Wägungen benutzt man wohl an Stelle des Zeigers einen an dem Wagebalken angebrachten Spiegel, dessen Einstellung mit einem Fernrohr an einer Skale abgelesen wird. Vgl. **25** u. **26**.

Über äufserst empfindliche Formen von Wagen vgl. Warburg und Ihmory, Wied. Ann. 17, 483. 1886.

II. Wägungsverfahren.

Es ist genauer, die Wage im schwingenden Zustande zu beobachten, als in der Ruhe. Die den Körper äquilibrirenden Gewichtstücke findet man durch allmähliches Einschliefsen in engere Grenzen und kann, wenn man über beliebig kleine Gewichtstücke oder über eine Reiterverschiebung verfügt, hierbei so weit gehen, dafs die Schwingungen nach beiden Seiten von dem Nullpunkte gleich grofs sind.

Interpolationsverfahren. Der häufigen Regulirung des mit der Zeit veränderlichen Nullpunktes und dem Ausprobiren der vollkommenen Gleichheit ist oft das Beobachten des zeitigen Nullpunkts und das Interpoliren des abgleichenden Gewichtes aus zwei Einstellungen bei verschiedener Belastung vorzuziehen.

Bestimmung des Nullpunktes, d. h. des Punktes der Skale, auf welchen der Zeiger der unbelasteten Wage in der Ruhe zeigen würde. Ein Reiter ist dabei auf den Nullstrich der Balkenteilung zu setzen oder auch, wenn man sich überzeugt hat, dafs er hier keinen Einflufs ausübt, abzuheben. Man findet den Nullpunkt aus einigen Umkehrpunkten des schwingenden Zeigers. Die Schwingungsweite mag etwa 2 bis 5 mm betragen. Für mäfsige Genauigkeit nimmt man das Mittel aus zwei Umkehrpunkten oder bei stärkerer Dämpfung aus dreien, wobei zunächst aus Nr. 1 und 3 das Mittel genommen und dieses mit Nr. 2 zum Hauptmittel vereinigt wird.

Für genauere Zwecke wird man nach folgendem Schema etwa fünf Umkehrpunkte nehmen, das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen auf der einen Seite d. h. aus Nr. 1, 3, 5, und aus denen auf der anderen Seite d. h. aus Nr. 2, 4 bilden und aus diesen beiden Zahlen wiederum das Mittel. Damit man nicht rechts und links unterscheiden mufs, bezeichnet man den mittelsten Teilstrich der Wage nicht mit Null, sondern mit 10.

Beispiel.	Umkehrpunkte			Mittel	Nullpunkt
links	10,9	10,7	10,6	10,73	9,74
rechts	8,7	8,8		8,75	

Um aus zwei oder drei wenig verschiedenen Zahlen das Mittel zu nehmen, braucht man nicht etwa erst alles zu addiren und die Summe dann durch 2 oder 3 zu dividiren. Dafs das Mittel aus 10,9 10,7 10,6

mit 10 anfängt, ist ja selbstverständlich. Und dafs ,9 ,7 ,6 das Mittel ,73 geben, sieht man auch sofort. Mittelnehmen ist bei einiger Übung ebenso einfach wie Addiren und Subtrahiren und ist keinen gröberen Rechenfehlern ausgesetzt; ein nicht zu unterschätzender Vorteil.

Man kann statt dessen auch den Mittelpunkt Null nennen und die Ausschläge nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ zählen, also in dem obigen Beispiel schreiben + 0,9 — 1,3 + 0,7 etc. Der Anfänger aber wird in der vorhin angegebenen Weise weniger leicht Fehler begehen.

Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontroliren, nach stärkerer Belastung der Wage neu zu bestimmen. Findet man Unterschiede, so nimmt man das Mittel aus den beiden Bestimmungen, welche der Wägung vorangehen und ihr folgen.

Wägung. Nachdem eine solche Zahl von Gewichtstücken aufgelegt, bez. schliefslich der Reiter so auf einen vollen Teilstrich aufgesetzt worden ist, dafs die Einstellung dem Nullpunkt nahe kommt, macht man wieder nach dem obigen Schema einen Satz von Umkehrbeobachtungen. Das Mittel wird von dem Nullpunkt um eine Differenz von n Skalenteilen abweichen. Kennt man die Empfindlichkeit C der Wage (**11**), d. h. den Ausschlag durch 1 mg Mehrbelastung, so ist n/C die Gröfse, welche man den Gewichtstücken noch zulegen bez. von ihnen wegnehmen müfste, um völlige Gleichheit zu erzielen.

Kennt man die Empfindlichkeit nicht, so nimmt man ein oder einige mg fort oder legt zu, je nachdem die Gewichte zu schwer oder zu leicht waren, so dafs die Einstellung auf die andere Seite vom Nullpunkt fällt, und beobachtet abermals wie vorhin. War die erste Einstellung e_1, die jetzige e_2, die Veränderung des Gewichts zwischen beiden Beobachtungen gleich π, so hat man die Empfindlichkeit $C = (e_1 - e_2)/\pi$ und kann jetzt rechnen wie vorhin.

Mit anderen Worten, wenn gefunden wurde

der Nullpunkt e_0

bei der Belastung p_1 die Einstellung e_1

" " " p_2 " " e_2,

so hat der Körper das Gewicht

$$p_0 = p_1 + (p_2 - p_1)\,\frac{e_0 - e_1}{e_2 - e_1}.$$

Selbstverständlich sind diese Differenzen sämtlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen, wobei eine Erleichterung darin besteht, die Skalenteile nach derjenigen Richtung wachsend zu zählen, welche einer Vermehrung der Gewichtstücke entspricht.

Beispiel. Nullpunkt sei der obige Wert 9,74. Nach Auflegung des Körpers wurde beobachtet

Belastung:	Umkehrpunkte:	Mittel:	Einstellung:
3,036 gr	7,8 7,8 7,9 10,3 10,2	7,83 10,25	9,04
3,038 gr	9,6 9,4 9,3 12,3 12,3	9,43 12,30	10,86

Ausschlag auf 1 mg gleich $\frac{1}{2}$1,82 = 0,91 Sk.T.

3,036 gr waren folglich zu leicht um (9,74 — 9,04)/0,91 = 0,77 mg.

Ebenso erhält man nach obiger Formel

$$p_0 = 3{,}036 \text{ gr} + 2 \times 0{,}70/1{,}82 \text{ mg} = 3{,}03677 \text{ gr}.$$

Das Protokoll der Beobachtungen soll nach einem bestimmten Schema, z. B. dem obigen geführt werden. — Man beachte noch, daſs falsches Abzählen der Gewichtstücke ein sehr gewöhnlicher Fehler ist, zähle also mindestens zweimal.

11. Empfindlichkeit einer Wage.

Empfindlichkeit C der Wage heiſst die Änderung der Einstellung, gewöhnlich für 1 mg Mehr-Belastung einer Schale. Ihre Bestimmung für verschiedene Belastungen ist als Kennzeichen für die Güte der Wage und ferner zur Vereinfachung der Wägungsmethode von Wichtigkeit. Besitzt man nämlich eine Tabelle oder eine Kurve, in welcher der Ausschlag auf 1 mg für die verschiedenen Belastungen angegeben ist, so genügt für jede Wägung, auſser der Bestimmung des Nullpunktes, eine einzige Beobachtung der Einstellung mit nahe richtigem Gewicht (vgl. vor. S.).

Ist M die Masse des Balkens, a der Abstand seines Schwerpunkts von der Drehaxe (Mittelschneide), M' die Gesamtmasse der Schalen ev. incl. Belastungen, a' der Abstand der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte (Endschneiden) von der Drehaxe, a und a' nach unten positiv gerechnet, $2L$ die Länge des Balkens, z die Länge des Zeigers und s die des Skalenteils, so ist $C = \frac{L}{Ma + M'a'} \cdot \frac{z}{s}$. Bei positivem a' sinkt, bei negativem a' steigt die Empfindlichkeit mit wachsender Belastung und kann im letzteren Falle $= \infty$ werden, worauf die Wage umschlägt. Für $a' = 0$, d. h. wenn die Aufhängepunkte der

Schalen mit der Drehaxe in derselben Ebene liegen, haben die Schalen und ihre Belastungen keinen Einfluſs auf C.

Zur Bequemlichkeit wird in der Regel für feinere Wagen diese Beschaffenheit gewünscht. Da aber ihre Bedingung wegen der Durchbiegung des Balkens streng nur für eine bestimmte Belastung erfüllt sein kann, so stellt der Mechaniker sie wohl für eine mittlere Belastung her. Dann findet man anfangs eine kleine Steigerung der Empfindlichkeit mit der Belastung, für gröſsere Gewichte wieder eine Abnahme.

Da wegen der Festigkeit die Massen stärker vergröſsert werden müssen, als die Längen, so lassen sich kurzarmige Wagen empfindlicher bauen als langarmige.

Über Regulirung der Empfindlichkeit und Schwingungsdauer s. S. 46.

Die Bestimmung ergibt sich von selbst. Man setzt auf beide Schalen die Belastung, für welche man die Empfindlichkeit C bestimmen will, und auf eine der Schalen ein kleines Übergewicht, so daſs die Einstellung um einige (2 bis 3) Skalenteile vom mittelsten Teilstrich abweicht. Diese Einstellung e wird nach **10** II genau beobachtet. Nun bringt man durch Mehrbelastung der anderen Schale um π mg eine Einstellung ungefähr ebensoweit nach der anderen Seite hervor und beobachtet dieselbe. Sie sei e'; dann ist die Empfindlichkeit $C = (e - e')/\pi$.

Hat man C etwa für 0, 10, 20 . . . gr bestimmt, so trägt man in Koordinatenpapier die Belastung als Abscisse, die Empfindlichkeit als Ordinate ein und kann dann aus der Kurve C für irgend eine Belastung entnehmen oder eine Tabelle dafür herstellen. Von Zeit zu Zeit wird man die Empfindlichkeit neu bestimmen müssen.

12. Verhältnis der Wagearme.

Nach dem Hebelgesetz wird ein Körpergewicht in demselben Verhältnis falsch gefunden, wie der Wagearm auf der Seite des Körpers gröſser ist als auf der Seite der Gewichtstücke. Der Fehler spielt aus zwei Gründen keine groſse Rolle. Denn erstens wird er bei einer guten Wage selten 1/10000 erreichen. Zweitens aber kommen zumeist nur die Verhältnisse von Gewichten zur Geltung, z. B. bei allen Gewichtsanalysen, bei Bestimmungen von Dichtigkeiten, specifischen Wärmen etc., so daſs der Fehler hier ganz herausfällt, sobald man stets denselben

Wagearm benutzt. Bei feinen absoluten Wägungen aber darf man sich nicht auf die Gleicharmigkeit verlassen.

Die beiden Wagearme verhalten sich umgekehrt wie die Gewichte, welche als gleichzeitige Belastung der Schalen die Wage auf den Nullpunkt (**10**) einstellen. Ist der Gewichtsatz richtig, so ergibt sich das Balkenverhältnis R/L, falls ein Gewicht p_r an dem rechten Arme R dem Gewicht p_l an dem linken Arme L die Wage hält, $R:L = p_l:p_r$.

Ohne die vollkommene Richtigkeit des Gewichtsatzes vorauszusetzen, bestimmt man das Verhältnis folgendermafsen:

Man beobachtet den Nullpunkt, setzt dann auf beide Schalen Gewichtstücke von gleichem Nennwert, etwa gleich der Hälfte der gröfsten für die Wage zulässigen Belastung, und bestimmt die Zulage, welche links oder rechts notwendig ist, um die Einstellung wieder auf den Nullpunkt zu bringen. Dabei empfiehlt sich für genaue Messungen das Interpolationsverfahren (**10** II). Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontroliren und ev. mit seinem Mittelwert vor und nach der Wägung einzusetzen. Alsdann vertauscht man die Gewichte und verfährt gerade so. Bezeichnen wir die beiden Gewichte vom Nominalbetrage p mit p_1 und p_2, und haben wir gefunden, dafs die Wage einsteht, wenn

bei der einen Wägung links $p_1 + l$ rechts p_2
" " anderen " " p_2 " $p_1 + r$,

so ist, die Länge des linken Wagebalkens mit L, die des rechten mit R bezeichnet,

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{l-r}{2p}.$$

Eine kleine Zulage einerseits kann dabei als negative Zulage andererseits betrachtet werden; siehe das Beispiel.

Beweis. Nach dem Hebelgesetze ist $L(p_1+l) = Rp_2$ und $Lp_2 = R(p_1+r)$, woraus (nach S. 9, Gl. 8 u. 3), wenn man schliefslich p statt p_1 schreibt,

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_1+l}{p_1+r}} = \sqrt{\frac{1+l/p_1}{1+r/p_1}} = 1 + \frac{l-r}{2p}.$$

Auch die Doppelwägung eines Körpers mit Nullpunktsbestimmung ergibt das Balkenverhältnis; siehe **13**, I.

Mit der Belastung kann das Verhältnis sich etwas ändern.

Beispiel: Links Rechts

(50)	(20+10+···)	+0,83 mg	also $l = -0,83$
(20+10+···)	(50)	+2,56 „	„ $r = +2,56$

und $\frac{R}{L} = 1 + \frac{-0,83 - 2,56}{100000} = 1 - 0,0000339$

oder auch $L/R = 1,0000339$.

Die eingeklammerten Zahlen stellen die mit diesen Ziffern bezeichneten Grammgewichtstücke vor. Zugleich folgt (13)

$$(50) = (20+10+\cdots) - 0,86 \text{ mg}.$$

13. Absolute Wägung eines Körpers.

I. Elimination der Ungleicharmigkeit der Wage.

Solange nur Massen mit einander zu vergleichen sind, braucht man wie schon gesagt nur immer an demselben Arme der gleichen Wage zu wägen. Absolut aber mufs ein Gewicht bestimmt werden, sobald z. B. bei der Kalibrirung von Gefäfsen, bei chemischen Titrirungen, bei der Herstellung von Lösungen die Massen auf Volumina oder bei voltametrischer Messung auf elektrische Stromstärken etc. bezogen werden sollen.

Um das absolute Gewicht aus dem scheinbaren, bei der Wägung gefundenen abzuleiten, multiplicirt man das letztere mit dem Verhältnis der Wagearme, als Zähler die Länge des Armes, an welchem die Gewichtstücke wirkten. Unabhängig von diesem Verhältnis, welches für feine Wägungen nicht einmal als unveränderlich betrachtet werden darf, machen die folgenden Verfahren.

1. Doppelwägung. Man wägt den Körper einmal auf der linken Schale, das andere Mal auf der rechten Schale. Wenn p_1 und p_2 in beiden Fällen die Gewichtstücke bezeichnen, welche die gleiche Einstellung des Zeigers bewirken, z. B. auf den mittelsten Teilstrich, so ist das gesuchte Gewicht p des Körpers das Mittel

$$p = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

Beweis s. 4 Beisp. 3. Zugleich findet man, wenn p_1 und p_2 auf den richtigen Nullpunkt der Wage bezogen sind, das Balkenverhältnis

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}} = 1 + \frac{p_2 - p_1}{2p_1}.$$

2. Tarirmethode. Der Körper auf einer Schale wird durch irgend eine Belastung der anderen äquilibrirt, am bequemsten mit einem zweiten Gewichtsatz, der nicht genau zu

sein braucht; er wird alsdann weggenommen und durch Gewichtstücke bis zur gleichen Einstellung der Wage ersetzt. Letztere geben sein Gewicht.

II. Reduktion der Wägung auf den leeren Raum.

Zweck der Wägung ist meistens die Bestimmung der **Masse** eines Körpers durch Vergleichung mit bekannten Massen aus einem sogenannten Gewichtsatze. In der Luft erleiden sowohl Körper als Gewichtstücke einen Auftrieb gleich dem Gewicht der verdrängten Luft.

Nennt man

m das scheinbare Gewicht des Körpers in der Luft, d. h. die Gewichtstücke, welche ihn in der Luft äquilibriren,

λ die Dichtigkeit der Luft ($\lambda = 0{,}00120$ im Mittel. Siehe auch 18 und Tab. 6),

s die Dichtigkeit (das specifische Gewicht) des Körpers,

σ die Dichtigkeit der Gewichtstücke (Messing $= 8{,}4$),

so ist das Gewicht M im leeren Raume

$$M = m\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right).$$

Es ist also zu dem gefundenen scheinbaren Gewicht m hinzuzufügen $m\lambda(1/s - 1/\sigma)$, eine Korrektion, welche mit dem Unterschied von s und σ wächst. Für λ genügt fast immer der mittlere Wert 0,0012. Für Messinggewichte können dann die bei verschiedenen sp. Gewichten s aus der Formel sich berechnenden Korrektionen aus Tab. 1 entnommen werden.

Beweis. Der Körper hat das Volumen $V = M/s$, die Gewichtstücke $v = m/\sigma$. Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luft; also verliert der gewogene Körper $\lambda V = \lambda M/s$, die Gewichtstücke $\lambda v = \lambda m/\sigma$. Da die Gewichte nach Abzug dieser Verluste gleich sind, so ist also $M(1 - \lambda/s) = m(1 - \lambda/\sigma)$, woraus der obige Wert M sich nach S. 9, Formel 8 ergibt.

Beispiel. Die Korrektion des scheinbaren Gewichtes w einer Wassermenge, wenn man mit Messinggewichten ($\sigma = 8{,}4$) gewogen hat, beträgt $w \cdot 0{,}0012(1/1 - 1/8{,}4) = w \cdot 0{,}00106$ d. h. 1,06 mg auf jedes Gramm.

Auch wo es nicht auf das absolute Gewicht, sondern nur auf Gewichtsverhältnisse ankommt, wie bei chemischen Analysen, bedingt der Auftrieb unter Umständen beträchtliche Korrektionen, ohne deren Berücksichtigung Fehler von mehr als 1 Promille entstehen können. Analysirt man z. B. eine verdünnte Silberlösung durch die Wägung eines

Quantums Lösung und des daraus erhaltenen Chlorsilbers (Dichtigkeit $= 5{,}5$), und sind P und p die von der Wage angegebenen Gewichte, so sind die auf den leeren Raum reducirten $P(1 + 0{,}0012)$ und $p(1 + 0{,}0012/5{,}5)$. Der Chlorsilbergehalt beträgt also

$$\frac{p \cdot (1 + 0{,}0012/5{,}5)}{P \cdot (1 + 0{,}0012)} = \frac{p}{P}\left[1 - 0{,}0012\left(1 - \frac{1}{5{,}5}\right)\right] = \frac{p}{P} \cdot 0{,}9990.$$

Der unkorrigirte Wert p/P ist demnach um $0{,}1\%$ zu grofs. Die nicht seltene Vernachlässigung solcher einfacher Korrektionen ist angesichts der Kostbarkeit der Wage, der auf die Wägungen verwandten Sorgfalt und des oft durch die grofse Zahl der mitgeteilten Decimalen erhobenen Anspruchs auf Genauigkeit nicht zu rechtfertigen.

Über die principielle Frage, ob das Gramm eine Masse oder ein Gewicht vorstelle, vgl. die Bemerkung im Anhange über das absolute Mafssystem. In der gewöhnlichen Praxis der Messungen macht es selten einen Unterschied, ob man von Gewichten oder Massen spricht, insbesondere entstehen keine Irrtümer. Für die chemische Analyse oder irgend eine andere auf Procente hinausführende Operation ist es gleichgiltig, ob man Massen oder Gewichte (im leeren Raum) meint. Ebenso wird man zu den nämlichen Zahlen geführt, wenn man von dem specifischen Gewicht eines Körpers oder unter dem Namen Dichtigkeit von der specifischen Masse eines Körpers redet; vorausgesetzt, dafs man, wie immer, diese Eigenschaften des Körpers mit derjenigen des Wassers als Einheit vergleicht. Wenn aber entweder die Körper mit ihrer Trägheit in Betracht kommen oder wenn andrerseits Gewichte zur Kraftmessung dienen, wie bei der Messung von Arbeit, Druck, Elasticität, mufs man zwischen den Begriffen Masse und Gewicht streng unterscheiden.

14. Korrektionstabelle eines Gewichtsatzes.

Auf die Richtigkeit eines Gewichtsatzes darf man sich schon aus dem Grunde nicht verlassen, weil die Stücke sich durch den Gebrauch ändern.

Allgemein kommt die Aufgabe, die Fehler eines Gewichtsatzes zu bestimmen, darauf hinaus, dafs man sich durch Ausführung so vieler Wägungen, als Gewichte zu prüfen sind, ebensoviele Gleichungen bildet, aus denen das Verhältnis der Wagearme und dasjenige der Gewichte zu einander abgeleitet wird.

Bei der gebräuchlichen Anordnung eines Gewichtsatzes verfährt man nach folgendem Schema. Wir bezeichnen die gröfseren Stücke mit

$$50' \quad 20' \quad 10' \quad 10'' \quad 5' \quad 2' \quad 1' \quad 1'' \quad 1'''.$$

Man führe eine Doppelwägung mit $50'$ einerseits und der Summe der übrigen Gewichte andrerseits aus. Man finde dabei, dafs die Wage einsteht (der Zeiger in der Stellung ist, welche er bei unbelasteter Wage annimmt), wenn

links	rechts
$50'$	$20' + 10' + \cdots + r\,\text{mg}$
$20' + 10' + \cdots + l\,\text{mg}$	$50'$

dann ist das Verhältnis der Wagearme (**12**)

$$R/L = 1 + (l - r)/100000$$

und $$50' = 20' + 10' + \cdots + \tfrac{1}{2}(r + l).$$

Weiter vergleicht man $20'$ mit $10' + 10''$ und $10'$ mit $10''$ sowie mit $5' + 2' + \cdots$ Die Doppelwägung gibt auch in diesen Fällen gröſsere Sicherheit, auch ist das Balkenverhältnis im allgemeinen von der Belastung etwas abhängig. An einer guten Wage mag man aber den eben gefundenen Wert als allgemein giltig annehmen und nur einseitig vergleichen. Es bedeutet dann ein Stück p, rechts aufgelegt, auf die Balkenlänge der linken Seite reducirt, $p \cdot R/L$.

Beispiel. Es sei $r = -0{,}63$ $\quad l = +2{,}73$ mg, so ist
$50' = 20' + 10' + \cdots + 1{,}05$ mg und $R/L = 1{,}000034$.

Ferner sei bei der Vergleichung des 5 gr-Stückes mit der Summe der kleinen Gewichte gefunden, daſs die Wage einsteht, wenn
links $5' + 0{,}06$ mg $\qquad$ rechts $2' + 1' + 1'' + 1'''$,
so würden an einer gleicharmigen Wage sich das Gleichgewicht halten $5' + 0{,}06$ mg und $(2' + 1' + \cdots) \times 1{,}000034$ oder $2' + 1' + \cdots + 0{,}17$ mg.
Folglich ist $\quad 5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + 0{,}11$ mg.

Diese Wägungen mögen ergeben haben, wobei den durch A, B etc. bezeichneten gefundenen Unterschieden gleich Zahlen als Beispiel beigeschrieben werden sollen:

$$\begin{aligned} 50' &= 20' + 10' + \cdots + A && + 0{,}48 \text{ mg} \\ 20' &= 10' + 10'' \quad + B && + \,{,}06 \text{ „} \\ 10'' &= 10' \quad + C && + \,{,}17 \text{ „} \\ 5' + 2' + 1' + 1'' + 1''' &= 10' \quad + D, && - \,{,}29 \text{ „} \end{aligned}$$

wo A, B, C, D natürlich positiv oder negativ sein können. Aus den Gleichungen muſs der Wert der fünf Stücke, die Summe der einzelnen Gramme vorläufig als ein Stück betrachtet, in irgend einer Einheit ausgedrückt werden. Man wird, wenn man nicht etwa auſserdem eine Vergleichung mit einem Normalgewicht vornimmt, diese Einheit so wählen, daſs die Korrektionen der einzelnen Stücke möglichst klein werden, und das ist der Fall, wenn man die ganze Summe als richtig annimmt, d. h. wenn man setzt

$$50' + 20' + 10' + \cdots = 100 \text{ gr}.$$

Man bezeichne nun zur Abkürzung

$$S = \tfrac{1}{10}(A + 2B + 4C + 2D) \qquad + 0{,}070 \text{ mg}$$

so ist, wie man leicht nachweisen kann,

$10' = 10 \text{ gr} - S$		$-0{,}07$ mg
$10'' = 10$ „ $-S + C$		$+\ {,}10$ „
$5' + \cdots = 10$ „ $-S + D$		$-\ {,}36$ „
$20' = 20$ „ $-2S + B + C$		$+\ {,}09$ „
$50' = 50$ „ $-5S + A + B + 2C + D = 50 \text{gr} + \frac{1}{2}A.$		$+\ {,}24$ „

Die Probe für die Richtigkeit der Rechnung ist dadurch gegeben, dafs, wenn man die Korrektionen in Zahlen bestimmt hat, die Summe derselben $= 0$ sein mufs und dafs die vier Beobachtungs-Gleichungen erfüllt sein müssen.

Ferner habe man durch Vergleichung der Stücke $5'$ $2'$ $1'$ $1''$ $1'''$ untereinander gefunden

$5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + a$		$+0{,}54$ mg
$2' = 1' + 1'' \qquad + b$		$+\ {,}02$ „
$1'' = 1' \qquad + c$		$-\ {,}10$ „
$1''' = 1' \qquad + d.$		$-\ {,}13$ „

Setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$s = \tfrac{1}{10}(a + 2b + 4c + 2d + S - D), \qquad +0{,}028 \text{ mg}$$

so ist ähnlich wie oben

$1' = 1 \text{ gr} - s$		$-0{,}03$ mg
$1'' = 1$ „ $-s + c$		$-\ {,}13$ „
$1''' = 1$ „ $-s + d$		$-\ {,}16$ „
$2' = 2$ „ $-2s + b + c$		$-\ {,}14$ „
$5' = 1$ „ $-5s + a + b + 2c + d.$		$+\ {,}09$ „

Ebenso wird mit den kleinen Gewichtstücken verfahren.

Befolgt man bei dem Wägen die Regel, stets zu bilden:

die Gewichte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 etc. gr
aus den Stücken	$1'$	$2'$	$2'+1'$	$2'+1'+1''$	$5'$	$5'+1'$	$5'+2'$	$5'+2'+1'$	$5'+2'+1'+1''$	$10'$ etc.,

so kann man gleich für jede Ziffer aus jeder Dekade die Korrektion aufstellen, also für das obige Beispiel die Korrektionen in Hunderteln mg:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehner	—7	+ 9	+ 2	+12	+24	+17	+33	+26	+36
Einer	—3	—14	—17	—30	+ 9	+ 6	— 5	— 8	—21
	etc. für Zehntel, Hundertel.								

Wir haben bisher die Summe der gröſseren Gewichtstücke als richtig angenommen; für die meisten Arbeiten (chemische Analyse, specifisches Gewicht), welche nur relative Wägungen verlangen, genügt dies. Soll die Fehlertabelle auf richtiges Grammgewicht bezogen werden, so ist es notwendig, die Gewichtstücke oder eins derselben mit einem Normalgewicht zu vergleichen (**13**). Die Rechnung ist ähnlich wie oben.

Ein Schema zur Prüfung eines Gewichtsatzes von anderer Anordnung wird man leicht finden.

Zur Unterscheidung der Gewichtstücke von gleichem Nennwerte sollen die Ziffern in verschiedener Weise eingeschlagen oder mit einem Index versehen sein; andernfalls muſs man zufällige Merkzeichen aufsuchen. Bei den Blechgewichten hilft man sich durch das Umbiegen verschiedener Ecken. — Auf den Gewichtsverlust in der Luft braucht keine Rücksicht genommen zu werden, wenn die gröſseren Stücke von gleichem Material sind, weil bei den kleineren der Unterschied ohne merklichen Einfluſs ist. — Zur Prüfung der kleineren Stücke wendet man womöglich eine leichtere, d. h. bei gleicher Schwingungsdauer empfindlichere Wage an. — Die Wägungen sind durch Schwingungsbeobachtung nach **10** auszuführen, wobei die Nullpunktsbeobachtung häufig wiederholt wird.

Die Gewichtstücke pflegen durch den Gebrauch leichter zu werden, so daſs es kein Nachteil ist, wenn in einem neuen Satz die kleinen Stücke relativ etwas zu schwer sind.

15. Dichtigkeit oder specifisches Gewicht. Bestimmungsmethoden.

Dichtigkeit oder specifisches Gewicht s eines Körpers (vgl. Tab. 2 u. 3) nennt man das Verhältnis seiner Masse zu der Masse eines gleichen Volumens Wasser von 4°. Anstatt des Massen-Verhältnisses kann auch das Verhältnis der Gewichte im leeren Raum gesetzt werden.

Im Centimeter-Gramm-System kann man specifisches Gewicht auch das Verhältnis des Gewichtes zum Volumen nennen oder, einen homogenen Körper vorausgesetzt, das Gewicht der Volumeinheit. Diese Beziehungen bleiben aber nicht streng giltig, wenn für das, die Einheit der Dichtigkeit darstellende Wasser eine andere Temperatur als 4° gewählt wird. Die beiden Begriffe Dichtigkeit (specifische Masse) und specifisches Gewicht sind im Princip zu unterscheiden, wie gr und gr-Gewicht. Dem Zahlenwert nach sind sie, wenn man von der kleinen Abweichung zwischen gr und ccm Wasser (Anm. S. 45) absieht, gleichbedeutend.

Specifisches Volumen nennt man den reciproken Wert der Dichtigkeit, d. h. das Volumen der Masse Eins einer Substanz. Molekularvolumen heiſst das Molekulargewicht eines Körpers multiplicirt mit

seinem specifischen Volumen oder dividirt durch seine Dichtigkeit; das ist also das in ccm ausgedrückte Volumen eines „Gramm-Moleküls“, d. h. einer Masse des Körpers von einer Anzahl Gramme gleich seinem Molekulargewicht. Entsprechende Bedeutung haben Äquivalent- und Atom-Volumen.

Über Gase und Dämpfe vgl. **18** bis **20**.

Die anzubringenden Korrektionen siehe unter **16.**

A. Für Flüssigkeiten.

1. Kalibrirtes Gefäſs (Meſsflasche, Pipette, Meſscylinder, Bürette).

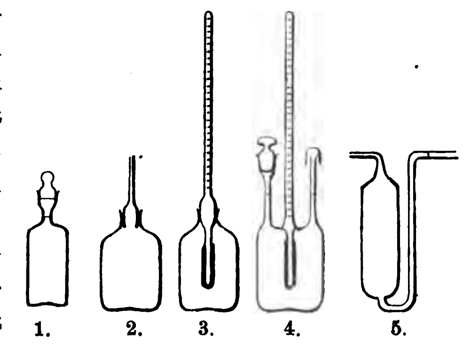
Beträgt die Masse m gr, das Volumen v ccm, so ist nach der Definition die Dichtigkeit $s = m/v$.

Man wägt z. B. ein in einer Meſsflasche abgemessenes Volumen als die Differenz der Gewichte der leeren und der gefüllten Flasche. Für genäherte Bestimmungen ist oft auch eine Pipette brauchbar. Wenn die Auslaufmenge nicht sicher genug ist, so kann man eine auf Trockenfüllung geaichte Pipette zunächst trocken mit einem Fläschchen zusammen wägen, alsdann die Pipette füllen und ihren in das Fläschchen ausgelaufenen Inhalt wieder mit Pipette und Fläschchen zusammen wägen.

Bei dem Gebrauch eines geteilten Cylinders, z. B. auch einer Bürette, wird man meistens das Gewicht einer ausgegossenen oder ausgeflossenen Menge bestimmen und hat dann die für den Auslauf geltenden Volumina in Rechnung zu setzen.

2. Pyknometer.

Man wägt durch Differenzbestimmung gegen das leere Gefäſs die Flüssigkeitsmenge m und die Wassermenge w, welche von einem und demselben Gefäſs aufgenommen wird. Dann ist $s = m/w$. Ein gewöhnliches Fläschchen, bis zum Rande oder zu einem Strich am Halse gefüllt, liefert leicht die 3te Decimale richtig. Genauer arbeiten die mit dem Namen Pyknometer, Tarirfläschchen, bezeichneten konstanten Gefäſse (Fig.), welche ganz



oder bis zu einer Marke gefüllt werden, am genauesten die vierte und fünfte Form, bei denen die eine Öffnung zum Einlassen der Flüssigkeit, die andere zum Auslassen bez. Absaugen der Luft dient. Nr. 1 wird mit einem langen dünnen Trichter gefüllt, mittels einer dgl. Pipette entleert oder unter Einführung eines Glasrohrs zum Lufteintritt ausgegossen. Verfügt man nur über einige Tropfen, so lassen sich ganz kleine Fläschchen anwenden, wie sie zu Dampfdichte-Bestimmungen (**19 B**) gebraucht werden. — Nr. 5 (Sprengel-Ostwald), durch Saugen von der Spitze bis zu einer Marke gefüllt, hängt man mit einem Drahte an die Wage. Die Kenntnis der Temperatur wird hier und bei Nr. 1 durch ein Bad von konstanter Temperatur erzielt, in welchem das Pyknometer sich aber hinreichend lange befunden haben mufs. Über Füllung und Temperaturbestimmung von Nr. 2 vgl. B, 2. Über die Korrektion wegen Temperaturschwankungen vgl. **16.**

Bequemer, als Austrocknen des Gefäfses vor einer Neufüllung, wird meistens Vorspülen mit der neuen Flüssigkeit sein.

3. Auftriebsmethode.

Man wägt einen mit Faden oder Draht an die Wage gehängten Körper (Glaskörper) in der Luft (p_l), in der Flüssigkeit (p_f) und im Wasser (p_w). Beträgt der Gewichtsverlust in der Flüssigkeit $m = p_l - p_f$, im Wasser $w = p_l - p_w$, so ist wieder $s = m/w$. Denn wenn v das Volumen des Glaskörpers bedeutet, so ist nach dem Archimedischen Gesetz der Auftrieb (Gewichtsverlust) je gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, also $m = v \cdot s$ und $w = v \cdot 1$.

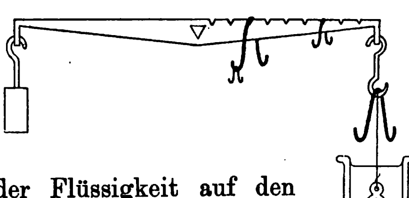
Zum Aufhängen dient entweder eine kürzere Wagschale mit Häkchen oder (Fig.) ein Haken im Bügel der Wagschale, wobei die Flüssigkeit auf einem Tischchen über der Wagschale steht. Die Aufhängeschlinge des Glaskörpers soll ganz untertauchen. Fehlerquelle ist hauptsächlich die Reibung in der Oberfläche bez. die Unegelmäfsigkeit in der Benetzung des Aufhängefadens, welche bei Metalldrähten, besonders im Wasser erheblich

sein kann. Platindraht, den man platinirt (8, 18) und dann geglüht hat, vermindert den Fehler. — Bequem wird als Senkkörper ein kurzes, dickes Thermometer gebraucht. Die Rechnung wird erleichtert, wenn der Auftrieb w des Körpers in Wasser von 4° eine runde Zahl beträgt z. B. 10 gr oder 30 gr.

Man soll darauf achten, dafs nicht in der Aufhängeöse des Senkkörpers ein Luftbläschen sitzen bleibt!

Über die Beobachtungsweise bei Bestimmungen bis in die sechste Decimale besonders für verdünnte Lösungen vgl. Kohlrausch u. Hallwachs, Wied. Ann. 50, 118. 1893; 53, 15. 1894; 56, 185. 1895.

Mohr'sche Wage. Ein Glaskörper ist mit einem feinen Draht an einem decimal geteilten Wagebalken äquilibrirt. Der Auftrieb des Körpers in Wasser ist gleich dem Gewichte des gröfsten Reiters; die anderen Reiter sind 10, 100 bez. 1000 mal leichter. Die Teilstriche des Wagebalkens, auf welche die Reiter aufgesetzt werden müssen, um den Auftrieb der Flüssigkeit auf den untergetauchten Glaskörper zu kompensiren, geben ohne weiteres die einzelnen Decimalen des specifischen Gewichtes an, z. B. in der Figur 1,373.



Prüfung der Mohr'schen Wage. 1) die Reitergewichte sollen sich wie 1:10:100 verhalten; 2) die Balkenteilung soll den Horizontalabstand der Mittel- und Endschneide in 10 gleiche Strecken teilen. Um dies zu prüfen, hängt man an den anderen Wagebalken eine kleine äquilibrirte Wagschale, setzt den gröfsten Reiter auf den Teilstrich 1, 2 etc. auf und untersucht, ob derselbe dabei Gewichten auf der Wagschale entspricht, welche sich wie 1:2 etc. verhalten; 3) die Wage soll im Wasser von der Temperatur t diejenige Dichtigkeit zeigen, welche in Tab. 4 zu t gehört. Zeigt die Wage Q' statt Q, so sind alle Angaben derselben mit Q/Q' zu multipliciren. Eine gute Mohr'sche Wage kann mit feinem Platindraht (vgl. oben) die 4te Decimale noch einigermafsen richtig liefern.

4. Gewichtsaräometer. Schwebemethode.

Ein Schwimmkörper wiege P gr und bedürfe einer Auflage von p bez. p' gr, um bis zu einem bestimmten Volumen ein-

tauchend in Wasser bez. einer anderen Flüssigkeit zu schwimmen. Dann ist das spec. Gewicht der letzteren offenbar $s = \frac{P + p'}{P + p}$. Die ursprüngliche Senkwage von Nicholson hat eine Marke am Halse, bis zu der sie jedesmal eintaucht, was aber zu Kapillaritäts-Unsicherheiten führt. Über ein Aräometer für genauere Bestimmungen vgl. Lohnstein, ZS. f. Instr. 1894, 164.

Unter diesem Fehler leiden Schwimmer nicht, die man ganz untersinkend durch Auflagegewichte zum Schweben bringt. Von den Gewichten (sp. G. $= \sigma$) ist in der Berechnung ihr Auftrieb p/σ im Wasser bez. $p's/\sigma$ in der anderen Flüssigkeit abzuziehen.

Über eine Anordnung zu diesem Zweck und über die Korrektionen wegen Temperatur etc. vgl. z. B. Warrington, Phil. Mag. (5) 48, 498. 1899; Nansen, Norweg. North Pol. Exp. X. 1900.

5. Skalenaräometer. Senkwage.

Ein schwimmender Körper sinkt so weit ein, daſs die verdrängte Flüssigkeit gerade sein Gewicht hat. Die Senkwage hat einen so tief liegenden Schwerpunkt, daſs der Stiel beim Schwimmen aufrecht steht.

Der Teilstrich, bis zu welchem der Stiel einsinkt, zeigt entweder die Dichtigkeit, oder deren reciproken Wert, das specifische Volumen, oder den Gehalt einer bestimmten Lösung, oder endlich sogenannte „Dichtigkeitsgrade“.

Bei Baumé z. B. bedeutet	0°	13°	24°	34°	42°	49° etc.
das specifische Gewicht	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5

Die Ablesung des Aräometers geschieht an der Oberfläche durch die Flüssigkeit hindurch, indem man das Auge so hält, daſs die Fläche als Linie verkürzt erscheint. Das Aräometer soll in Wasser von der Temperatur t die Zahl ergeben, welche laut Tab. 4 zu t gehört. Man prüft andere Punkte der Skale in Flüssigkeiten von anderweitig ermitteltem spec. Gewicht. Eine groſse Genauigkeit wird durch die Ablesefehler und die Kapillarität verhindert.

6. Hydrometer.

Die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen, welche sich in kommunicirenden Röhren das Gleichgewicht halten, stehen im umgekehrten Verhältnis der Dichtigkeiten. Fehler entstehen, um so gröſser, je enger die Röhren sind, aus der Kapillarität.

Bestimmung des Gehaltes einer Lösung aus ihrem spec. Gewicht.

Man geht in die Tabelle (für wässrige Lösungen z. B. Tab. 3) mit dem auf die Temperatur der Tabelle reducirten spec. Gewicht ein. Vgl. **9.**

B. Für feste Körper.

Die den Körpern anhaftenden Luftbläschen sind bei gröfseren Stücken durch wiederholtes Herausziehen oder mit dem Pinsel, bei kleinen durch Schütteln oder Auskochen oder mit der Luftpumpe zu beseitigen.

1. Wägung und Volummessung.

Haben m gr des Körpers das Volumen v ccm, so ist die Dichtigkeit $s = m/v$. Die Ausmessung kann bei regelmäfsiger Gestalt des Körpers mit dem Mafsstabe geschehen. Ein Cylinder (Draht) von der Länge l und dem Halbmesser r hat das Volumen $l \cdot r^2 \pi$, eine Kugel $\frac{4}{3} r^3 \pi$, etc.

Bei unregelmäfsiger Gestalt kann man das Volumen messen, um welches eine in einer kalibrirten Röhre enthaltene Flüssigkeit bei dem Hineinwerfen des Körpers ansteigt. Besonders auf zerkleinerte Substanzen ist die Methode leicht anwendbar. Für in Wasser lösliche Substanzen dient z. B. Alkohol, Petroleum, Toluol, oder auch eine gesättigte Lösung der Substanz. Auch kann man das Volumen bestimmen, indem man den Körper in ein ganz gefülltes Gefäfs mit genau definirtem Ausgufs bringt und die hierbei ausfliefsende Menge wägt.

2. Pyknometer (s. Nr. 2 u. 3 in Fig. S. 59).

Dasselbe wiege mit Wasser gefüllt P, mit Wasser und dem Körper P', während der Körper selbst m wiege. Dann berechnet sich die verdrängte Wassermenge $w = P + m - P'$ und $s = m/w$. Besonders bei kleinen Körpern wird das Verfahren gebraucht, doch sind alsdann auch möglichst kleine Fläschchen anzuwenden, bei denen man sich überzeugt hat, dafs sie, wiederholt mit Wasser gefüllt, nach Anbringung der Temperaturkorrektion hinreichend konstante Füllungen enthalten. Wenn die Temperatur beider Füllungen verschieden ist (vgl. **16**), so hat man die Füllung mit Wasser allein (Temp. $= t$) auf die andere Temperatur t' umzurechnen. Dies geschieht bezüglich der Ausdehnung des Wassers durch Addition von $W \cdot (Q' - Q)$, wenn

Q und Q' die Dichtigkeiten des Wassers bei t und t' bedeuten (Tab. 4) und bezüglich des Glases durch Addition von $W \cdot 3\beta(t'-t)$, wenn 3β den Volumausdehnungskoefficient des Glases und W das Nettogewicht der ganzen Wasserfüllung bedeutet; das letztere braucht nur genähert bekannt zu sein.

Hat das Pyknometer kein Thermometer, so nimmt man entweder die Temperatur der Spritzflasche, oder man füllt zunächst nur so weit, dafs man ein kleines Thermometer einführen kann. Demnächst füllt man den kleinen Rest auf und setzt den durch Aussaugen von Tropfen befreiten, mit einer unwägbaren Spur von Fett eingeriebenen Stöpsel rasch ein. Hat derselbe eine hinreichende Wandstärke, so füllt er sich; man trocknet ausgespritzte Flüssigkeit sofort ab und tupft nötigenfalls mit einem Fliefspapier-Spitzchen bis zur Marke aus. Spätere Temperaturänderungen sind gleichgiltig, wenn sie nicht etwa ein Überfliefsen bewirken. Die Flüssigkeit soll also nicht viel kälter als die Zimmerluft sein.

3. Auftriebsmethode.

Hat der Körper in der Luft das Gewicht m, unter Wasser das Gewicht p, ist also der Auftrieb $w = m - p$, so ist $s = m/w$.

Mit der Wage. Man hängt den Körper mit einem dünnen fettfreien Faden oder Draht an einer Wagschale auf; vgl. z. B. Fig. S. 60. Das Drahtgewicht bestimmt man für sich und zieht dasselbe von p ab (oder addirt es, aber nur bei der Berechnung des Auftriebes w, zu m). Von dem so gefundenen Auftriebe w ist nötigenfalls der Auftrieb des Drahtes abzuziehen, den man leicht schätzen kann, indem man aus dem Verhältnis der untergetauchten zur ganzen Länge das Gewicht des untergetauchten Stückes berechnet. Letzteres, dividirt durch die Dichtigkeit des Drahtes (Tab. 2), gibt den Gewichtsverlust des Drahtes.

Bei der Wägung in Wasser nehmen die Schwingungen der Wage rasch ab; man wird meistens in der Ruhe beobachten müssen. — Der Aufhängefaden soll dünn sein und durch die Oberfläche nur einmal hindurchtreten, um die Kapillarkräfte möglichst zu vermindern; vgl. auch A 3. Das Wasser soll nahe

die Zimmertemperatur haben, oder man muſs besonders geschützte Bäder anwenden. Bei Beobachtung im geschlossenen Wagekasten ist ein Thermometer von beistehender Form bequem.

In Wasser lösliche Körper wägt man in einer anderen Flüssigkeit von bekannter Dichtigkeit. Mit letzterer ist dann das wie oben berechnete Resultat zu multipliciren.

Leichte Körper werden durch Verbindung mit einem anderen von hinreichendem Gewicht zum Untersinken gezwungen; z. B. mit einer Metallklemme, oder einer Glocke von Drahtnetz, unter welcher man den Körper aufsteigen läſst. Der Belastungskörper kann bei allen Wägungen im Wasser bleiben.

Zerkleinerte Körper legt man in ein Schälchen, welches unter Wasser hängt und tarirt ist.

Kann man einen Körper nicht an die Wagschale hängen, so läſst sich vielleicht ein Gefäſs mit Wasser auf die Wage stellen und seine Gewichtszunahme bestimmen, wenn der mit einem Faden an einem festen Stativ aufgehängte Körper untergetaucht wird. Diese Zunahme ist gleich dem scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers im Wasser.

Mit der Nicholson'schen Senkwage. Man belastet die obere Schale des Schwimmers, jedesmal bis zu dessen Einsinken bis an die Marke am Halse: 1) bloſs durch Gewichte (P); 2) durch Körper und Gewichte (P'); 3) durch Gewichte, während zugleich der Körper unter Wasser auf der unteren Schale liegt (P''). Dann gibt $P - P' = m$ das Gewicht des Körpers, $P'' - P' = w$ das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers und m/w wieder die Dichtigkeit des Körpers. Temperaturschwankungen beeinträchtigen die Genauigkeit; um so mehr, je kleiner der Körper gegen die Senkwage ist. Die Sicherheit der Einstellung wird durch Reinigen des Halses mit Weingeist erhöht.

Mit der Jolly'schen Federwage. Ein spiraliger Draht trägt zwei übereinander gehängte Wagschalen, von denen die untere konstant in ein Gefäſs mit Wasser taucht. Um die Parallaxe beim Ablesen zu vermeiden, ist die Teilung auf einem spiegelnden Glase angebracht. 0,1 mm läſst sich noch schätzen. Mit einem Gewichtsatz kann man Wägungen genau wie an der Senkwage ausführen, indem man eine Marke am unteren

Ende des Spiraldrahtes immer auf einen bestimmten Teilstrich bringt.

Ein einfacheres Wägungsprincip mit der Federwage ist auch ohne Gewichtsatz dadurch gegeben, dafs die Senkung h dem angehängten Gewichte p nahe proportional ist, wonach $p = A \cdot h$. Durch eine einmalige Belastung mit einem bekannten Gewicht kann der Faktor A bestimmt werden. Da bei Dichtebestimmungen die Gewichtseinheit sich heraushebt, so kann man hier einfach den Skalenteil der Federwage als Einheit nehmen. Senkt sich die Wage durch Auflegung des Körpers auf die obere Schale um h, dagegen um h', wenn der Körper unter Wasser auf die untere Schale gelegt wird, so ist also $s = h/(h - h')$.

Genauer setzt man $p = Ah + Bh^2$. Man bestimmt A und B aus zwei Belastungen, deren eine etwa die gröfste anzuwendende Senkung bewirke, während die andere halb so gross sein mag. Man kann hiernach leicht eine Tabelle aufstellen, welche zu den Senkungen die zugehörigen Belastungen angibt.

4. Schwebemethode.

Sehr kleine, sogar pulverförmige Körper kann man bestimmen, indem man eine Flüssigkeit mischt, in welcher die Körper nicht sinken oder steigen. Geeignet können Mischungen von Chloroform (1,52) oder Bromoform (2,9) oder Methylenjodid (3,3) mit Benzol (0,89), Toluol (0,89), Xylol (0,87) oder wässerige Lösungen von Kaliumquecksilberjodid (Thoulet'sche Lösung; bis 3,20) sein.

Zur genauen Abgleichung korrigirt man zweckmäfsig etwa eine noch ein wenig zu leichte mit einer etwas zu schweren Mischung. Auch kann man Temperaturänderungen zur Abgleichung benutzen, da die Flüssigkeiten sich stark, die festen Körper sich schwach ausdehnen.

Die Dichtigkeit der Flüssigkeit ermittelt man am einfachsten mit der Mohr'schen Wage, während die Körper schweben. — Durch partielles Abdestilliren zerlegt man die Flüssigkeiten nach dem Gebrauch wieder.

Vgl. auch Retgers, ZS. f. physik. Chemie 3, 289 u. 497. 1889; 4, 189. 1889; 11, 328. 1893.

16. Korrektion einer Dichtigkeitsbestimmung wegen des Luftauftriebs und wegen der Temperatur.

I. Reduktion auf den leeren Raum und auf Wasser von 4°.

Für flüssige wie für feste Körper sind in **15** A und B bei Nr. 1 die gefundenen Gewichte, wenn die Genauigkeit es erfordert, auf den leeren Raum zu reduciren (**13** II; Tab. 1).

Die unter Nr. 2 und 3 aufgezählten Methoden der Dichtigkeitsbestimmung mit dem Pyknometer und nach dem Archimedischen Gesetz verlangen eine Korrektion auf Wasser von 4° und den leeren Raum, welche nach der folgenden gemeinschaftlichen Regel ausgeführt wird. Es bedeute

Q die Dichtigkeit des Wassers, welches zur Beobachtung gedient hat (Tab. 4);

λ die Dichtigkeit der Luft bezogen auf Wasser (der Mittelwert $\lambda = 0{,}00120$ genügt fast immer; andernfalls vgl. **18** u. Tab. 6);

m das scheinbare, d. h. von der Wage angegebene Gewicht des in der Luft gewogenen festen oder flüssigen Körpers; oder bei Bestimmung einer Flüssigkeit mit dem Glaskörper den scheinbaren Gewichtsverlust des in die Flüssigkeit getauchten Körpers;

w das scheinbare Gewicht des dem Volumen des Körpers gleichen Volumens Wasser von der Dichtigkeit Q.

Die Gröfse w kann also sein:

1. für Flüssigkeiten: das beobachtete Gewicht des Wassers in dem Pyknometer, oder des von dem Glaskörper verdrängten Wassers;

2. für feste Körper: der beobachtete Gewichtsverlust des Körpers im Wasser bei einer Bestimmung nach dem Archimedischen Gesetz mit Wage oder Senkwage; oder das Gewicht des durch Einbringen des Körpers ausgeflossenen Wassers bei Anwendung des Pyknometers.

m/w ist das rohe unkorrigirte specifische Gewicht. Das richtige ist

$$s = \frac{m}{w}(Q - \lambda) + \lambda \quad \text{oder auch} \quad = \frac{m}{w} Q + \left(1 - \frac{m}{w}\right)\lambda. \qquad 1.$$

Strenge Vorschriften s. z. B. bei R. Kohlrausch, Prakt. Regeln zur genauen Best. d. spec. Gewichtes. Marburg 1856.

Vgl. über die Rechnung auch die folgende Seite und über ihre Vereinfachung, falls man denselben Glaskörper oder dasselbe Pyknometer wiederholt benutzt, III.

Diese Formel korrigirt also die sämtlichen nach 2 und 3 in **15** A oder B bestimmten Werte auf den leeren Raum und Wasser von 4^0.

Beweis. Wenn der Körper, fest oder flüssig, in der Luft das Gewicht m hat, während er die Luftmenge l verdrängt, so wiegt er im leeren Raume $m+l$. Bezüglich der Bestimmung von w können drei Fälle unterschieden werden. Hat man das Gewicht w des gleichen Volumens Wasser durch Abwägen bestimmt, so ist das Gewicht des Wassers im leeren Raume $= w + l$. Ferner wenn der scheinbare Gewichtsverlust w eines festen Körpers durch Eintauchen in Wasser gemessen wurde, so ist derselbe ebenfalls um l zu vermehren, da das Gewicht im leeren Raume um l größer gewesen wäre als in der Luft. Ebenso ist drittens, wenn die Dichtigkeit einer Flüssigkeit dadurch bestimmt wird, daſs man den scheinbaren Gewichtsverlust eines und desselben Körpers in der Flüssigkeit und im Wasser ermittelt, jeder Verlust um l zu vergröſsern.

Das Wasser aber habe nicht die Dichtigkeit 1, sondern Q gehabt, so würde dasselbe Volumen Wasser bei 4^0 nicht $w+l$, sondern $(w+l)/Q$ wiegen. Man erhält also in allen Fällen die wahre Dichtigkeit s des Körpers $s = (m+l)Q/(w+l)$. Da nun $(w+l)/Q$ auch das Volumen der verdrängten Luftmasse bedeutet, welche das specifische Gewicht λ hat, so ist $l = \lambda(w+l)/Q$, woraus $l = w\lambda/(Q-\lambda)$. Den letzteren Wert für l in s eingesetzt, erhält man obigen Ausdruck.

Beispiel. Ein Stück Silber wiege in der Luft . . $m = 24{,}312$ gr
im Wasser von $19{,}4^0$ . . . . 21,916 gr
so ist der scheinbare Gewichtsverlust im Wasser $w = 2{,}396$ gr

Das unkorrigirte specifische Gewicht würde also sein

$$m/w = 24{,}312/2{,}396 = 10{,}147.$$

Das korrigirte erhält man, da nach Tab. 4 für $19{,}4^0$ $Q = 0{,}99835$,

$$s = 10{,}147\,(0{,}99835 - 0{,}00120) + 0{,}0012 = 10{,}119.$$

Man rechnet im Kopf, wenn man $0{,}99835 - 0{,}00120 = 1 - 0{,}00285$ setzt.

Der Einfluſs des Gewichtsverlustes in der Luft verschwindet nur, wenn die Dichtigkeit gleich Eins ist. Er erreicht für $s = 20$ den Wert 0,023. Würde man noch die Ausdehnung des Wassers vernachlässigen, so könnte hier ein um 0,08 zu groſses Resultat entstehen.

II. Korrektion wegen Temperaturschwankungen bei Beobachtungen mit dem Pyknometer oder dem Glaskörper.

Neben der vorigen Korrektion ist noch, falls die Temperatur zwischen den verschiedenen Wägungen sich geändert hat, folgendes zu berücksichtigen.

Die Wägung mit, bez. im Wasser, bei der Temperatur t_0 ausgeführt, habe das scheinbare Nettogewicht bez. den Auftrieb w_0 ergeben. Man sucht aber im allgemeinen die entsprechende Gröfse (w) für eine andere Temperatur t, bei der die Wägung mit, bez. in der zu bestimmenden Flüssigkeit (oder etwa nach Einbringen eines festen Körpers ins Pyknometer) angestellt wurde. Die Dichtigkeit des Wassers bei t_0 und t sei Q_0 und Q; der kubische Ausdehnungskoefficient des Gefäfses oder des Senkkörpers (1/40000 für mittleres Glas) heifse 3β. Dann ist $w = w_0 [1 + 3\beta (t - t_0)]\, Q / Q_0$, oder auch genau genug

$$w = w_0 + w_0 [(Q - Q_0) + 3\beta (t - t_0)]. \qquad 2.$$

Dieses w ist in Formel 1, S. 67 einzusetzen.

Denn nach Formel 8 S. 9 kann man schreiben

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1 - (1 - Q)}{1 - (1 - Q_0)} = 1 + (Q - Q_0).$$

$(Q - Q_0) \cdot 3\beta t (t - t_0)$ ist zu vernachlässigen.

Oberhalb 4^0 ist natürlich $Q - Q_0$ negativ, wenn $t > t_0$ ist. Der ganze in steile Klammern gesetzte Ausdruck läfst sich für gewöhnliches Glas aus Tab. 4 als die Differenz der im zweiten Teil für t_0 und t gegebenen Zahlen entnehmen, wobei die für t geltende von der für t_0 geltenden abzuziehen ist.

Besonders bei der Dichtebestimmung fester Körper mit einem relativ grofsen Pyknometer sind diese Korrektionen nicht zu vernachlässigen.

III. Zusammenfassung aller Korrektionen bei wiederholtem Gebrauch desselben Pyknometers oder Glaskörpers.

Es sei das scheinbare Gewicht der Pyknometerfüllung mit Wasser oder der scheinbare Auftrieb des Glaskörpers im Wasser bei t_0 gleich w_0 bestimmt worden. Man stellt den Ausdruck

$$W = w_0 \frac{1 + 3\beta (t - t_0)}{Q_0 - 0{,}00120}$$

über das bei den Wägungen mit oder in den anderen Flüssigkeiten vorkommende Temperaturintervall in einer Tabelle oder Kurve dar. Für eine Bestimmung bei t entnimmt man hieraus den Wert W und berechnet nun das (natürlich für t geltende) spec. Gewicht s, wenn m das scheinbare Gewicht der Flüssigkeitsfüllung oder den scheinbaren Auftrieb in der Flüssigkeit bedeutet,

$$s = \frac{m}{W} + 0{,}00120.$$

Beweis durch Vereinigung der Formeln 1 u. 2 S. 67 u. 69.

IV. Reduktion auf eine Normaltemperatur.

s gilt für die Wägungstemperatur t. Für einen festen Körper ist t seine Temperatur im Wasser.

Hieraus wird die Dichtigkeit S bei einer anderen Temperatur T mit Hilfe des kubischen Ausdehnungskoefficienten α (oder 3β; Tab. 11) gefunden $S = s[1 + \alpha(t - T)]$.

Die meisten Flüssigkeiten haben eine ungleichförmige Ausdehnung, welche aus Formeln oder aus Tabellen entnommen werden mufs. Die Volumina derselben Flüssigkeitsmenge seien für die Temperaturen T und t gleich V und v angegeben. Dann ist $S = s \cdot v/V$.

Vgl. Tab. 3a u. 12 sowie Hofmann-Schädler, Tabellen für Chemiker; Gerlach, Salzlösungen; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt u. Börnstein Tab. 30 ff.

17. Volumenometer (Say, Kopp).

Das Instrument bezweckt die Dichtebestimmung eines Körpers, der nicht in Berührung mit einer Flüssigkeit kommen soll. Zur Anwendung kommt das Boyle'-Mariotte'sche Gesetz, wonach bei ungeänderter Temperatur das Produkt aus Druck und Volumen einer Luftmasse konstant ist.

Eine konstante Luftmenge ist über Quecksilber zunächst unter dem Druck H mm Quecksilber (meist dem atmosphärischen Barometerstand) abgesperrt. Man vergröfsere bez. vermindere das ursprüngliche, zu bestimmende Volumen V um die gemessene Gröfse v und beobachte die dabei stattfindende Druckänderung h mm Quecksilber, so ist $VH = (V \pm v) \cdot (H \mp h)$, also

$$V = v\,\frac{H - h}{h} \quad \text{bez.} \quad = v\,\frac{H + h}{h}.$$

Nachdem so das Volumen des leeren Gefäfses gemessen worden ist, bringt man den Körper hinein und verfährt ebenso. Ergibt die Messung jetzt bei der Druckhöhe H als Ausgangsvolumen V', so ist $V - V'$ das Volumen des Körpers, die Dichtigkeit ist also sein Gewicht, dividirt durch diese Differenz.

v und h dürfen nicht zu klein sein, wenn ein brauchbares Resultat entstehen soll. — Man vermeide Temperaturänderungen der abgeschlossenen Luftmenge durch die Nähe des Körpers u. s. w. während des Versuches.

Ein bequemes Volumenometer, dem Jolly'schen Luftthermometer ähnlich angeordnet, s. bei Paalzow, Wied. Ann. 13, 332. 1881; in einfacherer Anordnung Oberbeck, ib. 67, 209. 1899.

18. Umrechnung der Zustände von Gasen. Berechnung der Dichtigkeit der Luft oder eines anderen Gases.

Bei konstanter Temperatur ist die Dichtigkeit s eines vollkommenen Gases seinem Drucke H proportional oder das Volumen v dem Druck umgekehrt. Es gilt also (Gesetz von Boyle u. Mariotte; 1662 u. 1679)

$$s : s' = H : H' \quad \text{und} \quad v : v' = H' : H \quad \text{oder} \quad v \cdot H = \text{Const.}$$

Bei konstantem Druck dehnt sich ein Gas für jeden Grad Temperaturerhöhung um gleich viel aus, nämlich um 1/273 oder 0,00367 des Volumens v_0, welches ihm bei 0° zukommt. Also gilt (Gesetz von Gay-Lussac; 1802)

$$v = v_0 (1 + 0{,}00367\, t) = v_0 (1 + \tfrac{1}{273}\, t) \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{273} v_0 (273 + t).$$

$273 + t$, d. h. die Temperatur auf der Centesimalskale gezählt, aber von $-273°$C als Nullpunkt, mit anderen Worten, wenn man an den Eispunkt statt 0 die Zahl $+273$ schreibt, heifst die absolute Temperatur T.

Zusammengehörige Volumina v, Dichtigkeiten s, Drucke H und Temperaturen t einer bestimmten Gasmasse sind hiernach verbunden, aufser durch $v \cdot s = \text{Const.}$ durch die Beziehungen

$$\frac{Hv}{1 + 0{,}00367\, t} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{Hv}{T} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{H}{sT} = \text{Const.}$$

Durch die Kombination der Gesetze von Boyle (Mariotte) und von Gay-Lussac wird nach obigem also aus einem, durch die zusammengehörenden bekannten Werte s_0, v_0, H_0, t_0 definirten Zustande eines vollkommenen Gases für einen anderen Zustand s, v, H, t abgeleitet, wenn $\alpha = 0{,}00367$ oder $\frac{1}{273}$ ist:

$$s = s_0 \frac{1 + \alpha t_0}{1 + \alpha t} \frac{H}{H_0} \qquad v = v_0 \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \frac{H_0}{H} \qquad H = H_0 \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \frac{v_0}{v}$$

oder endlich $273 + t = (273 + t_0) \dfrac{v}{v_0} \dfrac{H}{H_0}$.

Von dem idealen Zustand weichen die wirklichen Gase mehr oder weniger ab, besonders die leichter kondensirbaren, die im allgemeinen eine etwas gröfsere Ausdehnung zeigen. Der wirkliche Druck (Spannung) wird mit sinkender Temperatur und meist auch mit steigender Dichtigkeit kleiner als der berechnete. Man unterscheidet bei Messungen wohl den Temperaturkoefficienten der Ausdehnung bei konstantem Druck und den im allgemeinen etwas gröfseren der Spannung bei konstantem Volumen.

Der wirkliche Zustand läfst sich, wenn V für die Masseneinheit gilt, nach v. d. Waals (andere Formeln z. B. von Clausius) darstellen durch

$$\frac{1}{T}\left(H+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=\text{Const.}$$

a und b sind Konstanten des einzelnen Gases; für CO_2 z. B. $a=0{,}00874$, $b=0{,}0023$, Const$=0{,}00369$, wenn für den Druck die Atmosphäre und für V das Volumen bei 1 Atm. und 273° als Einheit angenommen wird.

Gilt bei einem vollkommenen Gase s_0 für 0° und 760 mm Quecksilberdruck, so ist für t und H mm

$$s=s_0\frac{1}{1+\alpha t}\cdot\frac{H}{760}.$$

Die Dichtigkeit (das spec. Gewicht) der trockenen atmosphärischen Luft für 0° und 760 mm ist $\lambda_0=0{,}001293$ (Regnault). Der Temperatur t und dem auf 0° reducirten Quecksilberdruck H (vgl. **37**) entspricht also die Dichtigkeit

$$\lambda=\frac{0{,}001293}{1+\alpha t}\cdot\frac{H}{760}. \tag{1}$$

Man findet diese Gröfse in Tab. 6. Das sp. Gewicht eines anderen Gases für H und t wird man häufig am einfachsten aus der auf Luft bezogenen Gasdichte d (Tab. 2) als $s=\lambda\cdot d$ berechnen.

Ist ein Gasvolumen v über einer Flüssigkeit (z. B. Wasser) gemessen, mit deren Dämpfen der Raum v gesättigt ist, so erhält man nach dem Dalton'schen Gesetz den Druck des trockenen Gases, indem man von dem Gesamtdruck die Sättigungs-Dampfspannung der Flüssigkeit abzieht. Für Wasser vgl. Tab. 13.

Dichtigkeit feuchter Luft. Die feuchte atmosphärische Luft kann bis zu 1% leichter sein, als cet. par. trockene Luft. Wasserdampf ist nahe $\frac{5}{8}$ so dicht wie Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur. Man findet also die Dichtigkeit feuchter Luft, wenn die Spannkraft (der Druck) des Wasserdampfes in derselben $=e$ ist (**47**), indem man $\frac{3}{8}e$ von dem gesamten Druck (Barometerstand) abzieht und mit dem so korrigirten Werte H in Tab. 6 oder die obige Formel eingeht.

Unter der Annahme, daſs die Luft zur Hälfte mit Wasserdampf gesättigt sei, kann man für Zimmertemperatur nahe so rechnen, daſs man für H den ganzen Druck nimmt, aber die Formel anwendet

$$\lambda = \frac{0{,}001295}{1 + 0{,}004 \cdot t} \cdot \frac{H}{760}. \tag{2}$$

Die gröſsten relativen Abweichungen vom Werte Gl. 1 mögen im Freien etwa $\pm \frac{1}{3000}$ betragen. Im Zimmer treten Schwankungen durch den Kohlensäuregehalt hinzu, die $\frac{1}{1000}$ betragen können, also bei feinen Bestimmungen zu beachten sind.

Die Ausdrücke $1 + 0{,}00367\,t$ und $H/760$ s. in Tab. 7.

18a. Eudiometer (Volta).

Dasselbe dient zunächst zur Sauerstoffbestimmung der Luft. Ein einseitig geschlossenes starkes Glasrohr ist sowohl nach Volumen wie nach Länge geteilt. Zwei, nahe dem geschlossenen Ende eingeschmolzene Platindrähte lassen ein brennbares Gasgemisch durch einen elektrischen Funken (Elektrisirmaschine, Elektrophor, Induktorium) entzünden.

Das Eudiometer wird, luftfrei mit Quecksilber gefüllt, über Quecksilber umgestürzt, dann die zu analysirende Luft trocken eingeleitet und ihr Volumen v_1, Druck H_1 (Barometerstand minus gehobene Quecksilberhöhe) und Temperatur t_1 gemessen. Man fügt trockenen Wasserstoff (8, 3) im Überschuſs gegen den Sauerstoff hinzu und bestimmt die jetzigen Gröſsen v_2, H_2 und t_2.

Man preſst das Rohr auf einen am Boden der Wanne befestigten Kork, läſst den Funken durchschlagen und miſst dann v_3, H_3 und t_3.

Das in der Volumeinheit enthaltene Sauerstoffvolumen berechnet sich, wenn die drei Temperaturen gleich sind, zu

$$\frac{1}{3}\,\frac{v_2 H_2 - v_3(H_3 - e)}{v_1 H_1},$$

wo e die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfs bei t_3 bedeutet (Tab. 13). Wechselte die Temperatur, so ist jedes vH, bez. $v_3(H_3 - e)$ durch sein $1 + \alpha t$ zu dividiren.

Beweise einfach aus **18**.

Genaueres und eudiometrische Methoden für andere Gase s. Bunsen, gasometrische Methoden; Hempel, gasanalytische Methoden, 3. Aufl. 1900.

19. Bestimmung der Dampfdichte.

Ungesättigte Dämpfe folgen den Gasgesetzen; Gase sind ja ungesättigte Dämpfe.

Dampfdichte d nennt man die Dichtigkeit eines Dampfes (oder Gases) bezogen auf trockene atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und Spannung (Druck) als Einheit. — Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur enthalten nach dem Avogadro'schen Gesetz gleiche Volumina der verschiedenen Gase und Dämpfe eine gleiche Anzahl Moleküle; mit anderen Worten, die Molekularvolumina aller Gase und Dämpfe sind dann einander gleich. Die Dampfdichte ist gleich dem Molekulargewicht geteilt durch 28,95; z. B. für Wasser H_2O gleich $18/28{,}95 = 0{,}623$.

Die Chemie pflegt statt der Luft ein Gas von dem 32ten Teil der Dichtigkeit des Sauerstoffs als Einheit zu nehmen, d. h. die auf Luft bezogene Dampfdichte mit $\frac{32}{1{,}1052} = 28{,}95$ zu multipliciren. Hierdurch wird die Dampfdichte einfach gleich dem Molekulargewicht im Dampfzustande, weil gasförmiger Sauerstoff (O_2) das Mol.-Gew. 32 hat.

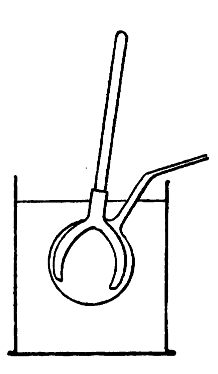
Jedes Gramm-Molekül, d. h. so viel Gramme, wie das chemische Molekulargewicht des Körpers angibt, hat bei 760 mm Quecksilberdruck und der Temperatur t in Dampfform das Volumen $22{,}4(1 + 0{,}00367\,t)$ Liter.

Bei manchen Dämpfen wird das Molekül mit wachsender Temperatur kleiner (Dissociation); die wirkliche Dampfdichte d ist dann kleiner als die berechnete d_0. Man nennt bei dem Zerfall in zwei Moleküle $\frac{d_0}{d} - 1$, allgemein bei dem Zerfall in n Moleküle $\left(\frac{d_0}{d} - 1\right) \cdot \frac{1}{n-1}$ den Dissociationsgrad, d. h. das Verhältnis der Zahl der Moleküle, welche sich gespalten haben, zu der ursprünglichen Gesamtzahl.

A. Wägung eines bekannten Dampfvolumens (Dumas, 1827).

Ein leichter, $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{4}$ Liter fassender Glaskolben mit angeblasener Röhre, der eine Atmosphäre äuſseren Überdrucks aushält (also keinen eingezogenen Boden haben soll), wird gut gereinigt und mittels Erwärmens und gleichzeitigen Aussaugens durch ein eingeführtes Röhrchen so getrocknet, daſs nichts Dampfbildendes darin ist. Das Rohr wird dann in eine Spitze von etwa 1 qmm Öffnung ausgezogen und so gewogen. Nun bringt man einige Gramm der zu bestimmenden Flüssigkeit in den Kolben, dadurch daſs man ihn erwärmt und die Flüssigkeit während des Abkühlens einsaugen läſst.

Der Kolben wird dann mit einem geeigneten Halter (z. B. Fig.) gefaſst und so in ein Bad gebracht, daſs die offene Spitze



herausragt; das Bad werde 10—20° über den Siedepunkt der zu verdampfenden Flüssigkeit erhitzt. Ist alle Flüssigkeit verdampft, so schmelzt man den Ballon mit der Stichflamme vollständig zu, am sichersten durch Abziehen der Spitze, und liest die Temperatur des Bades und den Barometerstand ab.

Nach dem Entfernen aus dem Bade läfst man durch Umkehren des Kolbens den durch Abkühlen verdichteten Tropfen an die Spitze fliefsen und überzeugt sich, dafs hier keine Luft eintritt. Darauf wird der abgekühlte und gut gereinigte Ballon, ev. nebst der abgezogenen Spitze, wieder gewogen, unter Beobachtung der Temperatur im Wagekasten und des Hygrometers sowie, falls ein gröfserer Zeitraum zwischen dem Zuschmelzen und der Wägung liegt, auch des Barometers.

Endlich hält man die Ballonspitze in vorher ausgekochtes oder unter der Luftpumpe luftfrei gemachtes Wasser [oder in Quecksilber], feilt sie an und bricht sie ab, worauf die Flüssigkeit in den Ballon steigt. Der gefüllte Ballon nebst der abgebrochenen Spitze wird wiederum gewogen, wozu eine gröbere Wage genügt.

Es sei m das Gewicht des mit Luft gefüllten Ballons;
m' „ „ „ „ Dampf „ „
M „ „ „ „ Wasser [od. Quecks.] „
t und b bei dem Zuschmelzen Temperatur des Dampfes und Barometerstand;
t' und b' bei der Wägung des Dampfes Temperatur im Wagekasten und Barometerstand. Von b' (aber nicht von b) sei $^3/_8$ der Spannkraft des Wasserdampfes (**47**) im Wagezimmer abgezogen (vgl. **18**);
λ' die Dichtigkeit der Luft, wie sie zu t', b' aus **18** oder aus Tab. 6 gefunden wird.

I. Die Dampfdichte ist dann, falls mit Wasser gewogen wurde,

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}\,\frac{1}{\lambda'} + 1\right)\frac{b'}{b}\,\frac{1+0{,}00367\cdot t}{1+0{,}00367\cdot t'}.$$

[Für Quecksilber $13{,}56/\lambda'$ anstatt $1/\lambda'$.]

Beweis. Bezeichnen D und L den Dampf bez. die Luft im Ballon,

so ist offenbar $D-L=m'-m$, also $D=m'-m+L$. Die Dampfdichte d würde, wenn der Dampf wie die Luft t' und b' gehabt hätte, einfach dargestellt werden durch $d=D/L=(m'-m)/L+1$, oder, da $L=\lambda'(M-m)$ ist, durch $d=\frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda'}+1$. Der Faktor $\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}00367\cdot t}{1+0{,}00367\cdot t'}$ kommt hinzu, da der abgesperrte Dampf nicht t' und b', sondern t und b gehabt hat.

II. Genauere Formel: mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Glases und des Wassers und auf den Gewichtsverlust des Wassers in der Luft. Es sei

Q die Dichtigkeit des zur Wägung angewandten Wassers (Tab. 4) [oder Quecksilbers Tab. 2 u. 12)];

3β der kubische Ausdehnungskoefficient des Glases $=0{,}000025=1/40000$ (vgl. auch 8, 5); so ist

$$d=\left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{Q-\lambda'}{\lambda'}+1\right)\left[1-3\beta(t-t')\right]\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}00367\cdot t}{1+0{,}00367\cdot t'}.$$

Beweis ähnlich wie in **16.** — Der Dichtigkeitsunterschied des zurückgebliebenen Tropfens vom Wasser ist in der Formel vernachlässigt.

III. Wenn der Ballon sich nach Abbrechen der Spitze unter Wasser nicht ganz füllt, so hat der Dampf die Luft nicht vollständig verdrängt. Will man hierauf keine Rücksicht nehmen, so fülle man vor der Wägung vollständig mit der Spritzflasche und rechne nach den früheren Formeln. Anderenfalls tauche man den Ballon nach dem Abbrechen der Spitze so weit ein, daſs die innere und äuſsere Oberfläche gleich hoch steht, und wäge ihn so weit gefüllt. Erst dann füllt man den Rest mit Flüssigkeit und führt die Wägung M aus. Wir setzen

Das Gewicht des partiell mit Wasser [oder Quecksilber] gefüllten Ballons $=M'$.

Dann ist die Dampfdichte

$$d_0=\frac{(m'-m)\,Q/\lambda'+M'-m'}{(M-m)\frac{b}{b'}\frac{1+0{,}00367\,t'}{1+0{,}00367\,t}\left[1+3\beta(t-t')\right]-(M-M')}.$$

R. Kohlrausch, Prakt. Regeln z. Bestimmung d. spec. Gewichtes.

Beweis. Das Volumen der Luftblase bei der Temperatur der Füllung ist $=(M-M')/(Q-\lambda')$; es war also bei dem Zuschmelzen

$$v=\frac{M-M'}{Q-\lambda'}\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}00367\,t}{1+0{,}00367\,t'}.$$

Der Ausdruck d unter II ist demnach die Dampfdichte eines Gemisches der Volumina v Luft und $V-v$ Dampf, und es ist, wenn wir die Dichte des reinen Dampfes durch d_0 bezeichnen, $Vd=v+(V-v)d_0$, woraus $d_0=(Vd-v)/(V-v)$.

Hierein den Wert für d unter II, den obigen Wert für v, endlich $V = (M - m)/(Q - \lambda') \cdot [1 + 3\beta(t - t')]$ eingesetzt, findet sich nach einigen Umformungen, zum Teil mittels der Formeln S. 9 der Ausdruck unter III.

Beispiel. Es wurde gefunden:

$m = 29,6861$ gr (Luft), $M = 142,41$ gr (ganz mit Wasser);
$m' = 29,8431$ gr (Dampf), $M' = 141,32$ gr (teilweise mit Wasser);
ferner $b = 745,6$ mm, $t = 99,^0 5$ (beim Zuschmelzen);
$b' = 742,2$ mm, $e = 9,4$ mm, $t' = 18,^0 7$ (beim Wägen mit Dampf).

Das Wasser zur Wägung hatte $17,^0 4$, also (Tab. 4) $Q = 0,9988$.
Man findet (18) $\lambda' = 0,001182$ ohne Rücksicht auf e,
$\lambda' = 0,001176$ mit „ „ „

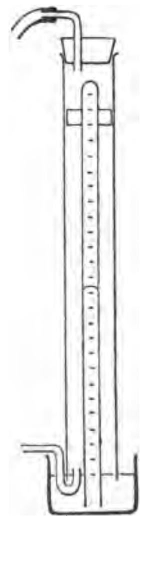
Nach der richtigen Formel III erhält man die Dampfdichte 2,777; II ergiebt 2,755, I 2,765. Die Vernachlässigung von e macht die Zahlen um 0,006 gröſser.

Die auf Sauerstoff = 32 bezogene Dampfdichte oder das Molekulargewicht des Dampfes ist also (wenn O = 16; vgl. S. 74) $2,777 \cdot 28,95 = 80,4$.

Den Ausdruck $1 + 0,00367\,t$ siehe in Tab. 7. Sonst schriebe man bequemer

$$\frac{272,5 + t'}{272,5 + t} \text{ statt } \frac{1 + 0,00367\,t'}{1 + 0,00367\,t}.$$

B. Messung des Dampfvolumens einer gewogenen Flüssigkeitsmenge. (Gay-Lussac 1812; Hofmann 1867.)



Ein dünnwandiges Glaskügelchen, dessen Ansatzröhrchen man nach dem Füllen zuschmelzen oder, wenn es sehr fein ist, auch offen lassen kann, oder ein ganz kleines Fläschchen mit eingeriebenem Stöpsel, von etwa $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ ccm Inhalt, wird zuerst leer und dann mit der Substanz, deren Dampfdichte bestimmt werden soll, gewogen. Gläschen und Inhalt läſst man in einer mit trockenem und luftfreiem Quecksilber (8, 1) gefüllten und über Quecksilber umgestürzten Glasröhre aufsteigen, die von dem geschlossenen Ende an geteilt ist, entweder nach cm^3 oder einfach in mm, die nach 23 in Volumen verwandelt werden. Ist die Flüssigkeit leicht flüchtig, so kann das Gläschen schon während des Aufsteigens springen und durch das in das Vakuum geschleuderte Quecksilber das Rohr zertrümmern. Dies wird dadurch verhindert, daſs man während

des Aufsteigens die Glasröhre so weit neigt, dafs das Quecksilber oben fest anliegt!

Nun umgibt man das Mefsrohr mit dem Heizmantel (Fig.) und erwärmt durch einen geeigneten Dampfstrom zu einer Temperatur, die mindestens etwa 10^0 über derjenigen liegen soll, bei welcher die ganze Flüssigkeit gerade verdampft ist. Für nicht schwer flüchtige Körper genügt Wasserdampf. Es bedeute

m das Gewicht der verdampften Substanz in gr,

t, v Temperatur und Volumen des Dampfes in cm^3; ist v_0 das Volumen der Dampf-gefüllten Glasröhre bei 18^0, so ist $v = v_0\,[1 + 0{,}000025\,(t - 18)]$ zu setzen,

b den äufseren Barometerstand,

h die Höhe der Quecksilbersäule, über welcher der Dampf sich befindet; b und h auf 0^0 reducirt (**37**),

e die Dampfspannung des Quecksilbers für die Temp. t (Tab. 18).

Dann ist m/v das auf Wasser bezogene sp. Gewicht des Dampfes. Um die auf Luft von gl. Temp. u. gl. Druck bezogene Dampfdichte d zu finden, hat man also m/v zu dividiren durch das zum Druck $b - h - e$ und zu t gehörige spec. Gewicht der Luft $\frac{0{,}001293}{1 + 0{,}00367\,t}\,\frac{b - h - e}{760}$.

Also ist
$$d = \frac{m}{v}\,\frac{1 + 0{,}00367\,t}{0{,}001293}\,\frac{760}{b - h - e}.$$

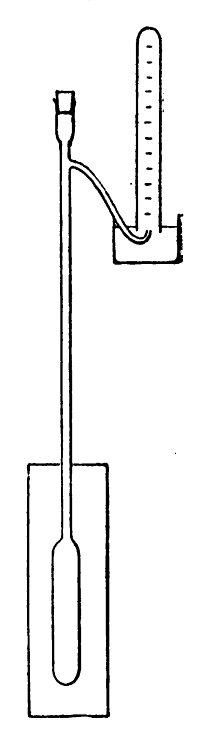
C. Durch Luftverdrängung. (V. Meyer, 1878.)

Das Dampfvolumen einer gewogenen kleinen Menge der Substanz wird aus der bei der Verdampfung verdrängten Luftmenge ermittelt.

Ein Glas-, oder für hohe Temperatur Porzellan-Kölbchen mit Steigrohr und einem engen, etwa 1 mm weiten Gas-Entbindungsrohre (Fig.), gut ausgetrocknet, mit etwas Asbest am Boden, wird — im Luftbade oder im Dampfbade von Wasser, Anilin (184^0), Schwefel (445^0), oder auch in Paraffin (bis über 300^0), Salpetergemisch (230 bis 600^0), Blei (über 330^0) etc. (Tab. 11 u. 12; auch 8, 27) — auf die erforderliche Temperatur oberhalb des Siedepunktes der untersuchten Substanz gebracht. Man wartet, bis

die Temperatur konstant geworden ist, d. h. bis aus dem Entbindungsrohre unter Wasser keine Luftblasen mehr entweichen.

Die Substanz hat man, wenn nötig, in ein Körbchen oder Glasröhrchen, oder wenn sie flüssig ist, in ein Fläschchen oder ein ganz gefülltes, zugeschmolzenes Glaskügelchen (welches durch die Ausdehnung der Substanz springt) eingewogen. Man lüftet den Kork, wirft rasch die Substanz in den Kolben und schliefst die Öffnung sofort wieder. Alsdann schiebt man über das Gasentbindungsrohr einen mit Wasser gefüllten Mefscylinder, fängt in ihm die Luft auf, welche durch die verdampfende Substanz verdrängt wird, und liest ihr Volumen ab.



In mancher Hinsicht bequemer als der Kork, bei welchem man sehr rasch verfahren mufs, ist ein über den Rand des Verdampfungsrohres gestülpter kurzer, gut schliefsender Kautschukschlauch, in den ein vorn zugeblasenes (Fig.), oder, damit man bei zufälliger Temperaturerniedrigung das Eintreten von Wasser in das Rohr vermeiden kann, durch einen Hahn verschliefsbares Glasröhrchen gesteckt ist. In das letztere hat man den einzuwerfenden Körper gebracht und läfst ihn im geeigneten Zeitpunkt durch Aufrichten des Röhrchens hinunterfallen. Oder man hält den Körper mit einem luftdicht von der Seite eingeführten Stäbchen, durch dessen Zurückziehen man ihn hinunterfallen läfst. (Fig.)

Es ist wesentlich, dafs der Vorgang in kurzer Zeit verläuft, damit u. A. kein Dampf in die kälteren Teile des Rohres gelangt, wo er sich kondensirt und das Volumen zu klein finden läfst. Daher soll die Temperatur des Bades beträchtlich über dem Siedepunkte der Substanz liegen. (Länger dauernde Luftentbindung kann eine Zersetzung der Substanz anzeigen.)

Es sei m die eingebrachte Substanz in gr,

v das gemessene Luftvolumen in cm^3,

t die Zimmertemperatur,

H der Druck, unter welchem die gemessene Luft steht, in mm Quecksilber von 0°,

dann ist die gesuchte Dampfdichte

$$d = \frac{m}{v} \frac{760}{H} \frac{1 + 0{,}004\,t}{0{,}001293} = 587800 \frac{m}{Hv} (1 + 0{,}004\,t).$$

Der Dampf hat nämlich eine Luftmenge verdrängt, welche unter gleichen Verhältnissen das gleiche Volumen besafs. Folglich ist das Dampfgewicht m, geteilt durch das Gewicht dieser Luftmenge, die gesuchte Dampfdichte. Die gemessene Luft aber wiegt $v \frac{0{,}001293 \cdot H}{(1 + 0{,}004t) \cdot 760}$, wonach man ohne weiteres den obigen Ausdruck erhält. Der Faktor 0,004 ist anstatt des Ausdehnungskoefficienten 0,00367 genommen, um der Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen. Er entspricht in gewöhnlicher Temperatur ungefähr der Annahme, dafs die Luft im Kolben zweidrittel gesättigt, diejenige, welche über dem Wasser gemessen wird, ganz gesättigt ist. Vgl. V. Meyer, Ber. d. chem. Ges. 1878, S. 2253.

Der Druck H ist gleich dem Barometerstande b, vermindert um die in Quecksilber umgewandelte Druckhöhe h der Wassersäule unter der Luft: $H = b - \frac{1}{13{,}6} h$. Taucht man bei der Ablesung das Mefsrohr bis zur Gleichstellung der inneren und äufseren Oberfläche in das Wasser, so ist $H = b$.

Behufs genauer Bestimmung und Rechnung hätte man noch das Volumen v' des etwa mit eingeworfenen Fläschchens zu berücksichtigen. War ferner der Glaskolben vorher mit trockener Luft gefüllt worden, so rechnet man hinreichend genau

$$d = \frac{587800}{v/(1 + 0{,}00367\,t) + v'/(1 + 0{,}00367\,t')} \frac{m}{H - e}.$$

e bedeutet die Spannkraft des Wasserdampfes bei der Temperatur t (Tab. 13), t' die Heiztemperatur des Bades, die nur genähert bekannt zu sein braucht.

Dissociirte Dämpfe unterliegen der unter Umständen beträchtlichen Fehlerquelle, dafs in dem Diffusionsgebiet gegen die Luft ihr Dissociationsgrad, der mit verminderter Dichtigkeit des Dampfes wächst, ein anderer ist als in dem untersten Raume.

Über eine Anordnung, um mit vermindertem Druck zu arbeiten, s. Lunge u. Neuberg, Ber. Deut. Chem.-Ges. 1891 I, 729.

D. Durch Metallverdrängung.

Der verdampfende abgewogene Körper (vgl. B und C) verdrängt eine Flüssigkeit, welche selbst eine geringe Dampf-

spannung besitzt (in niederer Temperatur Quecksilber, Hofmann, vgl. Tab. 18; in höherer Temperatur Wood'sches Metall, V. Meyer, Ber. d. D. Chem. Ges. 1876, 1216; 1877, 2068). Es bedeute

m das Gewicht der verdampfenden Substanz,
M, s und M', s' das Gewicht bez. das specifische Gewicht des Metalls vor und bei der Verdrängung,
t die Zimmertemperatur,
T die Bad-Temperatur, z. B. 445° für siedenden Schwefel,
β den Ausd.-Koefficienten des Gefäfses,
b den Barometerstand,
h die Druckhöhe des flüssigen Metalls im anderen Schenkel.

Dann erhält man die Dampfdichte

$$d = \frac{m}{\frac{M}{s}[1 + 3\beta(T - t)] - \frac{M'}{s'}} \cdot \frac{760(1 + 0{,}00367\,T)}{\left(b + \frac{hs'}{13{,}56}\right) 0{,}001293}.$$

Den letzten Faktor siehe in Tab. 6. Die specifischen Gewichte sind bei einer Temperatur t

für Quecksilber $13{,}60\,(1 - 0{,}00018 \cdot t)$
für Wood'sches Metall $9{,}6\;(1 - 0{,}00009 \cdot t)$.

20. Gasdichte-Bestimmung.

Die Gasdichte soll, wie im Vorigen die Dampfdichte, auf Luft von gl. Temp. u. gl. Druck bezogen werden. Für die Umrechnungen kommen die Gasgesetze von 18 in Betracht. — Über Herstellung einiger Gase und deren Trocknen s. 8, 3.

A. Durch Wägung.

Um die Dichte eines permanenten Gases zu bestimmen, füllt man mit ihm einen Glasballon mit angeschmolzenem Glasrohr (am bequemsten mit Hahnverschlufs), etwa indem man den Ballon zunächst mit Quecksilber füllt, ihn über einer Quecksilberwanne umstürzt und nun das Quecksilber durch das aufsteigende Gas verdrängen läfst. Der Ballon wird, wenn das Quecksilber innen und aufsen gleich hoch steht, d. h. unter Atmosphärendruck, geschlossen und gewogen (m'). Dann wird das Gas durch einen hinreichenden Luftstrom (Luft des Wägezimmers, nicht getrocknet) verdrängt und der Ballon offen gewogen (m). Endlich habe die Wägung mit Wasser oder

Quecksilber das Gewicht M ergeben. Wie in **19 A** sollen b und t den Barometerstand und die Temperatur im Augenblick des Abschliefsens des Gases bedeuten, t' und b' gelten für die Wägung des mit Gas gefüllten Ballons. Dann berechnet man die Gasdichte nach der Formel I oder genauer II in **19 A**.

Eine etwa bei der Füllung zurückgebliebene Quecksilbermenge läfst man bei allen Wägungen ungeändert.

Verfügt man über eine hinreichend grofse Menge des Gases, so kann man auch ein Glaskölbchen (oder das Pyknometer, vierte Fig. S. 59) mit zwei Ansatzrohren verwenden, aus welchem man die Luft durch einen anhaltenden Gasstrom verdrängen läfst. Ist das Gas schwerer als Luft, so füllt man durch das lange Rohr und umgekehrt. Für eine genäherte Bestimmung kann sogar ein beliebiges enghalsiges Fläschchen oder Kölbchen von 100 bis 200 cm^3 genügen. Je nachdem das Gas schwerer oder leichter ist als Luft, füllt man das aufrecht oder verkehrt stehende Fläschchen durch ein bis an den Boden reichendes enges Röhrchen und verschliefst endlich, indem man das Rohr langsam herauszieht, mit einem Kautschukstöpselchen. Handerwärmung ist zu vermeiden und wegen der Diffusion mufs man nun rasch wägen. Wiegt der Kolben, mit Luft gefüllt m, mit Gas gefüllt m', mit Wasser M, so hat man nach der Formel Seite 75 zu rechnen.

Füllt und wägt man bei derselben Temperatur und demselben Druck, so gilt einfach

$$d = \frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda} + 1.$$

Atmosphärische Schwankungen können auch herausfallen, wenn man als Haupt-Gegengewicht für den Ballon ein ebenso grofses geschlossenes Gefäfs nimmt; man vermeide dabei aber Überlegungsfehler.

Hält der Ballon einseitigen Atmosphärendruck aus, so kann er vor der Gasfüllung mit der Quecksilberluftpumpe (8, 24) evakuirt werden. Wird er dabei leer gewogen (Gewicht $= m_0$) so ist, wenn v das Volumen des Ballons,

$$d = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{m'-m_0}{v} + \lambda' - \lambda_0\right),$$

wo λ_0 und λ' das spec. Gewicht der Luft bei der Leerwägung und der Gas-Wägung bedeuten (18). λ ist für den Druck und die Temperatur des eingefüllten Gases für trockene Luft zu berechnen; Tab. 6.

B. Durch Beobachtung der Ausströmungszeit (Bunsen).

Gasdichten verhalten sich nahe umgekehrt wie die Quadrate der Ausströmungsgeschwindigkeiten, mit denen die Gase unter gleichem Druck aus enger Wandöffnung austreten. Vergleicht man also die Zeit, welche eine bestimmte Gasmenge zum Ausströmen bedarf, mit der Zeit, welche ein gleiches Luftvolumen unter denselben Bedingungen braucht, so gibt das Zeitverhältnis, ins Quadrat erhoben, die Gasdichte.

Der Glascylinder (Fig.) mit Hahn, oben durch einen Schliff mit aufgeschmolzenem dünnen Blech mit ganz feiner Öffnung verschliefsbar, wird über Quecksilber (8, 1) mit trockener, durch ein Wattefilter staubfrei gemachter Luft, bez. mit dem zu bestimmenden Gas gefüllt. Ein mit einer zweiten Bohrung nach der Spitze versehener Hahn ist zum Füllen bequem; sonst benutzt man die obere Öffnung nach Entfernung des Schliffes. Das Gas wird durch einen angesetzten Kautschukschlauch eingeführt. Läfst der Cylinder sich bis an den Hahn in das Quecksilber eintauchen, so füllt man, während man den Cylinder langsam hebt. Andernfalls zieht man ihn so weit heraus, dafs das Quecksilber seinen unteren Rand noch eben abschliefst und leitet nun das Gas so lange durch, bis es die Luft verdrängt hat, was aber ein unsicheres Verfahren ist, weil bei dem Entweichen der Gasblasen leicht etwas Luft in den Cylinder zurückschlägt.

Nun taucht man den Cylinder so tief in das Quecksilber ein, dafs der Schwimmer (Fig.) unsichtbar wird. Das Eintauchen mufs stets bis zu derselben Höhe geschehen. Nach Feststellen des Cylinders wird der Hahn geöffnet. Den Gasstand, welchen das undurchsichtige Quecksilber nicht direkt ablesen läfst, beobachtet man mittels des Schwimmers, der von dem Quecksilber im Cylinder getragen wird und zwei gut sichtbare Marken hat, eine am oberen Ende, die andere einige cm

über dem unteren Ende. Man beobachtet die Zeitpunkte, wann diese Marken eben aus der Quecksilberoberfläche austreten. Irgendwelche dicht über den Marken befindliche Zeichen sollen auf den Austritt vorbereiten.

Beispiel.	Luft	Kohlensäure
Austritt der oberen Marke um	14,3 sec	42,5 sec
„ „ unteren „ „	51,2 sec	1^{min} 27,8 sec
Dauer =	36,9 sec	45,3 sec

Also Kohlensäure, auf Luft bezogen, $d = (45,3/36,9)^2 = 1,507$. Auf Sauerstoff = 32 bezogen, d. h. (vgl. S. 74) Molekulargewicht $= 1,507 \cdot 28,95 = 43,6$ (statt $CO_2 = 44$).

Raummessung.

21. Längenmessung.

I. Strichmafsstab.

Als Material für bessere Mafsstäbe kommt in Betracht, nach abnehmender Wärmeausdehnung geordnet (Tab. 11), Messing, Silber (besonders als Einlage) Neusilber, Stahl, Platiniridium, Glas, Nickelstahl, für kurze Teilungen Quarz.

Nach zunehmender Brauchbarkeit wegen hygroskopischer Längenänderung in der Faserrichtung ordnen sich die gebräuchlichen Hölzer: Pappel, Eiche, Mahagoni, Buche, Kiefer, Linde, Ahorn, Fichte. Die Änderungen durch die gewöhnlichen Luftfeuchte-Schwankungen liegen hier zwischen etwa 8/10000 und 1/10000. Elfenbein wird stark beeinflufst. Ganz unbrauchbar ist Nufsbaum. Paraffiniren der Hölzer hilft nicht viel. Besser schützt Überziehen oder noch vollkommener Tränken mit Schellack.

Vgl. Hildebrand, Wied. Ann. 34, 397. 1888.

1. Freie Ablesung. Die gewöhnlichsten, aus der Parallaxe stammenden Fehler werden dadurch vermieden, dafs man die Teilung mit dem Objekt zusammenfallen läfst, wozu u. A. oft ein durchsichtiger Mafsstab genügt. Andernfalls sichert man das Senkrechtsehen zur Teilung durch einen mit ihr parallelen Spiegel, indem man das Spiegelbild des beobachtenden Auges in den abzulesenden Punkt bringt. Oder man hält durch Visiren nach einem fernen Punkt eine konstante Sehrichtung inne. Am sichersten liest man mittels eines zur Teilung senkrecht blickenden Fernrohrs oder schwachen Mikroskops mit Parallelverschiebung ab.

2. Komparator. a) Ein fester Mafsstab trägt einen parallel verschiebbaren Schlitten mit Mikroskop. Aus einem Kathetometer läfst sich in der Regel durch Anbringung eines Mikroskopes statt des Fernrohres und eventuell durch ein horizontales Gestell, in welchem der Stab befestigt wird, ein solcher „Komparator“ herstellen. Die an dem Mafsstab gemessene Verschiebung, wenn man das Mikroskop folgeweise auf die Enden der zu messenden Länge einstellt, ergibt diese Länge.

Die Bedingung genauer Parallelverschiebung des Schlittens mufs um so strenger erfüllt sein, je weiter der zu messende Gegenstand von der Teilung des Komparators entfernt ist.

b) Es wird mit einem parallel verschiebbaren Mafsstab die zu messende Länge fest verbunden und jeder ihrer Endpunkte folgeweise unter dasselbe feststehende Mikroskop gebracht. Ein zweites festes Mikroskop liest gleichzeitig die Gröfse der Verschiebung auf dem Mafsstabe ab. Je gröfser der senkrechte Abstand der beiden Längen, desto fehlerhafter wirkt eine Abweichung vom Parallelismus.

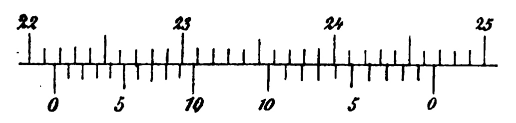
Vorteilhaft wird die zu messende Länge nicht neben, sondern in der Fortsetzung des Mafsstabes befestigt.

Vgl. z. B. den Komparator von Abbe; Pulfrich, ZS. f. Instr. 1892, 307.

c) Einwurfsfrei ist die Messung, wenn das Objekt und der Normalmafsstab unter dem Komparator ausgewechselt werden. Als solcher dient entweder wieder das verschiebbare Mikroskop auf der Teilung oder ein Paar von Mikroskopen, die auf einer Schiene verschoben und festgeklemmt werden können. — Transversalkomparator heifst das Instrument, wenn die Auswechslung von Objekt und Mafsstab bequem mittels eines Schlittens ausgeführt wird.

Überschüsse über ganze Teilstriche des Mafsstabes können in allen Fällen durch Okularmikrometer von bekanntem Teilwert in den Mikroskopen (vgl. unten) bestimmt werden. Im Falle a) auch mit dem am Schlitten befindlichen Nonius.

Bei einer feineren Messung mit Anwendung eines Nonius übersehe man nicht, erstens, dafs der Nonius selbst geprüft sein mufs, zweitens, dafs man aus der etwaigen Fehlertabelle des Mafsstabes den Fehler desjenigen Striches zu nehmen hat, an welchem die Noniusteilung einsteht.



Nonien, die auf Zehntel geteilt sind, haben entweder 9/10 oder 11/10 des Intervalles der Haupt-Teilung als Einheit. Beide gezeichnete Nonien zeigen 0,7 p an. — An Zehntel-mm-Nonien lassen sich leicht aus den Abständen benachbarter Striche auch die Hundertel schätzen.

Den Horizontalabstand zweier Punkte kann man mittels zweier von ihnen herabhängender Coconfäden mit angehängten Gewichten messen, die, um Schwankungen zu vermeiden, in

ruhiges Wasser tauchen mögen. Ebenso mifst man den Durchmesser eines horizontalen Cylinders.

Einen Komparator für Abstände beliebiger Neigung s. bei F. Braun, Wied. Ann. 41, 627. 1890.

3. Teilmaschine. Diese kann zur Messung, besonders auch von kleinen Längen dienen, wenn an dem Schlitten oder an dem Gestell ein Mikroskop mit Fadenkreuz sitzt. Den Wert eines Schraubenganges bestimmt man auf einem Strichmafsstabe. Wegen des toten Ganges stellt man immer von derselben Seite ein.

4. Mikroskop. Für kleine Längen wird am bequemsten ein Mikroskop mit „Okularmikrometer" angewandt. Mit einem als Objekt untergelegten Glasmikrometer von bekanntem Werte wird zuerst der Teilwert des Okularmikrometers bestimmt und dann in leicht ersichtlicher Weise verfahren. Das Okularmikrometer kann selbst aus einer Glasteilung bestehen oder aus einem mit Mikrometerschraube beweglichen Faden oder Fadenpaar, dessen Verschiebung an der Trommel abgelesen wird.

Es ist nicht zu übersehen, dafs konstante Mikroskopvergröfserung eine ungeänderte Stellung des Okularmikrometers gegen das Objektiv voraussetzt, so dass auch die Einstellung immer für dieselbe Sehweite geschehen mufs, z. B. stets mit oder stets ohne Brille.

5. Prüfung eines Strichmafsstabes. Besitzt man einen schon verificirten Mafsstab[1]), so ist die Aufgabe, für einen anderen Stab eine Korrektionstabelle aufzustellen, oben bereits erledigt. Andernfalls vergleicht man die angeblich gleichen Strecken des Mafsstabes mit einer und derselben Länge a und bestimmt dadurch ihr gegenseitiges Verhältnis. Beide unter Nr. 2 erwähnte Komparatoren liefern das Mittel für genaue derartige Messungen. Enthält die Länge L n Unterabteilungen $a_1 a_2 \cdots a_n$, deren Einzellängen $a_1 = a + \delta_1$, $a_2 = a + \delta_2$ etc. bis $a_n = a + \delta_n$ gefunden werden, bezeichnet man dann das Mittel der Unterschiede $1/n \cdot (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) = \delta$, so ist

$$a_1 = L/n - \delta + \delta_1 \qquad a_2 = L/n - \delta + \delta_2 \text{ etc.}$$

1) Durch Vermittelung der Normalaichungskommissionen sind geprüfte Mafsstäbe zu beziehen.

Um die bei einer grofsen Zahl von Vergleichungen sich häufenden Fehler zu vermeiden, wird man sowohl gröfsere wie kleinere Strecken vergleichen, z. B. bei einem in mm geteilten Stabe alle dm, alle cm und alle mm; die letzteren wohl nach Nr. 4. Jede gröfsere Abteilung wird bei der Rechnung ihren Unterabteilungen gegenüber zunächst als Ganzes behandelt.

Über genauere Methoden s. Thiesen, Carl Rep. 15, 680. 1879; Abh. d. Phys. Techn. Reichsanst. II, 97. 1895; Benoît, Trav. et Mém. du Bureau internat. des poids et mesures II, pag. C 35 ff.; Pernet, ib. IV, 87. 1885.

6. Herstellung von Strichmafsen. Die gewöhnliche Teilmaschine benutzt den auf einer Schraube von bekannter Ganghöhe verschiebbaren Schlitten mit Reifserwerk. Um den „toten Gang“ zu eliminiren, stelle man vor jedem Strich immer von derselben Seite ein. Zu Holz, Elfenbein und weichem Metall dient der Stahlstichel, sonst der Diamant. Für feine Glasteilung mit dem Diamant wird das Strichziehen unter Wasser empfohlen. Meistens überzieht man Glas warm mit einer dünnen Wachsschicht, in welche nach dem Erkalten die Teilung eingetragen wird. Die Striche ätzt man glatt ein durch Flufssäurelösung oder „Diamanttinte“, die man mit dem Pinsel aufträgt, oder matt durch Dämpfe von Flufssäure (aus Flufsspatpulver und Schwefelsäure) in einem Bleitroge.

Nach Bunsen kopiert man Teilungen von einem Originalmafsstabe mittels einer langen Stange mit zwei Spitzen. Das Original und der zu teilende Stab werden in dieselbe gerade Linie festgelegt, die eine Spitze wird in die Teilstriche gesetzt, mit der anderen werden kurze Striche gezogen.

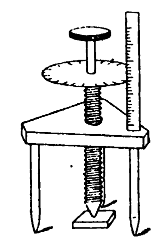
II. Kontaktmafsstäbe.

Den gegenseitigen Abstand zweier Endflächen eines Körpers mifst man, mit geringerer oder gröfserer Genauigkeit, z. B. mittels der unter dem Namen Schustermafs, Fühlhebel, Kontaktschraube käuflichen Längen- und Dickenmesser. Man achte auf die Richtigkeit ihres Nullpunktes, bez. bringe die notwendige Korrektion an.

Einen genauen Dickenmesser nach Abbe s. ZS. f. Instr. 1892, 310.

7. Sphärometer. Zu feinen Dickenmessungen dient die Schraube im Sphärometer; die Höhe des Schraubenganges ist zunächst die Längeneinheit. Die einfachste Form läuft darauf

hinaus, dafs das Sphärometer zuerst mit seinen drei Füfsen auf eine ebene Unterlage gesetzt wird (etwa auf eine Spiegelglasplatte, deren Vorderfläche auf grofse Entfernung unverzerrte Spiegelbilder gibt) und die Mittelschraube gerade bis zur Berührung eingestellt wird (vgl. unten). Diese Stellung wird abgelesen: die Bruchteile des Schraubenganges auf der mit der Schraube drehbaren geteilten Kreisscheibe, die Ganzen durch Zählen der Umgänge oder an dem Mafsstäbchen, an welchem diese Scheibe nahe vorbeistreift.



Dann dreht man die Schraube zurück, zur Sicherheit die Umdrehungen abzählend, legt den Körper unter, dessen Dicke gemessen werden soll, stellt die Schraube wieder zur Berührung ein, liest ab, und nimmt die Differenz gegen die erste Einstellung. Drahtdicken u. dgl. werden zwischen Schneiden oder Platten gemessen. Um die Dicke in mm zu haben, ist diese Differenz mit der angegebenen oder anderweitig ermittelten Höhe eines Schraubenganges zu multipliciren.

Dafs die Schraubenspitze gerade berührt, beurteilt man danach, dafs das Instrument nicht mehr feststeht, sondern um die verstellbare Spitze wackelt oder sich leicht auf derselben drehen läfst. Ein sehr feines optisches Erkennungsmittel können auch die Newton'schen Interferenzstreifen gewähren. Man legt nämlich zwischen Spitze und Unterlage noch eine Glasplatte, deren obere Fläche jetzt die Ausgangsebene darstellt. Unter der Glasplatte entstehen dann diese Streifen, besonders bei der Beleuchtung mit einer Natriumflamme deutlich sichtbar, und die eintretende Berührung wird scharf wahrnehmbar durch eine sofort eintretende Verschiebung der Interferenzstreifen.

An Stelle der ebenen Platte dient als konstante Einstellungshöhe auch wohl ein Fühlhebel oder ein Fühlniveau oberhalb der Schraube. Man stellt dann stets auf denselben Teilstrich des Zeigers oder auf dasselbe Einspielen der Libellenblase ein.

Die Höhe des Schraubenganges wird mit einem Körper von bekannter Dicke oder nach I, 2 oder 3 bestimmt. — Über die Messung eines Krümmungshalbmessers s. **66** I. Über die genaue Prüfung von Schrauben vgl. das Besselsche Verfahren in Weinstein, Mafsbestimmungen, II, 290. 1888. Feinere Konstruktionen von Sphärometern nach Mayer und Bamberg s. z. B. bei Czapski, ZS. f. Instr. 1887, 297.

8. Der Kontaktkomparator für Vergleichung gröfserer Endmafse hat ebenfalls Fühlhebel und Fühlniveau, eventuell in Verbindung mit einer Mikrometerschraube. Die Messungsmethoden sind im Princip einfach.

Korrektionen. 9. Temperatur. Hat man mit einem Mafsstabe von der Normaltemperatur t_0 und vom Ausdehnungskoefficient β_0 (**44** u. Tab. 11) bei der Temperatur t eine scheinbare Länge l gefunden, so ist die wahre Länge

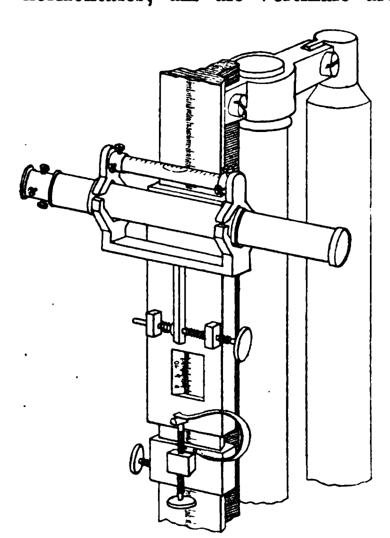
$$= l(1 + \beta_0(t - t_0)).$$

10. Durchbiegung. Die Länge der Axe eines Stabes ändert sich durch mässige Durchbiegungen nur wenig. Die Abstände von Punkten aufserhalb der Axe können dadurch aber in leicht ersichtlicher Weise vergröfsert oder verkleinert werden. Es empfiehlt sich im allgemeinen, einen Mafsstab, wenn er in horizontaler Lage gebraucht wird, in zwei Querschnitten zu stützen, die je um 2/9 der Länge von den Enden abstehen. Auch die Aufbewahrung geschieht so am besten.

Über hölzerne Mafsstäbe und Luftfeuchte vgl. oben.
Winkelmessung in **25**, **30a**, **60**, **61**, **70**.

22. Kathetometer (Dulong und Petit).

Das Kathetometer mifst Vertikalabstände, z. B. Druckhöhen. Ein horizontales, um die Vertikale drehbares Fernrohr ist mittels Schlitten am vertikalen Mafsstabe verschiebbar. Auf grofse Entfernungen ist das Kathetometer wegen der ungenauen Einstellung, wegen der Krümmung des Mafsstabes und wegen der Fehler durch Schwankungen mit Vorsicht, unter beständiger Beachtung der Fernrohrlibelle (Nr. 6) anzuwenden.



Die Justirung des Instruments geschieht folgendermafsen.

1. Das Fernrohr ist um seine Sehrichtung drehbar: das Fadenkreuz wird so gestellt, dafs bei dieser Drehung der anvisirte Punkt sich nicht gegen das Fadenkreuz verschiebt.

2. Die Kongruenz der beiden Cylinder, um welche das Rohr sich dreht, wird mit der aufzusetzenden Libelle konstatirt, welche dieselbe Einstellung zeigen mufs, wenn man das Fernrohr in seinen Lagern umlegt und die Libelle in ihrer alten Lage wieder aufsetzt.

3. Die Drehaxe des Kathetometers wird vertikal gemacht, indem man die Fufsschrauben so regulirt, dafs die Libelle des Instruments bei der Drehung eine konstante Einstellung gegen ihre Teilung ergibt. Über die Reihenfolge bei der Einstellung der Fufsschrauben und das Justiren der Libelle selbst vgl. **30a.**

4. Die vertikale Stellung des Mafsstabes wird hinreichend genau mit einem Senkel erkannt, bezüglich danach regulirt.

5. Die horizontale Richtung der Fernrohraxe erkennt man, da nach Nr. 1 die Sehaxe mit der geometrischen Axe übereinstimmt, und wenn nach Nr. 2 die beiden Lagercylinder des Rohres gleich dick sind, mit der Fernrohrlibelle, die bei dem Umsetzen die frühere Einstellung der Blase auf ihrer Teilung zeigen mufs. Oder auch, da nach Nr. 3 die Drehaxe vertikal ist: man visirt einen Punkt an, dreht das Instrument um 180° und legt das Fernrohr um; dann mufs der vorher anvisirte Punkt dieselbe Höhe gegen das Fadenkreuz zeigen.

6. Dafs der Schlitten und das Fernrohr wirklich die vorausgesetzte Parallelverschiebung haben, erkennt man an der konstanten Einstellung der Libelle oder an einem vertikal stehenden Kollimator (**60**, 1), d. h. einem Fadenkreuz mit vorgesetzter Linse, dessen Bild dem Fernrohr mittels eines kleinen totalreflektirenden Prismas seitlich zugeführt wird. Eventuell hat man entweder vor jeder Einstellung die Lage des Fernrohrs auf denselben Stand der Libellenblase, bez. auf Koincidenz mit dem Kollimator zu korrigiren, oder man mifst noch einmal mit umgelegtem Fernrohr und um 180° gedrehtem Instrument und nimmt aus beiden Ablesungen das Mittel. Je weiter entfernt die zu messende Höhe, desto sorgfältiger ist dies zu beachten.

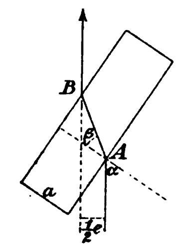
22a. Ophthalmometer (Helmholtz).

Das Instrument dient zur Messung kleiner Abstände. Es besteht aus zwei gleich dicken, dicht nebeneinander vor den Objektivhälften eines Fernrohres befindlichen Glasplatten, welche sich um eine gemeinsame Axe

gleichzeitig um gleiche Winkel, aber gegeneinander drehen lassen. Die Gröfse der Drehung wird an Teilkreisen abgelesen. In der Nullpunktsstellung liegen beide Platten in der zur Sehlinie des Fernrohrs senkrechten Ebene.

Man stellt auf die beiden Punkte, deren gegenseitiger Abstand gemessen werden soll, gleichzeitig ein, indem man durch Drehung der Glasplatten die beiden durch die Lichtbrechung in den schrägen Gläsern abgelenkten Bilder zum Zusammenfallen bringt. Der Abstand des Objekts vom Instrument ist ohne Einflufs.

Ist α der Drehungswinkel aus der Nullstellung,
a die Dicke der Platten,
n das Lichtbrechungsverhältnis der Gläser,
so berechnet man den linearen Abstand e der beiden Punkte



$$e = a\left[2\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right].$$

Beweis; s. Fig. Es ist $AB = a/\cos\beta$;
$\frac{1}{2}e = AB\sin(\alpha - \beta) = a(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)$.
Ferner $\sin\beta = 1/n \cdot \sin\alpha$, also

$$\operatorname{tg}\beta\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Hieraus ergibt sich e.

Die Konstanten a und n des Ophthalmometers kann man entweder einzeln direkt an den herausgenommenen Glasplatten bestimmen (**21**, insbesondere **21**, 7, bez. **62** und **63** II); oder man stellt auf einige Abstände einer mm-Teilung ein, mindestens natürlich auf zwei. Wenn auf mehrere, so ermittelt man a und n nach der Methode der kleinsten Quadrate (**3** III und IV).

Da das Instrument oft eine unvollkommene Symmetrie zeigt, so ist es gut, jede Messung zweimal, mit entgegengesetzten Neigungen der Glasplatten auszuführen und aus den beobachteten α das Mittel zu nehmen.

Etwas umständlich wird also die Konstantenbestimmung und der Gebrauch der Formel. Oft wird es einfacher und genügend sein, zuerst eine bekannte engere Teilung (in $\frac{1}{2}$ mm) durchzubeobachten und dann eine graphische Darstellung der beobachteten Drehungen als Abscissen und der Längen als Ordinaten (**6**) zu benutzen. Bei diesem Verfahren hält man sich am einfachsten stets an die Drehungen in einem bestimmten Sinn.

23. Bestimmung eines Hohlvolumens durch Auswägen.

Käufliche ältere Meſsgefäſse sind oft sehr unrichtig. Verbreitet ist noch das „Mohr'sche" Ccm, von dem scheinbaren Gewicht des Wassers von 15° in Luft abgeleitet. Dabei wird das Liter gegen richtiges Maſs um 1,9 cm^3 zu groſs. Die jetzt käuflichen geaichten Hohlmaſse sind nach richtig definirtem Maſse geteilt.

Wenn eine Flüssigkeit in der Luft das Nettogewicht m gr zeigt, so ist ihr Volumen in cm^3

$$v = \frac{m}{s}\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right),$$

wenn s, σ und λ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, der Gewichtstücke und der Luft (0,0012; 18 und Tab. 4 u. 6) bedeuten; s. auch 13 und Tab. 1.

Man kalibrirt fast ausschlieſslich mit Wasser oder Quecksilber. 1 cm^3 Wasser von 4° wiegt im leeren Raume 1 gr. Bei einer anderen Temperatur habe Wasser die Dichtigkeit Q (Tab. 4). Ein mit Messinggewichten ($\sigma = 8{,}4$) in Luft gewogenes scheinbares Gramm hat also das Volumen $\frac{1}{Q}\left(1 + \frac{0{,}0012}{Q} - \frac{0{,}0012}{8{,}4}\right)$ cm^3, wofür merklich genau geschrieben werden kann (vgl. S. 69) $(2{,}00106 - Q)$ ccm. Ein scheinbares Gramm von 18° hat das Volumen 1,00243 ccm. Zur Bequemlichkeit findet man in dem zweiten Teil von Tab. 4 die Volumina bei anderen Temperaturen, wobei angenommen ist, daſs das Volumen des auszumessenden Glasgefäſses bei 18° bestimmt werden soll.

Soll das Volumen des Gefäſses von der Beobachtungstemperatur t auf eine andere t' umgerechnet werden, so ist

$$v' = v\,(1 + 3\beta(t' - t)),$$

wenn β den linearen Ausdehnungskoefficient (Tab. 11) des Gefäſses bedeutet. Für gewöhnliches Glas im Mittel $3\beta = 1/40000$.

Hohlmaſse können entweder für Trockenfüllung oder für Ausguſs bestimmt und geprüft sein. Ersteres ist das Genauere. Im letzteren Falle rechnet man natürlich das Gewicht des benetzten Gefäſses ab. Sorgfältig konstante Behandlung bezüglich der Art und Dauer des Abtropfens oder Ausblasens ist nötig, wenn dieser Gebrauch genaue Resultate geben soll.

Den Einfluſs des Flüssigkeitsmeniskus eliminirt man thunlichst, indem man immer in gleicher Weise abliest und zwar in der Regel in der den Meniskus berührenden Horizontalebene. Das zur Vermeidung der Parallaxe notwendige Visiren in einer

und derselben Richtung wird durch ein Fernrohr erreicht, welches an einer vertikalen Stange verschiebbar ist; einfacher dadurch, dafs man stets einen und denselben fernen Punkt als Augenpunkt nimmt, oder endlich mit einem Streifchen Spiegelglas (**21**, 1).

Kalibrirung eines geteilten Rohres mit Quecksilber. Die konstante und bekannte Quecksilberfüllung eines oben abgeschliffenen, mit einer Platte bedeckten, gegen Erwärmung an einem Stiel gehaltenen kleinen Gefäfses, etwa eines unten geschlossenen Glasröhrchens wird wiederholt in das zu kalibrirende Gefäfs eingegossen und darin der Stand des Quecksilbers jedesmal abgelesen. Der Einflufs des Meniskus läfst sich ermitteln, indem man eine verdünnte Lösung von Sublimat auf das abgelesene Quecksilber aufgiefst, wodurch die Oberfläche sich abflacht. (Bunsen, gasometrische Methoden.)

Pipetten. Der gewöhnliche Gebrauch auf Ausflufs bedarf höchstens des Hinweises, dafs die vorausgesetzte konstante Benetzung, die man durch Abtropfen während einer bestimmten Zeit zu erzielen sucht, durch Spuren von Fett sehr beeinträchtigt wird. Genauer ist, falls man den Inhalt durch Nachspülen vollständig herausbringen kann, der Gebrauch auf Trockenfüllung. Zu diesem Zweck aicht man durch Differenzwägung der getrockneten und der gefüllten Pipette, wobei ein Standgefäfs auf der Wage, welches die Pipette und ausfliefsende Füllung aufnimmt, als Tara mitgewogen wird.

Aus paraffinirten Pipetten fliefst auch Wasser etc. trocken aus.

Über Volumen des Quecksilbers vgl. **24**; über seine Reinigung 8, 1.

24. Kalibrirung einer engen Glasröhre.

Das gereinigte und durch einen Luftstrom gut ausgetrocknete Rohr wird horizontal über einen Mafsstab (mit Spiegel zur Vermeidung der Parallaxe) gelegt und ein Faden von reinem Quecksilber (8, 1) eingebracht, den man verschieben kann. Letzteres geschieht durch Neigen und Klopfen, oder mittels eines Stückchens Kautschukschlauch am Rohre; man verschliefst das Ende des Schlauches mit der einen Hand und kann nun mit der andern Hand durch Luftdruck oder auch, wenn man den Schlauch vorher gedrückt hatte, durch Saugen, den Faden vor- oder rückwärts bewegen.

Ist die Röhre nur einseitig offen, so läfst sich das Quecksilber nur einfüllen oder verschieben, wenn man die unter ihm befindliche Luft zum Entweichen bringt. Dies bewirkt man leicht dadurch, dafs man einen reinen dünnen Eisen- oder besser Platindraht neben dem Quecksilber in das Rohr schiebt. An dem Drahte bildet sich von selbst ein Luftkanal.

Um die Röhre in gleiche Volumina abzuteilen, bringt man den Faden in nahe aneinander schliefsende Lagen und notirt seine Längen, denen dann gleiche Volumina entsprechen. Bei der Einteilung in viele Unterabteilungen häufen sich die Ablesefehler. Es ist in diesem Falle besser, Beobachtungen mit gröfseren und kleineren Fäden zu kombiniren. Um z. B. in 25 Teile zu teilen, mag man zuerst mit einem Faden von $^1/_5$ der Rohrlänge messen und die entstandenen Abteilungen dann mit einem 5 mal kleineren Faden teilen.

Die Resultate wird man in einer Tabelle oder durch eine Kurve auf Koordinatenpapier darstellen (**6**) und für zwischenliegende Querschnitte die Werte interpoliren.

Absolutes Kaliber. 1 gr in Luft gewogenes Quecksilber (**13** und **23**) hat bei der Temperatur t das Volumen $0{,}07355\,(1+0{,}000181\,t)$ oder $0{,}07379\,(1+0{,}000181\,(t-18))\,\mathrm{cm}^3$.

Den mittleren Querschnitt q einer gemessenen Strecke vom Volumen v ccm berechnet man, wenn l cm die Länge des Fadens ist, $q = v/l$ qcm, den Halbmesser $r = \sqrt{(q/\pi)}$.

Meniskus. Wegen der Krümmung der Endflächen wird die Quecksilbermenge, also auch der oben berechnete Querschnitt zu klein sein, wenn man l zwischen den Kuppen der Menisken gemessen hat. Unter der für enge Röhren gestatteten Annahme, dafs die Endflächen Kugelkappen sind, berechnet man den mittleren Querschnitt aus den Höhen h und h' beider Menisken

$$q = \frac{1}{l - \frac{1}{2}(h + h')}\left[v - \tfrac{1}{6}\pi(h^3 + h'^3)\right].$$

Haben beide Menisken die gleiche Höhe h, so wird also

$$q = \frac{1}{l - h}\left(v - \tfrac{1}{3}\pi h^3\right).$$

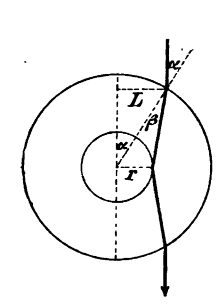
$\frac{1}{3}\pi$ ist nahe $= 1$. Für sehr flache Menisken verschwindet der Einflufs von h^3.

Unter mittleren Verhältnissen wird die Korrektion, die von der zwischen den Kuppen gemessenen Länge l abzurechnen ist, in engen Röhren etwa $0{,}4\,h$ für jeden Meniskus betragen.

Querschnitt aus der Wägung eines Rohres. Hat ein Kreisrohr vom äufseren Durchmesser R, der Länge l und dem specifischen Gewicht s der Rohrsubstanz das Gewicht m, so ist der innere Querschnitt $= R^2\pi - m/ls$. Für dünnwandige Röhren ist dieses Verfahren brauchbar. s bestimmt man oder setzt für gewöhnliches Glas $s = 2{,}5$.

Optische Bestimmung des inneren Durchmessers. Man beleuchtet das aufrecht gestellte Rohr durchfallend mit einer schmalen Flamme, am besten mit Natriumlicht (**59a**). Die Reflexion an dem inneren Cylinder läfst dessen Ränder als zwei feine Lichtlinien erscheinen, deren scheinbarer gegenseitiger Abstand mit dem Ophthalmometer (**22a**) oder, auf einen dicht vorgestellten Mafsstab projicirt, mit einem Fernrohr gemessen, $= 2L$ sei. Der äufsere Rohrdurchmesser, der gleich mit bestimmt werden kann, sei $= 2R$. Es besteht dann, wenn n das Lichtbrechungsverhältnis des Glases ist, die Beziehung

$$r = \frac{L}{n}\sqrt{1 + \frac{(L-r)^2}{R^2 - L^2}}.$$



Folgt aus $n = \sin\alpha : \sin\beta \quad \sin\alpha = L/R$ und

$\sin\beta : \sin(90 - \alpha) = r : \sqrt{R^2 - L^2 + (L-r)^2}$.

Anstatt die Gleichung nach r aufzulösen, kann man als erste Näherung $r = L/n$ setzen, hiermit einen zweiten Näherungswert berechnen u. s. f. Bei nicht zu dickwandigen Röhren konvergirt das Verfahren rasch.

Glasröhren sind selten koncentrisch cylindrisch. Man mifst L z. B. in 4 oder 8 gleich verteilten Lagen und nimmt das Mittel.

n_{Na} beträgt für Jenaer Glas XVI 1,5268, für Glas 59 1,497. — Ist r anderweitig bekannt, so kann man n bestimmen.

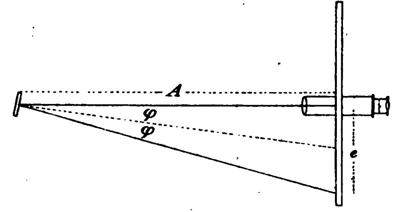
Aus der kapillaren Steighöhe. Steigt eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s und der Kapillarkonstante α (Wasser 7,6, Alkohol 2,4 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$) in dem gut benetzten Rohre um die Höhe H an, so ist der Halbmesser des Rohres $r = 2\alpha/Hs$. Vgl. **58**.

Auf 1^0 wächst ein Querschnitt gewöhnlichen Glases um $\frac{1}{60000}$.

25. Winkelmessung mit Spiegel und Skale (Poggendorff, Gaufs 1827).

Die Messung von Drehungen mit dem gespiegelten Mafsstab, neben der Einfachheit der Hilfsmittel eine unbegrenzte Empfindlichkeit bietend, findet beinahe in jedem Gebiet Anwendung. Sie darf als die bedeutendste Grundlage moderner physikalischer Messungen bezeichnet werden. Die Methode setzt voraus, dafs die zu messenden Winkel klein sind.

Mit dem sich drehenden Körper ist ein der Drehaxe paralleler Spiegel verbunden. Ungefähr in der Ebene, die von der sich drehenden Spiegelnormale beschrieben wird, befindet sich, gewöhnlich in $\frac{1}{2}$ bis 5 m Abstand eine, meistens in mm geteilte Skale. Entweder beobachtet man deren reflektirtes Bild in einem auf den Spiegel gerichteten Fernrohr mit Fadenkreuz, oder es wird von einer



Lichtquelle auf den Spiegel Licht geworfen, welches nach der Reflexion ein Bild auf der Skale erzeugt, das sich durch die Drehung verschiebt. Meist gibt man der Skale bez. dem Fernrohr oder der Lichtquelle die Stellung, in welcher bei nicht abgelenktem Spiegel nahezu der Fufspunkt des vom Spiegel auf die Skale gefällten Perpendikels in dem Fadenkreuz erscheint oder von dem Lichtbildchen getroffen wird. Dieser Punkt soll der mittlere Skalenteil heifsen. Man findet ihn mit einem rechten Winkel, den man an die Skale so anlegt, dafs die Visirlinie längs des anderen Schenkels den Spiegel trifft. — Das Fernrohr darf natürlich auch schräg zur Skale stehen.

Einstellung von Fernrohr und Skale. Man stellt etwa von vornherein das Fernrohr durch Verschieben des Okularrohres genähert auf die richtige Sehweite ein, d. h. auf die doppelte Entfernung der Skale vom Spiegel. Dann gibt man ihm, während das Rohr nach dem Spiegel gerichtet ist, die Stellung, bei welcher das dicht neben dem mittleren Skalenteil visirende Auge das Objektiv des Fernrohres, oder das neben dem Fernrohr visirende Auge den mittleren Skalenteil im Spiegel sieht. Alsdann wird

das Bild der Skale, wenn es nicht bereits im Gesichtsfelde des Fernrohres ist, durch eine kleine Drehung in demselben erscheinen. Schliefslich werden die feineren Einstellungen vorgenommen.

Zu den letzteren gehört das Deutlichsehen von Skale und Fadenkreuz. Zuerst wird das Fadenkreuz durch eigene Verschiebung oder durch Verstellen des zwischen ihm und dem Auge befindlichen Okularglases auf richtige Sehweite gebracht, dann das Okularrohr so eingeschoben, dafs Skale und Fadenkreuz keine Parallaxe zeigen, d. h. sich bei dem seitlichen Bewegen des Auges vor dem Okular nicht gegeneinander verschieben.

Wechseln bei zusammenhängenden Ablesungen Beobachter von verschiedener Sehweite, so soll ein Jeder das deutliche Bild nur durch Verstellen des zwischen Auge und Fadenkreuz befindlichen Teiles des Okulars hervorbringen. Jedes Ablesefernrohr soll also das Akkommodiren des Auges auf das Fadenkreuz durch leicht verschiebbare oder verschraubbare Linsen vor dem Fadenkreuz gestatten.

Objektive Beobachtung. Man läfst das Licht von einer scharf markirten Lichtquelle (Spalt; Faden vor einer Flamme; elektrische Glühlampe mit geradem Faden) durch eine Linse auf den Spiegel und von da auf die Skale fallen. Um ein objektives Bild zu geben mufs die Lichtquelle jedenfalls aufserhalb des Brennpunktes der Linse stehen. Die richtige Stellung, bei der ein deutliches objektives Bild der Marke auf der Skale entsteht, probirt man aus, wobei auch die gute Centrirung der Linse (**67**) zu beachten ist. Ein Hohlspiegel anstatt des Planspiegels läfst die Projektionslinse ersparen. Soll in diesem Falle die Lichtquelle denselben Abstand vom Spiegel haben wie die Skale, so ist dieser Abstand gleich dem Krümmungshalbmesser (**66**) oder der doppelten Brennweite des Spiegels zu wählen.

Über Versilbern von Glasspiegeln s. 8, 6.

Reduktion der Skalenablesung auf den Winkel und seine Funktionen.

Wir nehmen an, dafs die Skaleneinstellung im nicht abgelenkten Spiegel mit dem Fufspunkt der Senkrechten von dem Spiegel auf die Skale nahe zusammenfällt. Der Ort des Fernrohrs bez. der Lichtquelle kommt nicht in Betracht. Skalenausschlag heifse die Differenz e des beobachteten Skalenteils gegen die Ruhelage.

1. Für **kleine** Ablenkungen ist der Ausschlagswinkel φ dem Skalenausschlag proportional. Und zwar wird, wenn A den zur Drehaxe senkrecht gemessenen Abstand der spiegelnden Fläche von der Skale, ausgedrückt in Skalenteilen bedeutet, der Bogenwert eines Skalenteiles gefunden: in absolutem Maſse (Anh. 3) $= 1/(2A)$; in Bogengraden u. s. w.:

$$= \frac{1}{A} \cdot 28{,}648^0 = \frac{1}{A} \cdot 1718{,}9' = \frac{1}{A} \cdot 103132''.$$

Ferner ist $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = e/(2A)$.

2. Für **gröſsere** Ablenkungen gelten die Reihen

$$\varphi = \frac{28{,}648^0}{A} e \left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{1}{5}\frac{e^4}{A^4}\cdot\cdot\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{1}{8}\frac{e^4}{A^4}\cdot\cdot\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{31}{128}\frac{e^4}{A^4}\cdot\cdot\right)$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{e}{4A}\left(1 - \tfrac{11}{32}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{431}{2048}\frac{e^4}{A^4}\cdot\cdot\right).$$

Bis zu Ablenkungen von 6° wird meistens das erste Korrektionsglied genügen. Man reducirt hiernach einen Skalenausschlag e auf eine dem Bogen, der Tangente, dem Sinus, dem Sinus des halben Winkels proportionale Gröſse, indem man $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ oder $\frac{11}{32}\cdot e^3/A^2$ von e abzieht.

3. Für **beliebig groſse** Ablenkungen ist an gerader Skale

$$\operatorname{tg} 2\varphi = e/A \quad \text{oder} \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(e/A).$$

Die letztere Formel erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung, die anderen aus den Reihenentwicklungen für φ, $\operatorname{tg}\varphi$ u. s. w.

In Tab. 28 findet sich für verschiedene Skalenabstände die Korrektion auf Bögen; um auf die Tangente zu reduciren, hat man die Korrektionszahlen um ihren 4ten Teil zu verkleinern. Man stellt die Tabelle, ev. auf das wirkliche A interpolirt, graphisch dar (6) und entnimmt aus der Kurve die Werte für bestimmte Ausschläge.

Ausführliche Reduktionstafeln s. Czermak, Berlin 1890.

Messung eines Skalenabstandes. Die Messung bis auf etwa $\pm$ 1 mm mit Bandmaſs, mit einem Draht, den man nachher vergleicht, oder mit zwei Maſsstäben, die man an einander gleiten läſst, bietet meist keine Schwierigkeit. Zu genauen Messungen können etwa zwei Kontaktmaſsstäbchen dienen, von denen man den einen mit dem Spiegel, den anderen mit der Skale in Berührung bringt. Von den Maſsstäbchen senkelt man, wenn ein Horizontalabstand zu messen ist, mit feinen Drähten vor einen hinreichend langen Maſsstab oder auf zwei Punkte des Fuſsbodens, deren Abstand genau gemessen werden kann.

Papierskalen ändern ihre Länge mit der Zeit merklich; mm-Skalen auf Milchglas (z. B. von Hartmann & Braun) sind wohl die besten.

Korrektionen wegen verschiedener Umstände.

a) Wegen Deckglasdicke. Liegt in dem Wege der Lichtstrahlen eine feste Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsverhältnis n, so hat man von dem gemessenen Skalenabstand abzuziehen $d \cdot (n - 1)/n$, also für gewöhnliches Glas nahe $\frac{1}{3}d$. (Vgl. **62**, 1.)

b) Wegen Spiegeldicke. Der von der Vorderfläche eines rückwärts belegten Glasspiegels bis zur Skale gemessene Abstand A ist zu vermehren, nicht um die ganze Dicke δ, sondern nur um die optische Dicke δ/n des Spiegels, also nahe um $\frac{2}{3}\delta$. Ist die Glasdicke der Messung mit dem Mafsstabe unzugänglich, so kann man diese „optische Dicke" auch mit dem Mikroskop als den halben Abstand eines Punktes auf der Vorderfläche von seinem Bilde in der spiegelnden Fläche bestimmen. Vgl. **62**, 3.

c) Wegen Spiegelneigung. Die Vertikalebene der Skale werde getroffen von der Spiegelnormale in der Höhe N, von der durch den Spiegel gelegten Horizontalen in der Höhe H, von der Visirlinie des Fernrohrs in der Höhe F. Dann ist anstatt des gemessenen Horizontalabstandes A_0 der Skale vom Spiegel in Rechnung zu setzen

$$A = A_0 + \frac{(N-H)(N-F)}{A_0}.$$

d) Wegen Spiegelkrümmung. Ist ein nicht ebener Ablesespiegel in der Entfernung a von der Drehaxe angebracht, so mufs der gemessene Skalenabstand A_0 für Konkavspiegel vermehrt, für Konvexspiegel vermindert werden um $A_0\, a/r$, wenn r den Krümmungshalbmesser des Spiegels (**66** III) bedeutet. Da die Spiegel sich schon durch das Fassen leicht etwas verziehen, so kann diese Korrektion für stark excentrische Spiegel beträchtlich werden.

F. K., Wied. Ann 31, 95. 1887; Ausführliches bei Holman, Technology quarterly Sept. 1898.

26. Ableitung der Ruhelage aus Schwingungen.

Der Skalenteil, auf welchen ein schwingender Zeiger oder Spiegel sich einstellen würde, wenn er in Ruhe wäre, die Ruhelage oder Gleichgewichtslage, läfst sich durch Beobachtung des schwingenden Zustandes auf folgende Weisen ableiten.

1. Umkehrbeobachtungen. Ist die Dämpfung der Schwingungen schwach, so findet sich die Ruhelage z. B. aus je drei auf einander folgenden Umkehrpunkten, indem das arithmetische Mittel aus Nr. 1 und 3 mit Nr. 2 zum Mittel vereinigt wird. Oder man beobachtet eine beliebige ungerade Zahl von Umkehrpunkten, nimmt einerseits aus Nr. 1, 3, 5 . ., andrer-

seits aus Nr. 2, 4 . . das Mittel und vereinigt beide Werte zum Hauptmittel so, wie an der Wage (**10** II) gezeigt worden ist. Bei raschen Schwingungen kann man etwa je zwei überschlagen.

2. Standbeobachtungen. Wenn die Bewegung so langsam ist, dafs man in jedem Augenblick den Stand auf der Skale genau ablesen kann, so gibt das arithmetische Mittel aus zwei beliebigen, um die Zeit der Schwingungsdauer auseinander liegenden Ablesungen die Ruhelage.

3. Gedämpfte Schwingungen. Ist eine stärkere Dämpfung vorhanden (z. B. durch einen Multiplikator oder einen Kupferdämpfer um eine Magnetnadel oder durch einen Luftdämpfer), so findet sich aus zwei um die Schwingungsdauer aus einander liegenden Ablesungen p_1 und p_2, z. B. aus zwei Umkehrpunkten, die Ruhelage p_0, wenn k das Dämpfungsverhältnis ist, (vgl. 27 und das Beispiel daselbst)

$$p_0 = p_2 + (p_1 - p_2)/(1 + k).$$

Zum Beruhigen von Schwingungen einer Magnetnadel dient ein Magnet, der nach dem Gebrauch hinreichend entfernt in der Höhe der Nadel vertikal aufgestellt wird.

27. Dämpfung und logarithmisches Dekrement.

Von mannichfacher Bedeutung für magnetische und elektrische Messungen ist die Abnahme der Schwingungen, etwa einer Magnetnadel, welche durch eine Kupferhülse oder einen Multiplikator gedämpft ist. Die Dämpfung entsteht hier durch die von der bewegten Nadel in dem Kupfer inducirten Ströme; ihr Gesetz (**108**) sagt, dafs kleine Bogen in geometrischer Reihe abnehmen. Das konstante Verhältnis k eines Schwingungsbogens zu dem folgenden heifst Dämpfungsverhältnis und $\log k = \lambda$ das logarithmische Dekrement (Gaufs).

Man erregt (etwa durch einen elektrischen Strom oder einen Magnet) Schwingungen und beobachtet eine Reihe von Umkehrpunkten. Die Differenz zweier auf einander folgender Umkehrpunkte, bei gröfseren mit dem Spiegel beobachteten Schwingungen nach **25** auf Bogenwert korrigirt, gibt den Bogen. Ist a_p die Gröfse des $p$ten, a_q die des $q$ten Bogens, so gilt

$$k = \left(\frac{a_p}{a_q}\right)^{\frac{1}{q-p}} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\log a_p - \log a_q}{q-p}.$$

Aus einer Reihe (am besten einer ungeraden Zahl) von Umkehrpunkten kann man die Dämpfung so herleiten, wie das folgende Beispiel zeigt. e ist die Entfernung des Umkehrpunktes vom mittleren Skalenteil (hier 500). Der Skalenabstand vom Spiegel betrug 2600 Sk.-T., also die Korrektion der Ausschläge auf Bogenwert $\frac{1}{3}e^3/2600^2$ (**25**, 2; Tab. 28). Aus Bogen Nr. 1 und 4, 2 und 6 etc. wird λ und k erhalten.

Hinter dem Vertikalstrich ist mit dem unten abgeleiteten Dämpfungsverhältnis $k = 1{,}151$ aus je 2 Umkehrpunkten die Ruhelage (**26**, 3) berechnet.

Beobachtete Umk.-Punkte	e	$\frac{e^3}{3 \cdot 2600^2}$	Korrigirte Umk.-Punkte	Bogen a	$\frac{a}{2{,}151}$	Ruhelage.
285,0	215	0,5	285,5			
710,0	210	0,5	709,5	424,0	197,1	512,4
341,2	159	0,2	341,4	368,1	171,1	512,5
662,5	162	0,2	662,3	320,9	149,2	513,1
383,9	116	0,1	384,0	278,3	129,4	513,4
625,7	126	0,1	625,6	241,6	112,3	513,3
415,6	84	0,0	415,6	210,0	97,6	513,2
						512,98

Man erhält aus 1 und 4 $\lambda = \frac{1}{3}(\log 424{,}0 - \log 278{,}3) = 0{,}0610$
„ 2 „ 5 368,1 241,6 0,0609
„ 3 „ 6 320,9 210,0 0,0614
Mittel $\lambda = 0{,}0611$; $k = 1{,}151$.

Die Anwendung natürlicher Logarithmen oder die Multiplikation der obigen λ mit 2,3026 liefert das „natürliche log. Dekrement“. Über die Theorie und über aperiodische Dämpfung vgl. **108.**

Inkonstanz der Dämpfung. Für gröfsere Schwingungen nimmt die Dämpfung, besonders bei schmalem oder hohem Multiplikator und längerem Magnet etwas ab. Die Abnahme gegen die Dämpfung bei sehr kleinen Schwingungen ist ungefähr dem Quadrate der Schwingungsweite proportional; sie wird empirisch bestimmt.

Luftwiderstand. Wird die Dämpfung gesucht, welche ein Multiplikator etc. allein geben würde, so beobachtet man sowohl bei geschlossener wie bei unterbrochener Leitung. Das log. Dekrement im letzteren von dem im ersteren Falle abgezogen gibt dasjenige des Multiplikators allein.

27a. Bifilare Aufhängung (Harris, Gaufs, 1836).

Ein an zwei Fäden aufgehangener schwerer Körper ist im Gleichgewicht, wenn er die möglichst tiefe Lage hat. Dabei liegen die Fäden in derselben Vertikalebene. Für kleine Drehungen des Bifilarkörpers ist das rücktreibende Moment dem Sinus der Ablenkung proportional. Wenn die Länge der Fäden sehr grofs gegen ihren Abstand ist, gilt dies auch für gröfsere Ablenkungen.

Die Fäden sind gleich gespannt, wenn der Schwerpunkt des Bifilarkörpers in der mittleren Vertikalen liegt. Durch Heben des Körpers an einem in dieser gelegenen Faden darf seine Lage sich also nicht ändern.

Zur bifilaren Aufhängung eines Körpers ist oft eine Suspension wie Fig. bequem. Das kleine Laufgewicht dient zum Äquilibriren.

I. Berechnung der Direktionskraft. Es sei e_1 und e_2 der obere und untere Horizontalabstand der beiden Fadenenden und h die mittlere Fadenlänge; laufen die Fäden nicht vertikal, so bedeutet h den mittleren Vertikalabstand der beiden Fadenenden. Endlich sei P die Summe der nahe gleichen Vertikalspannungen der Fäden.

Der Ablenkungswinkel α gibt das Drehmoment der Schwere

$$P\frac{e_1 e_2}{4h}\cdot \sin\alpha.$$

P ist das Gewicht des angehängten Körpers, vermehrt um das halbe Gewicht der Fäden; im [C. G. S]-System Masse in gr mal $g = 981$ (s. **35**, Anh. Nr. 7 und Tab. 43).

Fadensteifheit. Diese wirkt so, als ob die Drähte verkürzt würden. Es seien ϱ und E Halbmesser und Elasticitätsmodul bezogen auf cm und gr. Dann mufs man von der gemessenen Länge abrechnen

$$\delta = \varrho^2 \sqrt{\frac{2\pi E}{P}}\ \text{cm}.$$

Torsionselasticität. Die Direktionskraft der Torsion beider Fäden zusammen beträgt (**55**)

$$\frac{2\pi}{5}\frac{\varrho^4 E}{h}.$$

Über $[E]$ im [C. G. S]-System vgl. **52** u. Anh. 13.

Die gesamte, mit $\sin\alpha$ zu multiplicirende „Direktionskraft" ist in absolutem Mafse

$$D = gm\frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} + \frac{2\pi}{5}[E]\frac{\varrho^4}{h}.$$

Beispiel. 300 cm lange, 0,01 cm dicke Messingdrähte, also $\varrho = 0{,}005$; $E = 90 \cdot 10^7$ gr-Gew./cm²; $[E] = 981 \cdot 90 \cdot 10^7 = 88 \cdot 10^{10}$ C.G.S. Der Bifilarkörper wog 100 gr. Dann ist $\delta = 0{,}005^2 \sqrt{(2\pi \cdot 90 \cdot 10^7/100)} = 0{,}19$ cm. Ferner ist

$$\frac{2\pi}{5}[E]\frac{\varrho^4}{h} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} 88 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0{,}005^4}{300} = 2{,}3\,[\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^{-2}].$$

Die Drähte wogen zusammen 0,42 gr, also $m = 100 + 0{,}21 = 100{,}21$ gr.

Endlich war $e_1 = e_2 = 12$ cm; also

$$g m \frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} = 981{,}0 \cdot 100{,}21 \frac{12 \cdot 12}{4 \cdot 299{,}81} = 11829\,[\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^{-2}].$$

Die gesamte Direktionskraft beträgt danach 11831 [cm²·gr·sec⁻²].

Vgl. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

II. Direktionskraft aus Schwingungsbeobachtungen. Aus dem auf die Drehaxe bezogenen Trägheitsmoment K des Bifilarkörpers und aus der Schwingungsdauer t findet sich (**29**; Anh. 12) $D = \pi^2 \cdot K/t^2$.

Zeitmessungen. Geographische Bestimmungen.

28. Schwingungsdauer.

Schwingungsdauer eines Pendels, einer Magnetnadel etc. nennt man die Zeit, welche zwischen einer Umkehr bis zur nächsten auf der anderen Seite verfließt[1]). Bei langsamen Schwingungen ist die Umkehr zur Zeitbestimmung ungeeignet, denn die Bewegung ist gerade in diesem Augenblick unmerkbar. Dagegen passirt der Körper einen der Gleichgewichtslage nahe gelegenen Punkt mit der größten Geschwindigkeit, so daß der Durchgang scharf zu beobachten ist. Aus zwei aufeinander folgenden Durchgangszeiten durch denselben Punkt (in entgegengesetzter Richtung) findet sich der zwischenliegende Augenblick der Umkehr als arithmetisches Mittel.

Man markirt einen der Ruhelage nahe liegenden Punkt (an der Skale durch Überhängen eines hinreichend sichtbaren Fadens), beobachtet die Zeiten, in welchen dieser Punkt passirt wird, nach dem Schlage einer Sekundenuhr und nimmt zunächst aus je zwei solchen benachbarten Zeiten das Mittel. Die Zehntel Sekunden schätzt man aus dem Verhältnis der Abstände des Fadens von der Marke bei den Sekundenschlägen, die dem Durchgang vorausgehen und ihm nachfolgen.

Berechnung der Schwingungsdauer. Würde man aus n so beobachteten auf einander folgenden Schwingungsdauern wieder das Mittel nehmen, so erhielte man dasselbe Resultat, wie wenn man die Differenz der ersten und der letzten Umkehrzeit durch n dividirte. Die zwischenliegenden Beobachtungen wären also nutzlos. Um alle zu verwerten, kann man sie in zwei Hälften teilen, immer aus entsprechenden Nummern der beiden Hälften die Differenzen bilden, hieraus das arithmetische Mittel berechnen und dasselbe durch $\frac{1}{2}n$ dividiren. Über etwaige Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. **3** II.

---

1) In der Akustik und Optik heißt die Zeit einer ganzen Periode die Schwingungsdauer.

Durchgang beob.		Umkehrzeit ber.			Schwingungsdauer	
min	sec	Nr.	min	sec		sec
10	3,3					
	16,5	*1.*	10	9,90	aus Nr. *1* und *4*	39,90 : 3 = 13,30
	29,9	*2.*		23,20		
	43,0	*3.*		36,45	*2* und *5*	40,05 : 3 = 13,35
	56,6	*4.*		49,80		
11	9,9	*5.*	11	3,25	*3* und *6*	40,15 : 3 = 13,38
	23,3	*6.*		16,60		Mittel = 13,34

Am vorteilhaftesten ermittelt man einige weiter auseinander liegende Umkehrzeiten, für genaue Ansprüche z. B. folgendermaſsen. Es wird zweimal (oder mehrmals) eine gerade Anzahl, z. B. sechs auf einander folgende Durchgangszeiten durch den markirten Punkt beobachtet. Dann nimmt man in jedem Beobachtungssatz aus je zwei symmetrisch gegen die mittelste Elongation gelegenen Zeiten das arithmetische Mittel und aus diesen wieder das Hauptmittel.

Erster Satz. Durchgang.			Mittel.			Zweiter Satz. Durchgang.		Mittel.	
Nr.	min	sec	Nr.	min	sec	min	sec	min	sec
1.	7	40,7				10	10,5		
2.		49,0					18,9		
3.		55,6					25,6		
4.	8	4,0	*3. 4.*	7	59,80		33,9	10	29,75
5.		10,7	*2. 5.*		59,85		40,6		29,75
6.		18,8	*1. 6.*		59,75		48,9		29,70
		Hauptmittel		7	59,80			10	29,73

Die beiden Hauptmittel sind die Zeitpunkte zweier Elongationen so genau, wie sie aus diesen Beobachtungen zu entnehmen sind. Ihr Unterschied (= 149,93 Sec.), dividirt durch die Anzahl der zwischen ihnen verflossenen Schwingungen, gibt die Schwingungsdauer. Es ist nicht notwendig, diese Schwingungen gezählt zu haben; man kann die Zahl aus einem Näherungswert der Schwingungsdauer ableiten. Aus den beiden ersten und den beiden letzten Beobachtungen des ersten Satzes finden sich $7^{min}\ 44,8^{sec}$ und $8^{min}\ 14,7^{sec}$ als Zeitpunkte, zwischen denen 4 Schwingungen liegen. Danach betrüge die Schwingungsdauer 29,9 : 4 = 7,47 Sec. Dividirt man nun 7,47 in 149,93, so kommt 20,07; die gesuchte Anzahl von Schwingungen ist also ohne Zweifel 20, die Schwingungsdauer also 149,93 : 20 = 7,496 Sec. Um über die Anzahl sicher zu sein, beginne man die Beobachtungen immer mit einer bestimmten Richtung, dann weiſs man, daſs die Zahl eine gerade ist.

Für genaue Messungen macht man eine gröfsere gerade Anzahl $2m$ von Beobachtungssätzen, kombinirt Nr. 1 mit $m+1$, 2 mit $m+2, \cdots m$ mit $2m$ und nimmt das Mittel der einzelnen Resultate.

Folgen die Schwingungen zu rasch, um alle Durchgänge zu notiren, so kann man immer zwei (allgemein eine gerade Anzahl) Durchgänge überspringen, z. B. aus den Durchgängen Nr. 1 4 7 10 13 16 den Satz von Beobachtungen bilden. Übrigens rechnet man wie oben und teilt schliefslich das Resultat durch 3.

Sehr schnelle Schwingungen von wenigen Sekunden Dauer beobachtet man besser in ihren Umkehrpunkten, als in den Durchgängen durch die Mitte, und zwar am bequemsten in lauter einseitigen Umkehrpunkten, wobei man nach Bedürfnis überspringen kann.

Die Schwingungsdauer einer gedämpften Nadel vom log. Dekrement λ verhält sich zu derjenigen ohne Dämpfung wie $\sqrt{\pi^2+(2{,}303\cdot\lambda)^2}$ zu π (Tab. 29). Nur bei starker Dämpfung wird die Korrektion beträchtlich.

Ob mit Spiegel und Skale oder mit blofsem Auge beobachtet wird, ist für die Methode natürlich gleichgiltig.

Methode der Koincidenzen. Siehe **35**.

Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bögen.

Die Schw.-D. einer durch Torsionselasticität getriebenen Masse ist von der Amplitude unabhängig. Häufiger aber kommt der Fall vor (Magnetnadel, Pendel), dafs das Drehmoment dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist. Dann wächst die Schw.-D. t mit der Amplitude α nach dem Ausdruck

$$t = t_0\left(1+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{9}{64}\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha+\cdots\right).$$

Fast immer sucht man den Grenzwert t_0, welchem die Schwingungsdauer sich annähert, wenn die Schwingungsweite verschwindend klein wird. Über die diesbezügliche Korrektion siehe für grofse Schwingungen Tab. 27. Da bei kleinen, mit Spiegel beobachteten Schwingungsweiten von p Sc.T. $\frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\frac{p}{2A}\right)^2 = \frac{1}{256A^2}\cdot p^2$ zu setzen ist (**25**), wenn A den Skalenabstand in Sk.-T. bezeichnet, so ist, unter Vernachlässigung der 4. Potenz, hier von dem beobachteten t abzuziehen $t\cdot\frac{1}{256A^2}\cdot p^2$.

Als den Wert von α oder p, welcher in obige Formeln eingesetzt wird, kann man meistens das arithmetische Mittel a aus dem ersten und dem letzten Bogen einsetzen. Genauer und immer genügend ist, wenn

noch die Differenz des ersten und letzten Bogens mit d bezeichnet wird, einzusetzen $a\,(1 - \frac{1}{24}\,d^2/a^2)$.

Über stark gedämpfte Schwingungen vgl. oben.

29. Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstande l von einer Drehungsaxe ist l^2m. Das T.-M. mehrerer fest mit einander verbundener Punkte oder eines Körpers ist die Summe oder das Integral dieser Ausdrücke, berechnet für alle Körperelemente. Die Einheit, nach welcher Masse und Länge gemessen sind, wird durch ein der Zahl für das T.-M. beigesetztes [gr·cm²] oder [mg·mm²] u. s. w. angegeben. (Vgl. Anhang Nr. 12.)

Schwingungsdauer t, Direktionskraft D und Trägheitsmoment K hängen durch die Formel $t^2/\pi^2 = K/D$ zusammen.

I. Berechnung.

Dieselbe setzt regelmäſsige Gestalt und homogenes Material voraus. m bedeute immer die Masse des Körpers, K sein T.-M., bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe.

Dünner Stab von der Länge l. Bezogen auf die zum Stabe senkrechte Axe ist $K = \frac{1}{12}\,ml^2$.

Rechtwinkliges Parallelepipedum. a und b seien zwei Kanten desselben. Das T.-M., bezogen auf die zur dritten Kante parallele Axe, ist $K = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$.

Cylinder (auch Kreisscheibe) vom Halbmesser r. Es ist, bezogen auf die Axe des Cylinders, $K = \frac{1}{2}mr^2$.

Bezogen auf den Kreis-Durchmesser des Cylinders, wenn dessen Länge $= l$, ist $K = m(\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}r^2)$.

Hohlcylinder (auch Ring) von den Halbmessern r_0 und r_1. Bezogen auf die Axe $K = \frac{1}{2}m(r_0{}^2 + r_1{}^2)$; bezogen auf die zur Axe senkrechte Mittellinie $K = m(\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}(r_0{}^2 + r_1{}^2))$.

Kugel vom Halbmesser r. Bezogen auf einen Durchmesser ist $K = \frac{2}{5}mr^2$.

Hilfssatz. Ist das T.-M. K auf eine durch den Schwerpunkt gelegte Axe bezogen, K' aber auf eine dieser parallele im Abstande a befindliche Axe, so ist $K' = K + ma^2$. Z. B. ist das T.-M. eines dünnen Stabes, bezogen auf eine zum Stab senkrechte Axe an seinem Ende $= \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$.

II. Bestimmung aus der Schwingungsdauer mit und ohne Belastung (Gauſs).

a) Das Verfahren ist anwendbar auf Körper, die mit konstanter Direktionskraft um eine vertikale Axe schwingen, also besonders auf Magnete. Anderen Körpern kann man durch die Torsionselasticität eines Aufhängedrahtes (Stahl) eine konstante Direktionskraft geben.

Man beobachtet die Schwingungsdauer t, vermehrt dann das Trägheitsmoment, ohne die drehenden Kräfte zu ändern, um eine bekannte beträchtliche Gröfse K_1 und beobachtet wieder die Schwingungsdauer t'. Dann ist das gesuchte T.-M.

$$K = K_1 t^2/(t'^2 - t^2).$$

K_1 kann z. B. durch einen ausgemessenen und gewogenen Ring (s. oben) gegeben sein. Oder es besteht aus zwei gleichen Massen (Summe $= m$), in gleichem Abstande l ihrer Schwerpunkte von der Drehaxe mit Spitzen oder kurzen Fäden aufgehangen oder auf Stifte gesteckt. Dann ist $K_1 = ml^2 + K_0$, wenn K_0 die Summe der auf die Vertikalaxen durch die Schwerpunkte bezogenen einzelnen T.-M. bedeutet.

Der Ausdruck setzt voraus, dafs die Massen sich mit drehen, also z. B. bifilar oder auf Spitzen mit grofser Reibung aufgehängt oder dafs sie auf Stifte aufgesteckt sind. Hingen die Massen an ganz dünnen Fäden, so dafs sie sich parallel bewegten, so wäre $K_1 = ml^2$ zu setzen.

l mifst man als den halben Abstand der Aufhängepunkte der Gewichte von einander, bei bifilar aufgehangenen Massen als das Mittel der Fadenabstände längs jeder Seite. Excentricität des Schwerpunktes aufgesteckter Gewichte fällt durch Drehen um 180° heraus.

Genaueres über die allgemeine Berücksichtigung des Mitschwingens der Belastungen s. Kreichgauer, Wied. Ann. 25, 289. 1885.

Beispiel. Durchmesser der Cylinder 1,00 cm $r = 0,50$ cm
Sie wiegen zusammen 50,00 gr $m = 50,00$ gr
Abstand ihrer Axen von einander $= 10,026$ cm $l = 5,013$ cm

$$K_1 = 50,00(5,013^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 0,25) = 1262,8 \text{ gr}\cdot\text{cm}^2.$$

Ferner seien die Schwingungsdauern gefunden: unbelastet $t = 9,737$, belastet $t' = 14,267$ sec.

Das gesuchte T.-M. ist

$$K = 1262,8 \cdot 9,737^2/(14,267^2 - 9,737^2) = 1101,1 \text{ gr}\cdot\text{cm}^2.$$

b) Brauchbar ist unter Umständen auch die abgeänderte Anordnung, dafs ein Schwingungskörper von bekanntem T.-M. K_0 mit dem unbekannten K belastet wird. Steigt hierdurch die Schwingungs-Dauer von t_0 auf t, so ist $K = K_0(t^2 - t_0^2)/t_0^2$.

III. Mittels bifilarer Aufhängung.

Gegeben sei eine ausmessbare Bifilarsuspension (Fig. S. 103), in welche man den zu bestimmenden Körper einlegen kann.

Nach **27a** werde die Direktionskraft D_0 berechnet. Die Schwingungsdauer betrage t_0. Dann legt man den Körper von dem gesuchten T.-M. K ein, so dafs sein Schwerpunkt in der mittleren Vertikale liegt. Die jetzige Direktionskraft sei D und die Schwingungsdauer t; dann ist offenbar

$$K = (D t^2 - D_0 t_0^2)/\pi^2.$$

Über die Beobachtung der raschen Schwingungen s. S. 107.

Ist der zu bestimmende Körper magnetisirt, so beobachtet man in den zwei entgegengesetzten Meridianlagen die Schwingungsdauern t_1 und t_2. Es ist zu setzen $t^2 = 2 t_1^2 t_2^2/(t_1^2 + t_2^2)$.

F. K., Wied. Ann. 22, 422. 1884.

29a. Messung sehr kurzer Zeiten.

Man verwendet sehr rasch laufende Uhren mit elektrischer Auslösung und Arretirung, graphische Aufzeichnung auf Flächen, die sich mit bekannter Geschwindigkeit fortschieben, als empfindlichstes Mittel endlich die Verschiebung des Reflexes in einem rotirenden Spiegel.

Über elektrische Methoden mit dem ballistischen Galvanometer vgl. **109**.

1. Hipp'sches Chronoskop. Ein Uhrwerk läuft mit seinem raschesten Rad, in dessen Zähne eine schwingende Stahlfeder als Hemmung eingreift, 10 mal in 1 sec. um. Mittels einer elektromagnetischen Vorrichtung wird durch Stromunterbrechung zu Anfang des zu messenden Zeitraums ein bis dahin ruhendes Zeigerwerk mit dem laufenden Rade verbunden, zu Ende durch Wiederschliefsen des Stromes von ihm getrennt und angehalten.

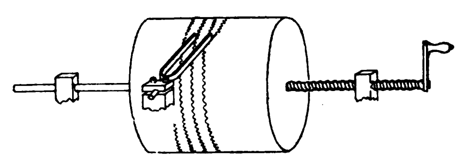
Bei der Messung einer Schufsgeschwindigkeit z. B. unterbricht die Kugel den Strom beim Austreten aus dem Lauf durch Zerreifsen eines Leitungsdrahtes und schliefst ihn beim Aufschlagen auf das Ziel mittels einer zweiten Leitung mit einem fein eingestellten Stofskontakt.

Eine Fallzeit wird gemessen, indem das Auslösen eines Stromkontakts zugleich das fallende Gewicht auslöst, welches unten so, wie eben beschrieben, einen Stofskontakt schliefst.

Die Zeitverluste zwischen den Vorgängen und ihrer Wirkung auf das Zeigerwerk müssen zu Anfang und zum Schlufs gleich sein; durch Reguliren der elektromagnetischen Vorrichtung mittels Stromstärke und Spannfeder wird dies bewirkt. Die Angaben des Chronoskops werden kontrolirt bez. korrigirt nach den Fallzeiten so schwerer Kugeln (Hartblei, $1\frac{1}{2}$ cm Durchmesser), dafs man auf sie während der ersten Zehntel von Sekunden das bekannte Fallgesetz anwenden darf.

2. Schreibende Stimmgabel etc. Eine an einem tönenden, am besten elektromagnetisch angeregten Körper von bekannter Schwingungs-

zahl (**57**) befestigte leichte, biegsame Spitze schreibt auf eine sich fortbewegende berufste Fläche. Die beiden Ereignisse, deren Zeitabstand zu messen ist, werden neben die entstehende Sinuskurve notirt. Die Anzahl der zwischen ihnen liegenden Wellen mit der Schwingungsdauer multiplicirt gibt das Resultat.



Das Markiren der beiden Augenblicke geschieht meist elektrisch, entweder durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung, die durch die Wirkung der Ereignisse auf den Strom im Elektromagnet ihren Ort verändert. Oder die elektrische Wirkung besteht in einem Induktionsfunken, der von einer, neben der schreibenden Spitze befindlichen Metallspitze durch das berufste Papier auf dessen Unterlage springt und im Rufs eine Marke zurückläfst. Auch Photographie ist anwendbar. Siehe auch **57**, 1.

Vgl. z. B. den Siemens'schen Funkenchronograph, Pogg. Ann. 66, 435. 1845.

3. Fallender Körper, Pendel. Die Zeitmarken werden auf einen fallenden vertikalen Mafsstab gezeichnet, oder auf einen Kreisbogen, der mit einem Pendel schwingt. Ihr Abstand läfst sich in Zeit umrechnen, da die Geschwindigkeit des Objekts sich aus dem Verhältnis seiner Lage im Augenblick der Messung zu der Ausgangsstellung ergibt; im ersteren Falle als $\sqrt{2gh}$, wenn h die vorher durchlaufene Fallhöhe bedeutet. — Die Lineargeschwindigkeit eines Punktes vom Radius r am Pendel beträgt $r \cdot 2\pi/\tau \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$, wenn τ die Schwingungsdauer, A der Winkel, aus dem es losgelassen wurde, und α der augenblickliche Ablenkungswinkel ist.

Siehe auch **109**, Pendelunterbrecher.

4. Rotirende Trommel. Ähnlich wie oben. Es wird die anderweitig gemessene Umlaufsgeschwindigkeit (s. z. B. **57**, phonisches Rad) zu Grunde gelegt.

5. Rotirender Spiegel. Die Umlaufszeit sei τ, die Drehung beträgt dann in der Zeit t den absolut gemessenen Winkel $\alpha = t \cdot 2\pi/\tau$. Das Bild eines um A vor dem Spiegel liegenden Objekts verschiebt sich bei der Drehung α um $\alpha \cdot 2A$, in der Zeit t also um $l = 4\pi A t/\tau$. Wird l gemessen, z. B. mittels eines um A hinter dem Spiegel liegenden Mafsstabes, so ist also $t = \frac{1}{4\pi}\frac{l}{A}\tau$. Dieselbe Formel gibt die Zeit zwischen zwei Ereignissen, die an demselben Ort auf einander folgen und im Spiegel gesehen um l auseinanderliegen. Ist z. B. $A = 2000$ mm, $\tau = \frac{1}{100}$ sec, $l = 1$ mm, so wird $t = \frac{1}{2500000}$ sec. Der Fehler der Längenmessung kann leicht < 1 mm gemacht, ferner A vergröfsert, τ erheblich verkleinert werden, so dafs kurze Zeiten auf viel weniger als 10^{-7} sec genau zu bestimmen sind.

In vielen Fällen kann man durch einen mit dem Instrument bewegten elektrischen Kontakt bewirken, dafs die Ereignisse eintreten, wenn der

Mechanismus die richtige Stellung hat. — Akustische Schwingungen von Flammen lassen sich mit langsamer, Oscillationen in einem elektrischen Entladungsfunken mit schneller Rotation sichtbar machen und messen.

Über die Messung von Lichtgeschwindigkeiten (Foucault, Michelson) vgl. z. B. Wüllner, Physik IV, 25. 1899; Müller-Pfaundler, II, 14. 1897.

30. Einige astronomische Bezeichnungen.

1. Zur Bestimmung des Ortes eines Gestirns dienen folgende Begriffe:

Azimut A: Bogen des Horizonts vom Südpunkte des Meridians zum Vertikalkreise des Gestirns (Winkel zwischen Vertikalkreis und Meridian).

Höhe h: Bogen des Vertikalkreises vom Horizont zum Gestirn.

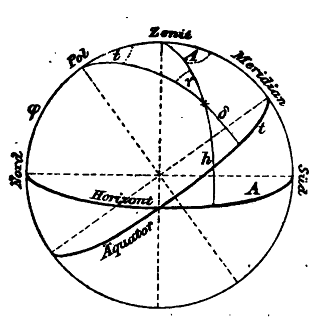
Deklinationskreise (oder Stundenkreise): Gröfste Kreise durch den Himmelspol.

Stundenwinkel t: Bogen des Himmelsäquators von dem Südpunkt des Meridians zum Deklinationskreis des Gestirns.

Deklination δ: Bogen des Deklinationskreises vom Äquator zum Gestirn.

Kulmination: Durchgang durch den Meridian eines Ortes.

Polhöhe φ: Geographische Breite eines Ortes.



Parallaktischer Winkel γ: Winkel zwischen Deklinationskreis und Vertikalkreis des Gestirns.

Aus dem sphärischen Dreieck von den Seiten $90-\delta$ $90-h$ $90-\varphi$ und den Winkeln $180-A$ t γ folgen u. A. die Gleichungen

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cdot\cos A \quad 1$$
$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cdot\cos t \quad 2$$
$$\cos h\sin A = \cos\delta\sin t \quad 3$$
$$\cos h\cos A = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cdot\cos t \quad 4$$
$$\sin t\,\mathrm{ctg}\,A = -\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta + \sin\varphi\cos t. \quad 5$$

Frühlingspunkt: Aufsteigender Knoten der Ekliptik.

Rektascension eines Gestirns α: Bogen des Äquators vom Frühlingspunkt zum Deklinationskreise des Gestirns. Der Äquator wird dabei in 24^h oder in 360^0 geteilt. Die Rektascension rechnet man der täglichen Bewegung entgegen.

Die übrigen Bögen des Äquators oder des Horizontes zählen im Sinne der täglichen Bewegung.

Die Örter einiger Hauptsterne s. in Tab. 49.

2. Zur Zeitbestimmung werden die Bezeichnungen gebraucht:

Sternzeit z: Bogen des Himmelsäquators vom Südpunkt des Meridians zum Frühlingspunkt, den ganzen Äquator zu 24 Stunden gerechnet.

Sterntag: Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Kulminationen eines Fixsterns. 1 mittl. Tag = 1,002738 Sterntag = 1 Sterntag + 235,9 mittl. Sekunden.

Der Sterntag beginnt mit dem Durchgang des Frühlingspunktes durch den Meridian. Ein Gestirn passirt also den Meridian (es kulminirt) in dem Augenblick, wann seine Rektascension gleich der Sternzeit ist. Allgemein: Die Sternzeit z ist $=$ Stundenwinkel t $+$ Rektascension α eines Gestirnes, also $t = z - \alpha$.

„Wahrer" oder scheinbarer Mittag: Durchgangszeit des Sonnenmittelpunkts durch den Meridian.

Sonnenzeit: Stundenwinkel der Sonne.

Zeitgleichung: Mittlere Orts-Zeit minus Sonnenzeit.

Bei der jetzigen Rechnung nach „Einheitszeit", welche sich auf einen Meridian von der östl. geogr. Länge l_0 Grad bezieht (15° für Mitteleuropa), ist für einen Ort von der östl. geogr. Länge l Grad die mittlere Ortszeit $=$ Einheitszeit $+ 4(l - l_0)$ min.

Der astronomische Sonnentag beginnt um Mittag, wird von 0 bis 24^h gezählt und führt das Datum des Tages, an welchem er beginnt.

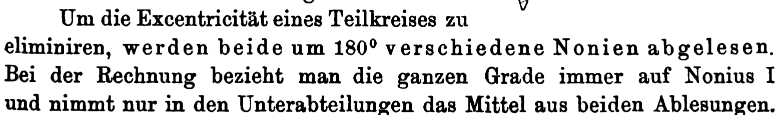
Über Deklination der Sonne, Sternzeit und Zeitgleichung s. Tab. 45.

Ausführlichere Tafeln im Nautischen Jahrbuch, dem Berliner astr. Jahrb. oder dem Nautical Almanac; auch in Bremiker's Logarithmen. Weitere oder genauere Methoden s. u. a. Brünnow, sphär. Astronomie; Jordan, Zeit- und Ortsbestimmung; Wislicenus, geogr. Ortsbestimmungen, Leipzig 1891.

30a. Theodolit. Universalinstrument.

Die Instrumentalbedingung, dafs die Drehaxe des Fernrohrs auf der anderen Drehaxe senkrecht steht, setzen wir als erfüllt voraus.

Berichtigung der Libelle. Die Blase soll, wenn die Drehaxe des Fernrohrs horizontal liegt, in oder wenigstens nahe der Mitte einspielen. Um dies zu erkennen oder herbeizuführen, bringt man die aufgesetzte Libelle zum Einspielen und setzt sie dann auf den Zapfen der Axe um oder dreht die Vertikalaxe des Instruments um genau 180°; dann muss die Libelle wieder einspielen. Zeigt sie eine beträchtliche Abweichung, so wird deren Hälfte an der Libelle korrigirt. Die andere Hälfte korrigirt man mit den Fufsschrauben und wiederholt die Prüfung. Ein grober Fehler, bei dem die Blase bis an das Ende der Libelle ausschlägt, wird zuvor durch Probiren beseitigt.



Um die Excentricität eines Teilkreises zu eliminiren, werden beide um 180° verschiedene Nonien abgelesen. Bei der Rechnung bezieht man die ganzen Grade immer auf Nonius I und nimmt nur in den Unterabteilungen das Mittel aus beiden Ablesungen.

Zur Messung von Azimutal- und Höhenwinkeln sind die Axen vertikal bez. horizontal zu stellen.

1. Vertikale Axe.

Eine Drehaxe steht vertikal, wenn die Libelle bei der Drehung um diese Axe ihren Stand nicht ändert: man dreht die Libelle zunächst parallel der Verbindungslinie zweier Fufsschrauben und bringt sie mit diesen zum Einspielen. Dann dreht man um 180° und berichtigt, falls die Blase jetzt eine andere Stellung zeigt, den halben Unterschied mit den Fufsschrauben. Endlich wird um 90° gedreht und mit der dritten Fufsschraube dieselbe Einstellung der Blase bewirkt, wie die soeben verlassene. Wenn das Verfahren zum ersten Male noch einen Fehler zurückgelassen hat, so wiederholt man es.

2. Horizontale Axe.

a) Stehen zwei Axen senkrecht auf einander, so verbürgt die vertikale Stellung der einen von selbst die horizontale der anderen. Diese Bedingung kann ohne Libelle folgendermafsen geprüft werden, wenn kein Kollimationsfehler vorhanden ist (vgl. Nr. 3). Man sucht zwei möglichst entfernt übereinander liegende Objekte, die von dem Fernrohr bei Drehung um seine Axe getroffen werden. Dann dreht man um 180° um die Vertikalaxe und schlägt das Fernrohr durch; die beiden Objekte müssen dann wieder durch eine blofse Drehung um die Fernrohraxe einstellbar sein.

Selbständig prüft man die Horizontalität einer Fernrohraxe:

b) Mit der Libelle. Man prüft zuerst, ob die beiden Zapfen der Fernrohraxe gleich dick sind, indem man nach Einstellung auf das Einspielen der Blase das Fernrohr umlegt (die Zapfen in ihren Lagern vertauscht) und die Libelle in ihrer früheren Stellung wieder aufsetzt. Die gleiche Einstellung der Blase beweist die gleiche Dicke der beiden Zapfen.

Dies vorausgesetzt wird eine horizontale Drehaxe daran erkannt, dafs die auf der Axe umgesetzte Libelle den früheren Stand einnimmt.

Ob die Fernrohraxe rund ist, prüft man durch Drehung unter der aufgesetzten Libelle.

c) Mit dem Senkel. Man hängt ein langes Senkel entfernt vor dem Theodolit auf und visirt nach verschiedenen Höhen. Der Kollimationsfehler mufs zuvor berichtigt sein.

3. Kollimationsfehler.

a) Zur Prüfung, ob die Sehlinie zur Drehungsaxe des Fernrohrs senkrecht steht, stellt man auf ein ungefähr in der Horizontalebene des Instrumentes gelegenes fernes Objekt ein, dreht den Horizontalkreis um genau 180^0 und stellt das Fernrohr mittels Durchschlagens in seine frühere Richtung. Das Objekt mufs wieder genau einstehen. Ein Unterschied ist zur Hälfte durch Verschiebung des Fadenkreuzes zu berichtigen, worauf man die Prüfung wiederholt.

b) Oder man stellt wie oben ein, legt bei feststehendem Instrument das Fernrohr in seinen Lagern um und richtet es auf denselben Gegenstand; dieser mufs wieder im Fadenkreuz erscheinen. Vorausgesetzt wird hier die gleiche Dicke der beiden Fernrohrzapfen.

4. Messung einer absoluten Höhe. Horizontal- und Zenit-Punkt.

a) Das Instrument sei nach Nr. 1 bis 3 berichtigt. Man stellt auf den Gegenstand ein und liest den Höhenkreis ab; man dreht die Vertikalaxe um 180^0, schlägt das Fernrohr durch, stellt wieder ein und liest den Höhenkreis ab. Der Unterschied (Vorzeichen!) beider Ablesungen gibt den doppelten Zenitabstand des Objekts. Der halbe Unterschied von 90^0 abgezogen liefert also die Höhe des Objekts über dem Horizont.

Das arithmetische Mittel beider Einstellungen gibt den Zenitpunkt des Höhenkreises, die Hinzufügung von 90^0 zum Zenitpunkt ergibt den Horizontalpunkt.

b) Quecksilberhorizont. Anstatt das Fernrohr durchzuschlagen, kann man vor dasselbe einen Quecksilberhorizont stellen und nun durch Messung des Höhenwinkels zwischen dem (sehr entfernten) Objekt und dessen Spiegelbild sowohl die Höhe des Objektes über dem Horizont, wie auch den Zenit- und den Horizontalpunkt des Höhenkreises, in leicht ersichtlicher Weise bestimmen.

Der Quecksilberhorizont erlaubt natürlich auch die absolute Höhenmessung mit einem Spiegelsextanten.

Auf Gestirne sind diese Verfahren um die Kulminationszeit direkt anwendbar. Für andere Zeiten bekommt man, wenn die Einstellungen rasch hinter einander ausgeführt werden, die Höhe für den mittleren Augenblick zwischen beiden Beobachtungen.

Die Beobachtung hochstehender Objekte mit einem geraden Fernrohr kann man dadurch ermöglichen oder erleichtern, dafs man vor dem Okular ein kleines, total reflektirendes Prisma befestigt. Um das Fadenkreuz zu erhellen, genügt es, einige qmm weifses Papier schräg vor das Objektiv zu halten und seitlich zu beleuchten.

Winkel zwischen zwei Objekten. Aus den Höhenwinkeln h und h' und ihrem gegenseitigen Azimutwinkel A wird der Winkelabstand w zwischen beiden gefunden aus der Gleichung $\cos w = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cdot \cos A$.

31. Bestimmung der Meridianrichtung eines Ortes.

Der Meridian ist die Vertikalebene, in der die Gestirne kulminiren, oder die Vertikalebene des Sonnenmittelpunktes am scheinbaren Mittag, oder die Halbirungsebene zwischen den zwei Azimuten eines Gestirns, denen dieselbe Höhe entspricht, vorausgesetzt, dafs das Gestirn inzwischen keine eigene Höhenbewegung ausgeführt hat.

I. Aus der gröfsten Ausschreitung eines Gestirns. Man beobachtet einen Circumpolarstern, am besten den Polarstern selbst, zu der Zeit seiner gröfsten östlichen oder westlichen Ausschreitung. Da zu dieser Zeit die Bewegungsrichtung des Sternes vertikal ist, so kann man bequem und scharf einstellen.

Beobachtet man die östliche und westliche Ausschreitung, so geht der Meridian durch die Halbirungslinie. Insofern die Deklination δ des Gestirns und die Polhöhe φ bekannt ist (Tab. 44, 49), genügt auch eine einseitige Beobachtung. Es bildet nämlich der Vertikalkreis der gröfsten Ausschreitung mit der Nordrichtung den Winkel ϑ, den man erhält aus

$$\sin\vartheta = \cos\delta / \cos\varphi.$$

Denn Meridian, Vertikalkreis und Stundenkreis des Sterns bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $90-\varphi$, der einen Kathete $90-\delta$ und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel ϑ.

Der Polarstern hat in mittlerer geogr. Breite seine gröfste Ausschreitung ungefähr um $7^h\ 18^{min}$ bez. $19^h\ 29^{min}$ Sternzeit (Tab. 45).

II. Am Polarstern zu irgend einer bekannten Zeit. Aus dieser ergibt sich die Sternzeit z (Tab. 45), aus letzterer und der Rektas-

cension α des Polarsterns (Tab. 49) sein Stundenwinkel $t = z - \alpha$, und endlich sein Azimut A gegen den Meridian aus **30** Gl. 5, oder, in mittleren Breiten auf einige Minuten genau, $\vartheta = (90 - \delta) \sin t / \cos \varphi$.

III. Aus korrespondirenden Höhen. Man stellt den Theodolit mit vertikaler Drehaxe (**30a,** 1) auf das Gestirn ein und liest den Horizontalkreis ab. Ohne an der Höheneinstellung etwas zu ändern, beobachtet man dann dasselbe Gestirn nach seiner Kulmination wieder und stellt das Fernrohr so, daſs der Stern wieder durch das Fadenkreuz geht. Die Halbirungslinie der beiden Einstellungen liegt im Meridian des Ortes. Ein Höhenkreis ist unnötig.

Für die Genauigkeit ist günstig, daſs die Ansteigung rasch geschieht, also daſs das Gestirn dem Meridian nicht zu nahe steht.

Bei Benutzung der Sonne stellt man den Vertikalfaden Vormittags auf den einen, Nachmittags auf den anderen seitlichen Rand ein, während der Horizontalfaden z. B. den oberen Rand berührt. Die Halbirungslinie der beiden Einstellungen geht aber im allgemeinen nicht genau durch den Meridian, sondern erfordert wegen der Deklinationsänderung der Sonne die folgende „Meridianverbesserung“.

Es sei τ der halbe Zeitunterschied der beiden Beobachtungen von einander in Stunden, der Stundenwinkel der Sonne in Graden also $= 15\,\tau$. Es sei ferner ε die Änderung der Sonnendeklination während eines Tages (Tab. 45 oder Bremiker fünfstellige Logarithmen S. 149), also $\varepsilon\tau/24$ diese Änderung in der halben Zwischenzeit. Dann beträgt die Meridian-Verbesserung, wenn wieder φ die Polhöhe ist,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\varepsilon\tau}{24}\,\frac{1}{\sin 15\tau}.$$

Für mittlere europäische Breiten und bei Beobachtungen, die zwischen 8 und 10^{h} Vm., bez. 2 und 4^{h} Nm. angestellt werden, genügt innerhalb einer Bogenminute Genauigkeit, die Korrektion $= 0{,}27 \cdot \varepsilon$ zu setzen.

Selbstverständlich liegt die gefundene Mittellinie im Frühjahr westlich vom Meridian, im Herbst östlich. In den Tagen der Sonnenwenden verschwindet die Korrektion.

Beweis. Es sei die Deklination der Sonne zwischen beiden Durchgängen durch die Höhe h um $\varDelta\delta$ gewachsen und dadurch das zweite Azimut um $\varDelta A$ zu groſs gefunden. Zwischen $\varDelta\delta$ und $\varDelta A$ wird durch Differentiation der Gleichung 1 (**30**) die Beziehung gefunden $\varDelta\delta \cdot \cos\delta = \varDelta A \cdot \cos\varphi \cos h \sin A$. Ersetzt man hierin $\cos h \sin A$ nach Gl. 3 durch $\cos\delta \sin t$, so kommt $\varDelta\delta = \varDelta A \cdot \cos\varphi\, \sin t$. Um $\frac{1}{2}\varDelta \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\varDelta\delta/(\cos\varphi\,\sin t)$ wird man das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungen korrigiren müssen. Man braucht nur noch $\frac{1}{2}\varDelta\delta = \frac{1}{24}\varepsilon\tau$ und $\sin t = \sin 15\tau$ zu setzen, um den obigen Ausdruck zu erhalten.

IV. Aus der Beobachtung der Sonne um Mittag. Kennt man die absolute Zeit (**33**), so liefert die Beobachtung des Sonnenmittelpunktes um 12^{h} „wahrer“ Sonnen-Zeit (= mittlerer Orts-Zeit minus Zeitgleichung, Tab. 45) den Meridian. Man stellt dabei den Theodoliten auf den west-

lichen oder den östlichen Sonnenrand ein. Dann ist das beobachtete Azimut nach Osten oder nach Westen zu berichtigen um

$$\varDelta = \varrho / \sin(\varphi - \delta).$$

Hier bedeutet ϱ den Halbmesser, δ die Deklination der Sonne und φ die Polhöhe; Tab. 47, 45 u. 44.

Beweis. Meridian, Höhenkreis des Sonnenrandes und Halbmesser der Sonne zu ihrem Berührungspunkt mit dem Höhenkreis bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\varphi - \delta$, worin die Kathete ϱ dem Winkel $\varDelta$ gegenüberliegt. Es ist also $\sin\varDelta : 1 = \sin\varrho : \sin(\varphi - \delta)$. Für $\sin\varDelta$ und $\sin\varrho$ kann man $\varDelta$ und ϱ setzen.

32. Polhöhe eines Ortes.

I. Die geographische Breite oder Polhöhe eines Ortes wird am leichtesten aus der Höhe eines Gestirns bei seiner Kulmination abgeleitet. Kennt man den Meridian bereits (**31**), so beobachtet man bei dem Durchgang durch diesen; andernfalls folgt man mit dem Fernrohr dem Objekt in der Nähe des Meridians und liest die höchste bez. niedrigste Einstellung des Fernrohrs ab.

Die beobachtete Höhe mufs wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung um die aus Tab. 48 zu entnehmende „Refraktion" des Gestirns vermindert werden. Nennt man die so korrigirte Höhe h, ist ferner δ die Deklination des Gestirnes (Tab. 49), so wird die Polhöhe

$$\varphi = 90 - h + \delta \quad \text{oder} \quad \varphi = 90 + h - \delta,$$

je nachdem die Kulmination eine obere oder eine untere war.

Am Polarstern sind wegen dessen langsamer Bewegung die Messungen am bequemsten und genauesten.

Um die jeweilige Kulminationszeit eines Gestirns voraus zu kennen, zieht man die Sternzeit um Mittag von der Rektascension des Sternes (Tab. 49) ab; dann erhält man die Tageszeit der oberen Kulmination desselben, gerechnet vom Mittage ab in Sternstunden. 1 Sternstunde = 0,9973 mittl. Stunden.

Die Sternzeit um Mittag findet man aus Tab. 45. Wegen der periodischen, durch die Schaltjahre ausgeglichenen Verschiebung des Frühlingsanfangs, und ferner, weil der Sonnen-Mittag für westliche Orte später fällt als für östliche, kann die Tabelle nicht für alle Jahre und für alle Orte dieselbe sein. Wenn an einem Orte von der östlichen geogr. Länge l^0 von Greenwich die Sternzeit für die mittlere Ortszeit T gesucht wird, so hat man deswegen nicht mit T selbst, sondern mit einem, in Bruchteilen des Tages ausgedrückten, korrigirten Werte

$$T + k + \tfrac{1}{360}(15^0 - l)$$

als Argument in die Tabelle einzugehen. k hat für jedes Jahr einen anderen Wert, den man in Tab. 46 findet. l endlich wird aus Tab. 44 oder aus einer Landkarte entnommen. — Ist T die mitteleuropäische „Einheitszeit", so ist nur $T + k$ zu nehmen.

II. Man beobachtet mit feststehendem Horizontalkreis des Theodoliten die beiden Höhen des Polarsterns, in denen dieser während eines Umlaufs den vertikalen Faden passirt, und nimmt das Mittel, welches, wegen der Refraktion korrigirt, die Polhöhe gibt.

III. Eine einzelne Beobachtung des Polarsterns zu genähert bekannter Zeit gibt die Polhöhe, da $(90-\delta)\cos t$ (vgl. **31** II) meistens genügend genau als vertikale Erhebung des Sterns über den Pol angesehen werden kann.

Über die Deklination der Sonne vgl. S. 120 und Tab. 45. Selbstverständlich mufs hier die beobachtete Einstellung, welche auf den oberen oder den unteren Rand stattfindet, um den Sonnenhalbmesser (Tab. 47) abgeändert werden.

33. Zeitbestimmung aus Sonnenhöhen.

I. Aus einer einzelnen Höhe.

Für einen Beobachtungsort von bekannter geographischer Länge und Breite bietet sich als einfaches Mittel zur Zeitbestimmung die Beobachtung des Standes der Sonne über dem Horizont. Sie wird gewöhnlich mit dem Sextant oder dem Theodolit ausgeführt. Am günstigsten für die Bestimmung sind die Zeiten, in denen die Ansteigung des Gestirns rasch und gleichmäfsig geschieht, also wann der Stand ungefähr östlich oder westlich ist. Je näher dem Mittag, desto ungenauer ist die Bestimmung. Bedeutet

φ die geographische Breite oder Polhöhe des Ortes,
δ die Deklination der Sonne zur Beobachtungszeit (vgl. f. S.),
h die wirkliche Höhe des Sonnenmittelpunktes,

so wird der Stundenwinkel t der Sonne oder die „Sonnenzeit" im Augenblicke der Beobachtung erhalten aus (Formel 2, S. 112)

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} .$$

Der Stundenwinkel t wird von den trigonometrischen Tafeln zunächst in gewöhnlichem Bogenwert gegeben. Die Bogengrade werden durch 15 geteilt, um die Sonnenzeit in Stunden zu erhalten. t ist Vormittags negativ, Nachmittags positiv zu nehmen.

Korrektionen. 1) Von dem beobachteten Ort, der wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu hoch gefunden wird, subtrahirt man nach Tab. 48 die Refraktion.

2) Man addirt oder subtrahirt den Halbmesser der Sonne (Tab. 47). Dieser eliminirt sich von selbst, wenn man, um unabhängig vom Horizontalpunkt des Höhenkreises zu sein, mit Durchschlagen (**30a**, Nr. 4) zweimal einstellt und die eine Einstellung auf den unteren, die andere auf den oberen Sonnenrand richtet. Um das Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten für die Zeit zu nehmen, in welcher der Sonnenmittelpunkt die mittlere Höhe passirt, müssen beide Beobachtungen rasch auf einander folgen, da die Erhebung der Sonne nicht gleichförmig geschieht.

Geographische Breiten finden sich in Tab. 44, können auch aus einer guten Karte auf $0{,}01^0$ entnommen werden. Die Bestimmung derselben siehe in **32.**

Deklination der Sonne. Man interpolirt diese aus Tab. 45 für die Beobachtungszeit, welche man um $+k$ (Tab. 46) bez. um $+k+\frac{1}{360}(15-l)$ korrigirt hat. Vgl. hierüber S. 118. Ein Fehler von 3^{min} in der Zeit gibt höchstens einen Fehler von δ um $0{,}001^0$, so dafs die Turmuhrzeit genügt.

Mittlere Zeit. Zu der wahren Sonnenzeit t fügt man zur Reduktion auf mittlere Ortszeit die aus Tab. 45 zu entnehmende „Zeitgleichung“ hinzu; auf mittel-europäische Einheitszeit aufserdem $+(15-l)\times 4^{min}$.

Andere Gestirne. Anstatt der Sonne mag irgend ein anderes Gestirn von bekannter Deklination und Rektascension (Tab. 49) gewählt werden, welches weder dem Horizonte noch dem Pole zu nahe steht. Dann bedeutet das aus der Formel im Eingang berechnete t den Stundenwinkel des Gestirns. Fügt man zu t die Rektascension des Sternes, so erhält man die Sternzeit im Augenblicke der Beobachtung, zu der dann die mittlere Zeit aus Tab. 45 oder genauer nach den astronomischen Jahrbüchern gefunden wird.

Die hier gegebenen Vorschriften und Tabellen vernachlässigen Korrektionen, welche unter $0{,}01^0$ liegen.

II. Aus korrespondirenden Höhen.

Diese Zeitbestimmung bedarf aufser einer gleichmäfsig gehenden Uhr nur eines in der Höhe klemmbaren Fernrohres mit vertikaler Drehaxe (**30a**, 1), ohne jede Kreisteilung. Die

atmosphärische Strahlenbrechung kommt für gewöhnliche Zwecke nicht in Betracht. Bei den Beobachtungen der Sonne stellt man jedesmal auf denselben unteren oder oberen Rand ein, ohne auf den Mittelpunkt umrechnen zu müssen.

Im Interesse scharfer Zeitbestimmung beobachtet man die Gestirne möglichst im Osten oder Westen.

Ein Gestirn passire vor und nach seiner Kulmination den Horizontalfaden eines Fernrohres, welches auf konstante Höhe eingestellt ist. Das arithmetische Mittel der beiden Uhrzeiten gibt für ein Gestirn ohne Eigenbewegung die Uhrzeit, für welche es kulminirt. Die absolute Zeit der Kulmination findet sich aus den Tabellen.

Fixsterne. Mitten zwischen den beiden Augenblicken, in denen der Stern vor und nach seiner Kulmination dieselbe Höhe passirt, liegt sein Durchgang durch den Meridian. Für diesen Augenblick gibt also die Rektascension des Sternes (Tab. 49) die Sternzeit, aus welcher man die mittlere Zeit nach Tab. 45 oder einem astronomischen Jahrbuche entnimmt.

Sonne. Die Beobachtung liefert den Zeitpunkt des Sonnendurchgangs durch den Meridian, d. h. den scheinbaren oder Sonnenmittag; die mittlere Ortszeit hat dann den durch die Zeitgleichung (Tab. 45) gegebenen Wert. In den Tagen der Sonnenwenden erhält man aus den Zeiten zweier Durchgänge durch die gleiche Höhe die Zeit des Durchgangs durch den Meridian genau als das arithmetische Mittel. Im allgemeinen aber kommt noch wegen der täglichen Deklinationsänderung der Sonne eine Korrektion, die „Mittagsverbesserung“ hinzu, da die Sonne ihren höchsten Stand in der ersten Jahreshälfte etwas hinter, in der zweiten Hälfte etwas vor dem Meridian erreicht.

Es sei φ die Polhöhe des Ortes, δ die Deklination der Sonne und ε ihre tägliche Änderung in Bogengraden (Tab. 45 oder Bremiker 5stell. Logarithmen). Endlich sei τ der halbe Zeitunterschied zwischen den beiden Beobachtungen in Stunden (also $\pm 15\tau$ der Stundenwinkel der Sonne in Bogengraden). Die Mittagsverbesserung beträgt dann in Zeitsekunden

$$10\varepsilon\tau\cdot(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta \cos 15\tau)/\sin 15\tau.$$

Beweis. Es bedeute (Fig. zu **30**) t den Stundenwinkel der Sonne bei der Beobachtung. Ohne Deklinationsänderung würden die absoluten

Werte von t Vor- und Nachmittags gleich sein. Ist vom ersten bis zum zweiten Durchgang durch die Höhe h die Deklination um $\Delta\delta$ gewachsen, so wird im zweiten Augenblick t um eine Gröfse Δt zu grofs gefunden, für welche man durch Differentiation von Gleichung 2 (**30**) die Beziehung erhält

$$0 = \Delta\delta \cdot (\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t) - \Delta t \cdot \cos\varphi \cos\delta \sin t.$$

Also ist $\Delta t = \Delta\delta(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta \cos t)/\sin t$. An dem arithmetischen Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten ist offenbar, um es auf den Durchgang durch den Meridian zu reduciren, die Korrektion $\frac{1}{2}\Delta t$ anzubringen. Beachtet man noch, dafs $t = 15\tau$ und dafs $\frac{1}{2}\Delta\delta$ in Bogengraden $= \varepsilon\tau/24$, also in Zeitsekunden $= 86400/360 \cdot \varepsilon\tau/24 = 10\varepsilon\tau$, so kommt der obige Ausdruck für diese Korrektion.

34. Bestimmung des Ganges einer Uhr oder Festhaltung einer absoluten Zeit.

Zwei absolute Zeitbestimmungen (**33**) liefern natürlich den Gang der zur Beobachtung dienenden Uhr. Einfacher und häufig genauer sind aber die Beobachtungen eines Gestirns in einem bestimmten Azimut.

I. Beobachtung an Fixsternen. Zu diesem Zwecke kann man jedes mit Fadenkreuz versehene Fernrohr gebrauchen, welches eine horizontale Drehungsaxe besitzt. Das bestimmte Azimut wird gegeben, wenn man von einem bestimmten Standorte aus eine entfernte irdische Marke zum Einstellen benutzt. Am günstigsten sind Beobachtungen nahe am Meridian.

Noch einfacher und leicht auf 1^{sec} genau ist das mit blofsem Auge beobachtete Verschwinden oder Auftauchen eines Fixsterns hinter einem entfernten irdischen Objekte. Ist letzteres mindestens 100 m entfernt, so genügt als fester Punkt für das Auge der Rand eines Fensterkreuzes oder ähnliches. Geheizte Schornsteine u. dgl. sind als bedeckende Objekte ungeeignet.

Selbstverständlich wählt man am besten Sterne, welche dem Äquator nahe stehen.

Zwischen zwei Durchgängen eines Fixsterns durch denselben Punkt liegt ein Sterntag, welcher um $235{,}9^{\text{sec}} = 3{,}932^{\text{min}} = 0{,}06553^{\text{stund}} = 0{,}002730^{\text{tag}}$ kürzer ist als der mittlere Tag.

II. Beobachtungen an der Sonne. Zwei auf einander folgende Sonnendurchgänge durch den Meridian liefern, unter Berücksichtigung der täglichen Änderung der Zeitgleichung

(Tab. 45 und Bremiker fünfstellige Logarithmen S. 149), die Länge des mittleren Tages. Es ist hierzu nicht erforderlich, dafs der Meridian ganz genau sei. Ein konstanter Fehler von 1^0 macht den beobachteten Tag höchstens um etwa 2^{sec} unsicher. Sowohl um die Tag- und Nachtgleichen wie um die Sonnenwenden ist diese Unsicherheit am kleinsten.

Zur Beobachtung reicht ein Fernrohr mit horizontaler Drehaxe aus, an dessen Fadenkreuz man den Antritt und den Austritt der Sonne beobachtet. Für mäfsige Ansprüche genügt auch der Schatten eines Senkels oder das von einer engen Öffnung entworfene Sonnenbildchen. Man nimmt den Zeitpunkt, in welchem dieser Schatten oder das Sonnenbild von einer auf dem Fufsboden oder auf einer gegenüberstehenden Wand angebrachten Marke halbirt wird. Auch eine gute Sonnenuhr läfst den Gang der Uhr in gröfseren Zeiträumen einigermafsen genau bestimmen.

Eine einmal gewonnene absolute Zeit läfst sich durch diese einfachen Mittel festhalten.

35. Gravitationskonstante. Länge des Sekundenpendels.

Die Konstante g der Schwerbeschleunigung, d. h. die Zunahme der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers in 1 sec, beträgt in Meereshöhe unter 45° Breite $g = 980{,}6$ und für die geogr. Breite φ und die Höhe H Meter üb. d. Meere

$$g = 980{,}6\,(1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}0000002 \cdot H)\ \mathrm{cm/sec}^2.$$

Für $H = 0$ s. Tab. 43. Die lokalen Abweichungen erreichen sehr selten 0,2. — Ebensoviel beträgt der Einflufs der Höhe auf 1000 m Erhebung. 0,0000002 ist ein Mittelwert, der natürlich durch die Bodenbeschaffenheit beeinflufst wird.

Bei sehr kleiner Schwingungsweite ist die Schwingungsdauer eines punktförmigen Pendels von der Länge l gleich $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; die eines beliebig gestalteten Pendels gleich $\pi\sqrt{\frac{K}{D}}$ (Anh. 12), wo K das Trägheitsmoment und D die „Direktionskraft" bedeutet, d. h. $D = a \cdot gM$, wenn a den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe und M die schwingende Masse vorstellt.

Der Punkt eines Pendels, der, wenn er allein vorhanden wäre, die gleiche Schw.-Dauer zeigen würde, heifst der Schwingungspunkt. Es gilt der Satz, dafs, wenn man ein Pendel umkehrt und im Schwingungspunkt aufhängt, dieselbe Schwingungsdauer entsteht.

Bestimmung von g mit dem Pendel. Es wird im allgemeinen nicht leicht sein, g genauer zu bestimmen, als es aus der Formel berechnet wird. Als Übungsaufgabe soll die Messung mit einem Fadenpendel beschrieben werden. Eine gut abgedrehte, möglichst schwere Kugel von etwa 2 cm Durchmesser hänge an einem leichten und weichen Faden über eine Schneide bereits eine so lange Zeit, dafs eine konstante Pendellänge entstanden ist. Diese Länge l sei gezählt von der Schneide bis zum Mittelpunkt der Kugel, sie wird also mit einem spiegelnden Mafsstab (**21**, 1) oder mit dem Kathetometer (**22**) gemessen als das arithmetische Mittel aus den Abständen bis zum obersten und dem untersten Punkte der Kugel.

Schwingungsdauer τ. Finden in t sec k Schwingungen statt, so ist $\tau = t/k$. Wenn die Länge zwischen 99 und 100 cm gewählt wird, so kommt die Dauer der Sekunde nahe, und man beobachtet nach der Methode der Koincidenzen. Liegt zwischen zwei auf einander folgenden Koincidenzen der Pendelschwingung mit einer vollen Sekunde eine Zeit $= n$ sec, so ist

$$\tau = \frac{n}{n-1} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{n}{n+1},$$

je nachdem das Pendel hinter der Uhr zurückbleibt oder ihr vorauseilt. Die Koincidenz wird mit dem Auge beurteilt oder nach dem Gehör auf die Umkehr des Pendels oder auf seinen Durchgang durch die Mitte bezogen. Eine längere Beobachtungsreihe kann man, wenn die Amplitude klein oder wenig veränderlich war, nach **3** II berechnen.

Korrektionen der beobachteten Schwingungsdauer τ. 1) Amplitude. Dieselbe sei $= \alpha$. Für α genügt meistens das Mittel aus der Schwingungsweite zu Anfang und zum Schlufs. Die beobachtete Schwingungsdauer ist gemäfs der Formel in **28** zu dividiren durch $1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{4}\alpha$. Da die Korrektion klein ist, so kann man (Formel 4, S. 9) statt dessen von τ abziehen $\tau \cdot \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{4}\alpha$. Siehe Tab. 27.

2) Trägheitsmoment der Kugel. Eine punktförmige Masse würde rascher schwingen als die Kugel vom Radius r. Korrektion $= - \tau \cdot \frac{1}{5} r^2/l^2$.

3) Faden. Der mitschwingende Faden hat die Schwingungs-

dauer der Kugel allein vermindert. Korrektion $= + \tau \cdot \frac{1}{12} \mu/m$, wenn μ und m die Masse des Fadens und der Kugel.

Beweis. Ein Pendel mit punktförmiger Masse von der Länge l würde haben $\tau_0 = \pi\sqrt{l/g}$; unser Pendel, wenn K sein Trägheitsmoment und D die Direktionskraft ist (vgl. S. 108 „Kugel“ und „Hilfssatz“), hat:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}} = \pi\sqrt{\frac{l^2 m + \frac{2}{5} r^2 m + \frac{1}{3} l^2 \mu}{g(lm + \frac{1}{2} l\mu)}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{5} r^2/l^2 + \frac{1}{3}\mu/m}{1 + \frac{1}{2}\mu/m}}.$$

Die gesuchte Schwingungsdauer eines punktförmigen Pendels mit einem Aufhängefaden ohne Masse oder $\pi\sqrt{l/g}$ ist demnach gleich τ, multiplicirt mit $\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\mu/m}{1 + \frac{2}{5} r^2/l^2 + \frac{1}{3}\mu/m}}$, wofür nach Formel 8, S. 9 geschrieben werden kann $\sqrt{(1 - \frac{2}{5} r^2/l^2 + \frac{1}{6}\mu/m)}$. Dieser Ausdruck ist aber nach Formel 3 gleich $1 - \frac{1}{5} r^2/l^2 + \frac{1}{12}\mu/m$, q. e. d.

4) Auftrieb in der Luft. Die Schwere der Kugel wäre im leeren Raum im Verhältnis $1 + \lambda/s$ gröfser gewesen, wenn λ und s die Dichtigkeit der Luft (**18**) und der Kugel (Tab. 2). Korrektion der Schwingungsdauer $= -\tau \cdot \frac{1}{2}\lambda/s$.

5) Inhomogenität der Kugel. Man hängt die Kugel, oben und unten vertauscht, um, beobachtet wieder und nimmt das Mittel.

Nicht berücksichtigt sind Fadensteifheit und mitschwingende Luftmasse.

Die so korrigirte Schwingungsdauer heifse τ_0, dann ist $g = \pi^2 l/\tau_0^2$. Die Länge l_s des Sekundenpendels würde sein $l_s = l/\tau_0^2$.

Reversionspendel. Dasselbe hat zwei parallele Axen. Werden diese durch Verstellung oder Änderung der Massenverteilung so regulirt, dafs für beide die gleiche Schw.-Dauer τ gilt, so ist (S. 123 unten), wenn l ihr Abstand, wieder $g = \pi^2 l/\tau^2$.

Lokale Variationen von g pflegen mit dem Sterneck'schen Pendel (ZS. f. Instr. 1888, 157), zeitliche Änderungen der Schwererichtung mit dem Zöllner'schen Horizontalpendel (Pogg. Ann. 150, 134. 1873) beobachtet zu werden. Über letzteres besonders auch Rebeur-Paschwitz, z. B. Astr. Nachr. 1892, S. 193.

Atwood'scher Fallapparat.

Um aus Beobachtungen an diesem bekannten Instrument g abzuleiten, mufs die als Übergewicht treibende Masse m im Verhältnis zum äquilibrirten Teil M der Gesamtmasse bekannt sein. Wenn die Beschleunigung b beobachtet wird, so ist $g \cdot m = b \cdot (M + m)$, also $g = b(M + m)/m$.

In M ist die der Trägheit des Rades äquivalente Masse x enthalten, die auf zweierlei Weise in Rechnung gesetzt werden kann.

1) Man eliminirt x durch Beobachtungen an zwei Paaren von Massen am Faden; diese zusammen sollen je M_1 bez. M_2 heifsen. Dann folgt also aus den zugehörigen beiden Beschleunigungen b_1 bez. b_2 $g \cdot m = b_1 (M_1 + m + x)$ und $g \cdot m = b_2 (M_2 + m + x)$, woraus man erhält

$$m + x = \frac{b_1 M_1 - b_2 M_2}{b_2 - b_1} \quad \text{und} \quad g = \frac{b_1 b_2}{b_2 - b_1} \frac{M_1 - M_2}{m}.$$

2) Man bestimmt das Trägheitsmoment K der Rolle durch Beobachtung (**29,** IIb). Dann ist einzusetzen $x = K/r^2$, wenn r den Halbmesser der Rolle bedeutet. Denn die Winkelbeschleunigung durch das Drehmoment $p \cdot r$ einer Kraft p am Faden beträgt (Anh. 12) $p \cdot r/K$, die Linearbeschleunigung des Fadens hierdurch also $p \cdot r^2/K$. Demnach vertritt K/r^2 die Trägheit einer äquivalenten, in der Peripherie koncentrirten Masse.

Absolute Gravitationskonstante G.

G ist die zwischen zwei Masseneinheiten im Abstande Eins bestehende Anziehung und wird aus der Kraft $k = G \frac{m m'}{r^2}$ abgeleitet, die zwei kleine oder kugelförmige Massen m, m' aus dem Abstande r ihrer Mittelpunkte auf einander ausüben. Die Messung geschieht gewöhnlich

A) mit der Coulomb'schen Drehwage. Das Drehmoment, welches eine oder mehrere passend angebrachte feste Massen auf eine oder zwei an dem Wagebalken befestigte Massen ausüben, wird mit der Direktionskraft der Aufhängung verglichen, meist durch die hervorgebrachte Ablenkung (Cavendish 1798, Reich, Baily, Cornu, Boys, Braun, Poynting). Auch die durch die Annäherung der Massen bewirkte Änderung der Schwingungsdauer kann benutzt werden.

B) mit der Wage. Man bestimmt die Änderung des Gewichts, welche eine angehängte Masse durch eine feste Masse erfährt, die man ihr von unten nähert (Jolly, Poynting), oder indem man die bewegliche Masse abwechselnd ober- und unterhalb einer festen wägt (Richarz u. Krigar-Menzel).

Als Resultat ist anzunehmen, dafs zwei Grammpunkte aus 1 cm Abstand gegenseitig die anziehende Kraft $= 6{,}68 \cdot 10^{-8}$ Dynen ausüben, d. h. $G = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\,gr^{-1}\,sec^{-2}}$.

Druck.

36. Druckmessung. Manometer.

Druck nennt man die Kraft auf die Flächeneinheit. Für Messungen kommt hauptsächlich der Druck von Flüssigkeiten oder Gasen in Betracht. Gewöhnlich wird der Druck durch Flüssigkeitshöhen gemessen; diese bieten eine im ganzen Messbereich konstante Empfindlichkeit.

I. Flüssigkeitsmanometer.

Eine Säule von der Höhe h cm und dem spec. Gewicht s stellt den Druck hs gr-Gew./cm^2 oder in absolutem Maſse $= ghs$ Dyne/cm^2 dar; g ist die Schwerbeschleunigung in cm/sec^2, für 45^0 Breite $= 980{,}6$ (vgl. S. 123 u. Tab. 43).

Als Flüssigkeiten werden Quecksilber und Wasser, auch wohl Glycerin ($s = 1{,}26$), am meisten gebraucht. Der Druck von 760 mm Quecksilber von 0^0, streng genommen unter der Schwere in 45^0 geogr. Breite, heiſst eine Atmosphäre. Diese entspricht also einem Druck von $76 \cdot 13{,}596 = 1033$ gr-Gew./cm^2 oder $980{,}6 \cdot 76 \cdot 13{,}596 = 1013200$ Dyne/cm^2; für 50^0 Breite gelten die Zahlen 1034 und 1013800.

Man erhält aus einer beobachteten Druckhöhe h einer Flüssigkeit vom spec. Gewicht s die Höhe h' einer anderen Flüssigkeit s', welche denselben Druck gibt, als $h' = h \cdot s/s'$. Eine bei der Temperatur t gemessene Quecksilberdruckhöhe h wird also auf t' umgerechnet durch Multiplikation mit dem Faktor $1 + 0{,}000181\,(t' - t)$, der hier gleich s/s' ist; vgl. S. 95.

Ablesung. Man projicirt auf einen hintergestellten Maſsstab, mit dem Auge unter Vermeidung der Parallaxe durch einen Spiegel, oder mit einem parallel verschiebbaren Fernrohr; oder man miſst mit dem Kathetometer (22). Abgelesen wird immer die horizontale Tangente des Meniskus, also an Quecksilberflächen der obere, an den übrigen Flüssigkeiten der untere Rand. Die Kuppen sind oft schwierig zu erkennen; kann man dicht über, bez. unter der Oberfläche eine Spitze anbringen, so stellt man auf die Mitte zwischen ihr und ihrem Spiegelbild ein.

Bei dem Ablesen auf einem hintergestellten Maſsstab kann an einer breiten, also in der Mitte ebenen Fläche ebenso

die Mitte zwischen einem Teilstrich und seinem Spiegelbild zur Einstellung und zur Schätzung oder Messung des Abstandes der Kuppe vom nächsten Teilstrich benutzt werden.

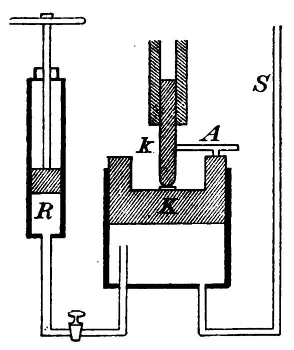
Vgl. Thiesen, ZS. f. Instr. 1886, 89.

In einem offenen Schenkel ist, wenn im geschlossenen stets eine bestimmte Höhe innegehalten wird (vgl. Luftthermometer), oft ein verschiebbarer Maſsstab mit Spitze zu gebrauchen, die zur Berührung eingestellt wird. Der Nullpunkt der Teilung findet sich aus der Einstellung bei beiderseitig gleichem Druck. Schema s. Fig.

Kapillar-Korrektion. Die Oberfläche hat gewöhnlich nicht eine so groſse Breite, daſs ihr höchster (bez. tiefster) Teil eben ist; dann kommt zu dem Gewichtsdruck der Kapillardruck der Oberflächenkrümmung. Die abgelesene Höhe ist zu niedrig (bez. zu hoch). Diese zu korrigirende „Kapillardepression" wächst mit abnehmender Rohrweite, läſst sich aber wegen der Veränderlichkeit des Randwinkels nicht als bloſse Funktion der Kapillarkonstante und Rohrweite darstellen. Ist an einer Quecksilberkuppe auſser der Rohrweite die Höhe des Meniskus bekannt, so kann man die Gröſse der Kapillardepression innerhalb der nicht unbeträchtlichen Unsicherheit, die aus Veränderungen der Kap.-Konstante selbst erwächst, aus Tab. 10 entnehmen. Bei einer Rohrweite von 15 mm beträgt sie höchstens 0,1 mm. — Vgl. auch **37**, 1 bis 5 und Tab. 8.

Groſse Drucke. Das Quecksilbermanometer aus einem Stück wird oberhalb weniger Atmosphären unhandlich. Man kann dann die Drucke mehrerer Säulen in U förmigen Röhren durch Wasser aufeinander übertragen und summiren.

Vgl. Thiesen, ZS. f. Instr. 1881, 114.



Druck-Reduktion durch Kolbenübertragung. Drucke von Hunderten oder Tausenden von Atmosphären muſs man bei der Übertragung auf Quecksilber verkleinern. Man benutzt das umgekehrte Princip der hydraulischen Presse. Der groſse Druck wirkt auf den Kolben k vom kleinen Querschnitt q, welcher die Kraft auf den Kolben K vom groſsen

Querschnitt Q überträgt und unter K den Druck im Verhältnis q/Q reducirt auftreten läfst. Die übertragenden Flüssigkeiten sind Ricinusöl oder bei sehr grofsen Drucken Melasse.

Die Reibung wird durch drehende Bewegungen vermindert, welche man während der Messung dem Kolben durch einen eingeschraubten Arm A mitteilt. Der weite Cylinder enthält unten Quecksilber, welches mit dem Steigrohr S kommunicirt.

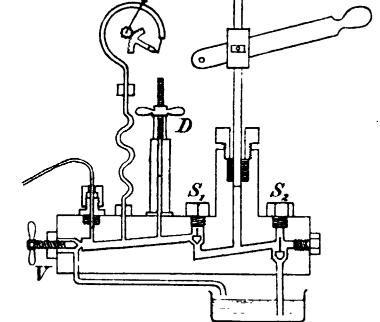
Die mit Ricinusöl gefüllte Regulirpumpe R läfst den Druck, trotz Austreten von etwas Flüssigkeit an den Kolbenwänden, konstant erhalten.

Näheres bei Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) 29, 68. 1893.

Glasröhren sind für inneren einseitigen Druck über etwa 400 Atm. nicht brauchbar zu machen und müssen bei höheren Drucken in Metallcylinder eingeschlossen werden. Volumänderungen von Gasen oder Flüssigkeiten in solchen Röhren (Piezometern) können, ohne dafs dieselben sichtbar sind, vermöge elektrischer Kontakte beobachtet werden, die in die Röhre eingeschmolzen und durch dünnen Platindraht hintereinander verbunden sind. Jedes Herantreten des Sperr-Quecksilbers an einen folgenden Kontakt schaltet Widerstand aus und ist dadurch (**90** bis **93**) zu erkennen (Amagat l. c.).

Bei Messungen mit hohen Drucken ist die Kompressionswärme zu beachten und ist also mit der Beobachtung bis zum wieder erfolgten Temperaturausgleich zu warten.

Cailletet'sche Pumpe, Ducretet und Lejeune Paris. Bis 300 Atm. kann der Pumpkolben gebraucht werden, dann die (in Wirklichkeit seitlich angebrachte) Druckschraube D. Alle Dichtungsschrauben sind sehr fest anzuziehen. Sorgfältig sauber müssen die kleinen Hartkautschukventile gehalten werden. — Ventilschraube V dient zum Abspannen des Druckes. Als Füllung kann destillirtes Wasser gebraucht werden; bei längerem Nichtgebrauch ist die Pumpe durch Lüften der Schraube S_1 zu entleeren und bis zum Austrocknen offen zu lassen.



Die Kupferkapillare links gibt den Druck weiter. — Gase, die ihm unterworfen werden sollen, werden gewöhnlich in dickwandigen Glasröhren über Quecksilber beobachtet, welches mit Wasser überdeckt und von

diesem aus durch die Kapillare mit der Pumpe verbunden ist. Eingekittet wird mit Marineleim. Oberhalb 300 Atm. dienen andere Vorrichtungen.

Über die Anordnung von Versuchen mit hohem Druck s. u. a.: Elektr. Leitvermögen: Fink, Wied. Ann. 26, 481. 1885; Zusammendrückbarkeit: Röntgen u. Schneider, ib. 33, 644. 1888; Lichtbrechung: Röntgen u. Zehnder, ib. 44, 24. 1891; Dielektr.-Konstanten: Röntgen, ib. 52, 593. 1894. — Auch das Preisverzeichnis von Ducretet u. L. — Eine Übersicht über die Messmethoden: Wiebe, ZS. f. komprim. u. flüss. Gase, Bd. I. S. 8 ff. 1897.

II. Wagemanometer.

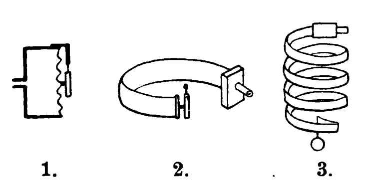
Der Druck auf den Kolben vom Querschnitt q wird auf einen äquilibrirten Wagebalken mit Wagschale übertragen und durch Gewichte p gemessen. Der Druck ist (Fig.) $= \frac{p}{q} \cdot \frac{L}{l}$.

III. Gasmanometer.

Der Druck wird auf eine abgesperrte Gasmenge in einem kalibrirten Rohr durch eine Flüssigkeit übertragen, welche das Gas nicht absorbirt. Der Druck ist dem Volumen umgekehrt proportional. Veränderliche Druckhöhen der Sperrflüssigkeit oder Temperaturwechsel lassen sich nötigenfalls leicht in Rechnung setzen. Die Empfindlichkeit der Messung nimmt dem Drucke proportional ab. Für grofse Drucke müssen die Abweichungen des Gases vom Mariotte'schen Gesetz bekannt sein.

IV. Metallmanometer.

Der Druck wird durch die Durchbiegung einer Metallmembran oder die Krümmung einer Metallröhre (Bourdon) gemessen, deren Bewegung auf einen Zeiger übertragen ist. Die Aichung erfolgt empirisch mittels des Quecksilbermanometers. Geringe Druck-Variationen können mittels eines drehbaren Spiegelchens, welches durch Kontakt mit dem Manometer bewegt wird (1 u. 2) oder sich mit dem Ende einer mehrfach gewundenen Bourdonschen Röhre dreht (3), mit Fernrohr und Skala beobachtet werden.



1. 2. 3.

1. Röntgen, Pogg. Ann. 148, 624; 2. F. K., ib. 150, 423. 1873; 3. Barus, ZS. f. Instr. 1896, 253.

V. Drucklibelle für sehr kleine Drucke (Toepler).

Ein unter sehr stumpfem Winkel $180^0-2\alpha$ geknicktes Glasrohr von etwa 3 mm Weite enthält eine etwa $^1/_4$ m lange Säule Petroleum oder Xylol vom spec. Gewicht s. Ein einseitiger Druck, welcher eine Verschiebung um l cm bewirkt, ist gleich $(2s\cdot\sin\alpha)l$ gr-Gew./cm². Den konstanten Faktor $2s\cdot\sin\alpha$ kann man beliebig klein machen.

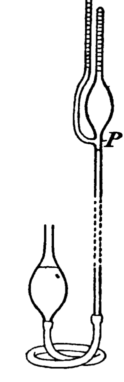
Oder, wenn der Abstand der beiden Kuppen $=a$ ist, und wenn ein Druck d kompensirt wird durch eine Neigung des Rohres um den Winkel φ, so ist $d=sa\cdot\sin\varphi$. Der Neigungswinkel wird durch die Drehung der Fufsschraube an der Libelle hervorgebracht und gemessen.

Mit mikroskopischer Ablesung ist eine Druckänderung von 10^{-8} Atmosphäre noch bemerkbar und selbst die Temperatur drückender Gassäulen scharf zu messen.

Toepler, Wied. Ann. 56, 611. 1895.

VI. Messung sehr kleiner Gasdrucke (Arago).

Man verkleinert das Volumen in gemessenem Verhältnis; der Druck steigt in gleichem Verhältnis. Die Ausführung, z. B. an einer Quecksilberluftpumpe, zeigt die Figur (häufig nach Mac Leod benannt). Das an die obere Birne angesetzte Rohr ist in mm geteilt und aufserdem relativ zu dem bis an den Punkt P gerechneten Volumen der Birne kalibrirt. Hebung der unteren Birne mit Quecksilber schliefst durch dessen Ansteigen die Luft der oberen ab und drängt sie in das Mefsrohr. Der Höhenunterschied gegen das ebenfalls geteilte Verbindungsrohr gibt den Drucküberschufs des komprimirten Gases gegen das ursprüngliche, der durch das jeweilige Volumverhältnis geteilt den ursprünglichen Druck darstellt. 1000malige Vergröfserung läfst diesen auf wenige Zehntausendtel mm messen.



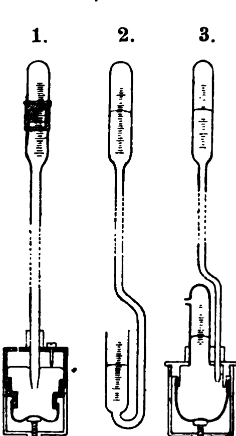
An modernen Quecksilberpumpen kann man mittels des gebogenen Verbindungsrohres am Recipienten (Fig. zu 8, 24) oft eine ähnliche Anordnung improvisiren.

37. Atmosphärischer Druck (Barometerstand).

Unter Barometerstand versteht man die Höhe einer Quecksilbersäule von 0°, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. Wegen der Veränderlichkeit der Schwere, die etwa ½% betragen kann, fügt man für genaue Zwecke hinzu, daſs die auf das Quecksilber wirkende Schwere diejenige unter 45° Breite am Meeresspiegel sein soll. Vgl. 5.

Luft oder Wasserdampf über dem Quecksilber erniedrigen durch ihren eigenen Druck den Stand. Die Abwesenheit von Luft erkennt man an dem scharfen Klange, mit welchem das Quecksilber bei dem Neigen des Instrumentes oben anstöſst. Schwieriger zu erkennen ist das Vorhandensein von Wasserdampf, welcher sich nur bei gröſseren Mengen durch einen Beschlag bemerklich macht, der sich bei dem Neigen an der Glaswand bildet.

Kann man durch Heben des Quecksilbers etc. das Vacuum über dem Quecksilber verkleinern und zugleich die Druckhöhen beobachten, so wird das Vorhandensein von Luft oder kleinen Dampfmengen daran erkannt, daſs die Druckhöhen sich vermindern, und kann nach Messung der Depression in Rechnung gesetzt werden. Das Wild-Fuess'sche Heber-Barometer (Skizze in Fig. 3) läſst diesen Zweck durch Hinaufdrücken des Quecksilbers, in welches die beiden Schenkel eintauchen, mittels des Lederschlauchs erreichen. Eine etwas andere Konstruktion hat einen mit Schraube komprimirbaren Lederdeckel.



Am Heberbarometer (Fig. 2) werden beide Kuppen abgelesen und ihre Höhendifferenz genommen. Am Gefäſsbarometer (Fortin, Fig. 1) stellt man den, durch eine Stahl- oder Elfenbeinspitze gebildeten Nullpunkt des Maſsstabes auf die am Reflex scharf zu erkennende Berührung mit der unteren Quecksilberfläche ein und liest oben ab. Hat aber das Gefäſsbarometer einen feststehenden Maſsstab, so sind die beobachteten Schwankungen mit $1 + q/q'$ zu multipliziren, wenn q bez. q'

den Querschnitt des Rohres bez. des Gefäfses bedeuten. Oder es ist die Teilung an derartigen Instrumenten gleich in diesem Verhältnis verkleinert.

Die Ablesung der Kuppe geschieht mit blofsem Auge oder durch Einstellung eines verschiebbaren Index, unter Anwendung eines Spiegels zur Vermeidung der Parallaxe (**21**, 1), oder mit einer Visirvorrichtung aus gespannten Fäden oder dem Mikroskop. Ein Barometerrohr ohne Mafsstab beobachtet man mit dem Kathetometer (**22**). Über den Nonius siehe **21**.

Wegen der Reibung des Quecksilbers klopft oder neigt man vor der Ablesung. Vorteilhaft ist, auch wegen der Kapillarität, bei dem Heberbarometer das Quecksilber in beiden Schenkeln vor dem Ablesen ansteigen zu lassen (Fig. 3 v. S.).

Barometerablesungen verlangen folgende Korrektionen:

1. Temperatur des Quecksilbers. Das Quecksilber dehnt sich für 1° C. um 0,000181 seines Volumens aus. Ist demnach l der bei der Temperatur t im Barometer abgelesene Barometerstand, so ist der auf 0° reducirte (**4**, Beispiel Nr. 2)

$$b = l - 0{,}000181 \cdot lt.$$

2. Temperatur des Mafsstabes. Bei genauen Messungen mufs auch die Länge des Mafsstabes auf seine Normaltemperatur t_0 reducirt werden, was durch Addition von $\beta(t-t_0)l$ erreicht wird, worin β den Ausdehnungskoefficienten des Mafsstabes (0,000019 für Messing; 0,000008 für Glas) bedeutet.

Wenn wie gewöhnlich die Normaltemperatur des Mafsstabes $= 0^0$, so wird der wegen der Temperaturausdehnung vollständig korrigirte Barometerstand

$$b = l - (0{,}000181 - \beta) \cdot lt.$$

Die gesamte Korrektion des abgelesenen Standes l beträgt also

für eine Messingskale $-0{,}000162 \cdot lt$
für eine Glasskale $-0{,}000173 \cdot lt$,

welche Werte in Tab. 8 zu finden sind.

Bei dem gewöhnlichen Barometerstande beträgt die Korrektion nahe $\frac{1}{8}$ mm auf 1° und es wird oft genügen, von dem beobachteten Stande $\frac{1}{8}\,t$ mm abzuziehen.

3. Kapillardepression eines Gefäfsbarometers. Um diese zu korrigiren, mag man zu dem an der Kuppe des Meniskus abgelesenen Stande den aus Tab. 10 zu dem inneren

Durchmesser der Röhre und der Höhe des Quecksilbermeniskus entnommenen Wert hinzufügen (vgl. 6).

4. Spannkraft des Quecksilberdampfes. In höherer Temperatur t bewirkt diese eine kleine Depression (Tab. 18), welche hinreichend genau korrigirt wird, indem man zu dem beobachteten Stande $0{,}001\,t$ mm addirt.

5. Schwere-Reduktion auf 45°. Der Druck einer und derselben Quecksilbersäule an verschiedenen Orten ist der Schwere proportional. Mit dem Ausdruck (**35**) $1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}0000002 \cdot H$, dessen letztes Glied übrigens nur in sehr bedeutenden Höhen merklich wird, ist ein beobachteter Barometerstand zu multipliciren, um den Stand zu erhalten, welcher demselben Luftdruck unter 45° am Meeresspiegel entspricht.

Aus dem reducirten Barometerstande b in cm berechnet man den Druck in gr-Gewicht/cm² als $b \cdot 13{,}596$. Der Druck im absoluten cm-gr-sec-System, d. h. die Kraft in Dynen/cm² oder in $[\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^{-2}]$ (Anh. 8) ist $b \cdot 13{,}596 \cdot 980{,}6 = b \cdot 13332$.

Eine normale Atmosphäre entspricht dem Drucke $76 \cdot 13{,}596 = 1033$ gr-Gew./cm² oder $76 \cdot 13332 = 1013200$ $[\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^{-2}]$ oder Dyne/cm².

Die Bemerkungen Nr. 1 bis 5 sind auf jede genaue Druckmessung mit Quecksilbersäulen anzuwenden.

6. Normalbarometer. Die aus der Kapillardepression entstehende Unsicherheit läſst sich vollständig nur durch ein weites Rohr (25 mm) vermeiden, welches die Depression ausschlieſst. Die Füllung geschieht zur Vermeidung von Luft oder Wasserdampf mit der Quecksilberluftpumpe. Über reines Quecksilber s. 8, 1. Durch Vergleichung eines anderen Instrumentes mit dem Normalbarometer eliminirt man die Depression des ersteren durch Kapillarität und Luft- oder Dampf-Gehalt.

Über Formen von Barometern, deren Luftgehalt stets zu kontroliren oder zu beseitigen ist, vgl. L. Weber, ZS. f. Instr. 13, 63. 1893. — Über das Wild-Fueſs'sche Barometer Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. I, 93. 1894. Barographen, die den Luftdruck registriren, sind an Aneroidbarometer angeschlossen oder sie benutzen die Variation des Gewichtes der gehobenen Quecksilbersäule (Sprung), vgl. z. B. Scheel, ZS. f. Instr. 1895, 133.

Aneroidbarometer werden durch Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer justirt bez. mit einer Korrektionstabelle versehen. Man bringt das Instrument z. B. unter die Luftpumpe, verbindet mit dem Recipienten ein hinreichend weites

Glasrohr, in welchem Quecksilber langsam angesaugt wird, und liest, nachdem man wegen der elastischen Nachwirkung, welche den Messungen rasch wechselnder Drucke mit dem Aneroid als Fehlerquelle anhaftet, längere Zeit gewartet hat, das Aneroid, die Höhe der gehobenen Säule und den äufseren Barometerstand ab. Die letzteren beiden, auf 0^0 reducirten Höhen, von einander abgezogen, geben den der Einstellung des Aneroids zugehörenden Barometerstand. Die Temperaturkorrektion eines Aneroids ist empirisch zu bestimmen. Über Einflüsse der elastischen Nachwirkung s. **55 a.** Ihre Elimination ist schwierig.

38. Barometrische Höhenmessung.

Mit wachsender Höhe nimmt der hydrostatische Druck der Luft ab. Bei dem Ansteigen vermindert sich die Quecksilbersäule, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält, um eine Länge, die sich zu dem Höhenunterschiede verhält, wie das spec. Gewicht der Luft zu dem des Quecksilbers, unter gewöhnlichen Umständen also wie 0,0012:13,6 oder ungefähr wie 1:11000; d. h. auf 11 m Anstieg sinkt das Barometer um etwa 1 mm. — Da die Luft ein dem Barometerstande selbst proportionales, also mit der Höhe kleiner werdendes spec. Gewicht hat, so nimmt der Barometerstand nicht gleichmäfsig mit der Höhe ab, sondern in geometrischer Proportion. Dies spricht sich darin aus, dafs der Höhenunterschied der Differenz der Logarithmen des Barometerstandes proportional ist, denn ein Logarithmus ändert sich gleichmäfsig, wenn die Zahl sich in geometrischem Verhältnis ändert. — Vgl. die Ableitung S. 136.

I. Aus den gleichzeitig an zwei benachbarten Stationen beobachteten Barometerständen b_0 und b_1 findet man die Höhendifferenz h der Stationen in Metern nach der Formel

$$h = 18400^{\text{met}} \cdot (1 + 0{,}004\, t)(\log b_0 - \log b_1),$$

wofür bis zu Höhendifferenzen von etwa 1000 m auch der bequemere genäherte Ausdruck gesetzt werden kann

$$h = 16000^{\text{met}} \cdot (1 + 0{,}004\, t) \cdot (b_0 - b_1)/(b_0 + b_1).$$

t bedeutet die mittlere Temperatur der Luftsäule.

In der Formel ist halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf und die für 45^0 geltende Schwere angenommen. Die Logarithmen sind die gewöhnlichen briggischen.

II. Um die Veränderlichkeit der Schwere und der Luftfeuchtigkeit zu berücksichtigen, bezeichnen wir mit

φ die geographische Breite,
H die mittlere Meereshöhe der beiden Orte in Metern (der Einfluſs wird kaum jemals merklich);
e_0 und e_1 die Spannkraft des Wasserdampfes an den beiden Stationen (47) und setzen zur Abkürzung

$$k = \tfrac{1}{2}(e_0/b_0 + e_1/b_1).$$

Dann berechnet man die Höhendifferenz

$$h = 18430^{\text{met}} \cdot (\log b_0 - \log b_1)(1 + 0{,}00367\, t) \cdot (1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi + 0{,}0000002\, H + \tfrac{3}{8} k).$$

Reduktion eines Barometerstandes auf Meereshöhe. Die Korrektion geschieht in der internationalen Meteorologie durch Addition von $b(10^m - 1)$, wo

$$m = \frac{H(1 - \frac{3}{8} e/b)}{(18429 + 67{,}5\, t + 0{,}003\, H)(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi)}.$$

Beweis der Formeln. Die Dichtigkeit der Luft ist (18 und S. 134), wenn wir $0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi = \delta$, $0{,}0000002 = \varepsilon$ und $0{,}00367 = \alpha$ setzen, gleich

$$\frac{0{,}001293}{1 + \alpha t} \frac{b - \frac{3}{8} e}{760} (1 - \delta - \varepsilon H).$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers von 0° beträgt 13,596. Folglich ist, wenn für die Höhenänderung $\mathrm{d}H$ der Barometerstand b sich um $\mathrm{d}b$ ändert (d. h. $\mathrm{d}H$ bez. $\mathrm{d}b$ die Höhe einer Luft- bez. einer Quecksilbersäule bedeuten, die sich im Gleichgewicht halten),

$$-\mathrm{d}b = \frac{0{,}001293}{13{,}596 \cdot 760} (b - \tfrac{3}{8} e) \frac{1 - \delta - \varepsilon H}{1 + \alpha t} \mathrm{d}H.$$

Hierin sind e und t eigentlich mit H veränderlich, aber nach einem unbekannten Gesetze. Wir führen für t den konstanten Mittelwert ein und setzen e in ein konstantes Verhältnis zum Barometerstand, $e = kb$. Rechnet man den Zahlenfaktor aus und behandelt die kleinen Gröſsen $\frac{3}{8}k$, δ und εH nach S. 9 als Korrektionsgröſsen, so kann man schreiben

$$-7993000(1 + \alpha t)(1 + \delta + \tfrac{3}{8} k) \cdot \mathrm{d}b/b = (1 - \varepsilon H)\, \mathrm{d}H.$$

Wird jetzt integrirt, auf der linken Seite von b_0 bis b_1, auf der rechten von H_0 bis H_1, so kommt

$$7993000(1 + \alpha t)(1 + \delta + \tfrac{3}{8} k)(\log\text{nat}\, b_0 - \log\text{nat}\, b_1) = (H_1 - H_0)[1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon(H_1 + H_0)].$$

Endlich setzen wir $\log\text{nat}\, b = 2{,}3026 \log\text{brigg}\, b$, behandeln $\frac{1}{2}\varepsilon(H_1 + H_0) = \varepsilon H$ als Korrektionsglied und erhalten

$$H_1 - H_0 = h = 18400000^{\text{mm}} \cdot (\log b_0 - \log b_1)(1 + \alpha t)(1 + \delta + \varepsilon H + \tfrac{3}{8} k).$$

Der Faktor 18400 m ist wegen der bisher vernachlässigten Abnahme der Schwere des Quecksilbers mit der Höhe noch um $\frac{1}{6}$%, also auf 18430 zu vergröſsern. Denn auf 1 m Erhebung beträgt jene $\frac{1}{5000000}$, während der Druck um $\frac{1}{8000}$ abnimmt. Also war die Höhen-Abnahme des Barometerstandes um $\frac{8000}{5000000} = \frac{1}{600}$ zu groſs angesetzt.

Die Näherungsformel I ergibt sich, wenn man halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf annimmt, nach **18** Formel 2.

Die Näherungsformel unter I für kleine Höhenunterschiede ist nichts anderes als die obige Differentialformel, welche mit Mittelwerten von δ und k wird $-7980000\,(1+\alpha t)\,db/b = dH$. dH ist der Höhenunterschied; für den Unterschied der Barometerstände $-db$ schreiben wir $b_0 - b_1$, setzen den mittleren Stand $b = \frac{1}{2}(b_0 + b_1)$, lassen beim Übergange vom mm zum m 3 Nullen fort und erhöhen 7980 wegen der Schwerekorrektion um $\frac{1}{600}$ auf rund 8000.

Hypsometer. So nennt man einen leicht transportabelen Apparat, der die Siedetemperatur des Wassers sehr genau bestimmen läſst; Tabelle 14a gibt die zusammengehörigen Siedetemperaturen und Barometerstände. Da 1 mm Barometerstand etwa $\frac{1}{25}$ Grad entspricht, so werden groſse Vorsichtsmaſsregeln der Temperaturbestimmung (**40** II) verlangt.

Vgl. z. B. Grützmacher, ZS. f. Instr. 1897, 193.

Wärme.

39. Formen von Thermometern. Allgemeines.

Über Temperaturbäder etc. s. 8, 27.

„Luftfreie“ Quecksilberthermometer können von -39^0 bis etwa $+300^0$ brauchbar sein; meistens zerreiſst der Faden bereits in tieferer Temperatur, besonders wenn Luftspuren sich im Quecksilber befinden. Man beseitigt diese, indem man mittels Abkühlung durch Kältemischungen, verdampfenden Äther, feste Kohlensäure das Quecksilber sich ganz in die Kugel zusammenziehen läſst. Endigt die Kapillare oben in eine Erweiterung (Birne), die auch gegen das Zerspringen bei unvorsichtiger zu hoher Erwärmung schützt, so bringt man den am Luftbläschen abgerissenen Faden in die Birne. Das übrige Quecksilber läſst sich dann durch Umkehren des Thermometers oder nötigenfalls durch Anwärmen gleichfalls bis in die Birne bringen. Dort läſst man die Quecksilbermengen zusammenflieſsen und kühlt nun langsam in vertikaler Stellung ab. — Die Erweiterung dient oft auch zur Abtrennung eines Teiles des Quecksilbers, um dasselbe Instrument in höherer Temperatur gebrauchen zu können, als seine Skale angibt. Man vergleicht nachher einen Punkt der Skale mit einem Normalthermometer. Auſserdem ist aber der Skalenwert, wenn man a Grade abgetrennt hat, im Verhältnis $1+0{,}00016\,a$ gröſser anzunehmen.

Unter dem Namen Beckmann'sches Thermometer ist, besonders bei Gefrierpunktsbestimmungen, die Form 1 gebräuchlich, welche eine sehr weite Teilung hat. — Erweiterungen haben auch wohl den Zweck, die beiden Fixpunkte kontroliren oder das Thermometer kalibriren zu können und doch eine weite Gradteilung zu haben. In diesem Sinne ist Nr. 2 von 0 bis 30^0 und von 100 bis 130^0 brauchbar. Die obere Erweiterung läſst auſserdem Quecksilber abtrennen, um die verwendbaren Intervalle von 30^0 höher legen zu können.

Ein luftfreies Quecksilberthermometer zeigt wegen des „toten Ganges“ bei sinkender Temperatur weniger sicher als bei steigender. Klopfen mit einem Stückchen Holz vor der Ablesung ist bei genauen Messungen stets anzuraten.

Hochgehende Thermometer enthalten über dem Quecksilber Stickstoff oder Kohlensäure. Mit Hilfe der letzteren werden durch das schwer schmelzbare Jenaer Glas Nr. 59 jetzt Skalen bis 550° ermöglicht, wobei der Druck über dem Quecksilber wegen dessen Dampfspannung 12 Atmosphären übersteigen mufs.

Von — 39° abwärts dient Alkohol, Toluol oder Petroläther zur Füllung. Gegen Quecksilber haben diese Flüssigkeiten die Nachteile erstens gröfserer Trägheit wegen schlechter Wärmeleitung, zweitens der Benetzung des Glases, welche z. B. auch die Kalibrirung nach der Füllung hindert. Ferner wachsen die Gradlängen beträchtlich mit der Temperatur. Die Teilung kann nach den Ausdehnungsformeln (Tab. 12) geschehen, ist aber durch Vergleich mit dem Gasthermometer zu korrigiren.

Für die Quecksilbergefäfse kann zur Erwägung kommen: eine grofse Oberfläche im Interesse raschen Wärmedurchganges, unter Umständen eine gestreckte Form auch zu dem Zwecke, die Mitteltemperatur eines Raumes anzuzeigen; geringe Wanddicke für Wärmedurchlafs, andererseits nicht zu geringe wegen Zerbrechlichkeit und Einflufs des Druckes und der Neigung (**40** III). Gröfsere Quecksilbermassen sind wegen der zum Wärmeausgleich nötigen Zeit vorsichtig zu gebrauchen.

In hoher Temperatur achte man auch noch auf etwaiges Abdestilliren von Flüssigkeit.

Ablesung des Thermometers. „Einschlufsthermometer“ mit feiner Kapillare vor der Teilung können mit blofsem Auge, mit Lupe oder Fernrohr abgelesen werden. Bei feineren Ablesungen an Stabthermometern ist das Fernrohr anzuwenden: man richtet z. B. das Thermometer durch Visiren nach einem Senkel, Fensterrahmen u. dergl. vertikal und stellt das Fernrohr in der Höhe des abzulesenden Teilstriches auf. Am sichersten, besonders bei geringem Abstande des Fernrohrs (Mikroskops) liest man ein durchsichtiges Stabthermometer von vorn und rückwärts ab und nimmt das Mittel; dabei dreht man das Thermometer ohne es der Länge nach zu verschieben.

Ein einfaches Mittel zur Vermeidung der Parallaxe ist ein hinter das Thermometer angedrücktes Spiegelstreifchen; man hält das Auge so, dafs sein Spiegelbild in der Höhe der Quecksilberkuppe liegt. Bei der Ablesung mit einer Lupe bietet auch die Krümmung der in unrichtiger Höhe liegenden Striche ein Mittel zur richtigen Augenstellung.

40. Quecksilberthermometer. Eispunkt und Siedepunkt.

Wissenschaftlich definirt man die Temperatur nach der Ausdehnung eines vollkommenen Gases (Wasserstoff), indem man gleichen Volum- (oder Druck-)Zuwachsen des Gases gleiche Temperatur-Zuwachse zur Seite stellt. Die Centigradskale nennt Null die Temperatur des schmelzenden Eises und Hundert die Siedetemperatur des Wassers unter 760 mm Druck (**37**).

Die amtlich in Deutschland geprüften und die aus den besseren Werkstätten bezogenen Thermometer beziehen sich bis 100° auf Wasserstoff, von da aufwärts auf Stickstoff.

Das Quecksilberthermometer hält nicht ganz gleichen Schritt mit dem Gasthermometer, weil Quecksilber und Glas sich nicht gleichmäfsig ausdehnen. Vgl. hierüber VI. Zunächst soll das Quecksilberthermometer für sich betrachtet werden. Die neueren, gut definirten und mit manchen Fehlern weniger behafteten Jenaer Thermometergläser haben dasselbe zu einem wissenschaftlich genauen Instrument gemacht.

Bei feinen thermometrischen Messungen ist freilich, wenn die Temperatur gröfseren Schwankungen unterliegt, Rücksicht darauf zu nehmen, dafs wegen der Nachwirkung von Ausdehnungen des Glases, der Stand des Thermometers auch durch die vorausgehenden Zustände etwas beeinflufst wird; vgl. III. Wir setzen indessen zunächst voraus, dafs das Instrument bei jeder Messung schon so lange in der Nähe der abgelesenen Temperatur verweilt hat, dafs es zur Ruhe gekommen ist. Als („stabiler") Nullpunkt soll also der Punkt gelten, an welchem sich nach längerem, wenn das Thermometer vorher stark erwärmt war, unter Umständen nach sehr langem Verweilen im Eise das Quecksilber einstellt; von hier bis zu der stabilen Einstellung beim Sieden sind 100 Grade. Die Temperaturskale wird zwischen diesen festen Punkten und aufserhalb derselben durch Teilung nach gleichen Volumina hergestellt. Über eine andere Art zu rechnen vgl. IV.

Eine Zusammenstellung der bei dem Quecksilber-Thermometer in Betracht kommenden Gesichtspunkte s. z. B. bei Scheel, Vereinsbl. d. Deutsch. Ges. f. Mech. u. Opt. 1897, Heft 12. 13. 14.

I. Eispunkt.

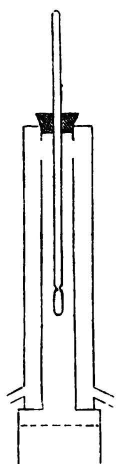
Man taucht das Thermometer in reinen schmelzenden Schnee oder reines (gewaschenes) fein zerstofsenes, besser etwa mit einem Böttchermesser geschabtes oder auf einem Reibeisen zer-

kleinertes Eis, mit destillirtem Wasser zu einem Brei angefeuchtet. Die Quecksilbersäule soll möglichst ganz in das Eis eintauchen; Einschlufsthermometer sind bis über den Nullpunkt einzusenken und nur während der Ablesung oben soweit nötig vom Eise zu befreien, nicht etwa herauszuziehen, da hierbei die Luft einströmt. Besondere Beachtung verlangt das etwaige Abschmelzen des Eises von der Quecksilberkugel, welches beträchtliche Fehler bewirken kann. Die Fehlerquellen werden viel kleiner, wenn man die Bestimmung in einer Umgebung vornehmen kann, deren Temperatur wenig über 0° liegt.

Dem Punkte, auf welchen sich die Quecksilbersäule einstellt, nachdem das Thermometer die Temperatur des Eises angenommen hat, entspricht die Temperatur Null.

Der stabile Nullpunkt ist vor dem Siedepunkt zu bestimmen; vgl. III.

II. Siedepunkt.



Man bringt das Thermometer in die Dämpfe von Wasser, welches in einem Metallgefäfs oder auch einem Glasgefäfs mit hineingeworfenen Metallstücken kräftig siedet. Die Temperatur des Wasserdampfes ergibt sich aus dem Druck, unter welchem das Wasser siedet, d. h. aus dem nach **37** reducirten Barometerstande mit Hilfe von Tab. 14a. Bis auf $\frac{1}{100}$ Grad richtig kann man zwischen 715 und 770 mm für den Barometerstand b die Siedetemperatur t ohne Tabelle nach der Formel erhalten

$$t = 100^0 + 0{,}0375^0 \cdot (b - 760).$$

Die Thermometerkugel wird nicht in das siedende Wasser gebracht, sondern etwas über die Oberfläche. Es soll möglichst die ganze Quecksilbersäule sich im Dampf befinden. — Der Ausgang für die Dämpfe mufs so weit sein, dafs nicht im Innern des Gefäfses ein Überdruck entsteht, oder man mifst diesen Überdruck mittels eines aus dem Dampfraum am Thermometer kommenden Wassermanometers. Der 14. Teil der gehobenen Wassersäule wird zu dem Barometerstande hinzugezählt. — Die Flamme soll die nicht benetzten Teile der Gefäfswände nicht bespülen. — In dem oben gezeichneten Gefäfs braucht die Quecksilberkugel nicht dicht über dem Wasser

zu stehen. — Die Durchwärmung bedarf besonders bei Einschlufsthermometern einige Zeit. Man soll mit der Ablesung warten, bis der Stand unveränderlich ist.

Beispiel. Reducirter Barometerstand (37) = 742 mm. Also wahre Siedetemperatur (Tab. 14a) = 99,33° (aus der Formel 100 — 0,0375·18 = 99,33°). Das Thermometer zeigte 99,80. Folglich zeigt das Thermometer um 0,47° zu hoch, also ist in der Nähe von 100° die Korrektion der Ablesung = — 0,47°.

III. Veränderlichkeit der Fixpunkte.

1. Neigung und Druck. Die meisten Thermometer sind darauf berechnet, dafs sie in vertikaler Stellung gebraucht werden. Man mufs das bei langen Thermometern beachten, da sie in anderer Stellung wegen des verminderten Innendrucks etwas höher zeigen. Der Einflufs ist empirisch zu bestimmen. Findet man, dafs das Thermometer dieselbe Temperatur in horizontaler Lage um δ höher angiebt als in vertikaler Lage, so hat die Korrektion des Thermometers auf vertikale Lage bei einer Neigung um den Winkel φ den Betrag $\delta \cdot \sin\varphi$. Der Faktor δ ist der Höhe der Quecksilbersäule proportional. Auf empfindliche Thermometer hat auch veränderlicher äufserer Druck, z. B. die Tiefe des Eintauchens oder der wechselnde Barometerstand einen der Änderung proportionalen Einflufs, den man empirisch ermitteln, aber in der Regel auch um etwa 10 Proc. kleiner als den inneren Druckkoefficienten ansetzen kann.

Der letztere beträgt durchschnittlich auf eine Zunahme des Druckes um 1 mm Quecksilber etwa $\frac{1}{8000}$° C.; der obige Faktor δ ist also für eine l mm lange Quecksilbersäule durchschnittlich auf $\frac{1}{8000}\,l$° C. zu schätzen.

2. Allmähliches Aufrücken der Fixpunkte. Wegen der langsamen Zusammenziehung des geblasenen Glases rücken die beiden festen Punkte neu hergestellter Thermometer aufwärts, und zwar um nahe gleich viel. Das Aufrücken dauert mit verminderter Geschwindigkeit unter Umständen Jahre lang fort und kann mehr als 1° betragen; durch „künstliches Altern“, d. h. langes Erwärmen, etwa auf Siedetemperatur, wird der Procefs beschleunigt. Bei den neueren Thermometergläsern Jena Nr. XVI und mehr noch bei Nr. 59 tritt diese und die unter Nr. 3 genannte Veränderlichkeit nicht mehr so stark auf.

3. Depression der Einstellung nach Erwärmungen. Das Glas erreicht ein durch Temperaturänderung ihm endgiltig zukommendes neues Volumen erst im Laufe der Zeit. In höherer Temperatur, z. B. schon bei 100° verläuft der Process rasch, in niedriger Temperatur viel langsamer. Es läfst also jede Erwärmung eine Erweiterung des Gefäfses (Nachwirkungs-Dilatation) und dadurch einen tieferen Stand des Quecksilbers, eine nach der Glassorte und der Gröfse und Dauer der Erwärmung verschiedene „Depression des Nullpunktes“ zurück. Dieselbe verliert sich mit der Zeit anfangs rascher, später langsamer und kann nach längerer stärkerer Erwärmung wochenlang merkbar bleiben.

Dies ist der Grund, aus welchem der stabile Eispunkt eines Thermometers nicht kurze Zeit nach einer erheblichen Erwärmung, im allgemeinen also z. B. vor dem Siedepunkt zu bestimmen ist.

Bei Thermometern, die in höherer Temperatur gebraucht werden, ist das Warten oft unbequem. Zur Kontrole ihrer Unveränderlichkeit kann aber anstatt des stabilen Eispunktes auch der „für 100° maximal deprimirte Eispunkt" dienen, d. h. der Punkt, den das Instrument nach längerem, etwa halbstündigem Verweilen in siedendem Wasser gleich nachher als vorübergehenden tiefsten Stand im Eise zeigt. Dieser Punkt charakterisirt das Thermometer mit derselben Bestimmtheit wie der stabile Eispunkt.

Die Anfangsdepression nach langer Erwärmung auf t^0 läfst sich durch den Ausdruck $at + bt^2$ darstellen; a und b hängen von der Glassorte ab. Zwischen 0 und 100° ist für mittleres Thüringer Glas (welches Kali und Natron enthält) a, für Jenaer Thermometerglas und das französische Thermometerglas Verre dur (die wesentlich nur ein Alkali enthalten) b klein gefunden. Nach längerer Erwärmung auf t^0 beträgt die Depression in Hunderteln Grad für Jena XVI $0{,}065t + 0{,}0003t^2$; Jena 59 $0{,}049t - 0{,}00015t^2$; Verre dur $0{,}100t + 0{,}00009t^2$. (Thiesen, Scheel und Sell, ZS. f. Instr. 1896, 58.) Für $t = 100^0$ bez. 0,09, 0,03 und 0,11°; mittl. Thür. Glas etwa 0,5°; Jena 122 (alkalifrei) 0 bis 0,02°.

4. Aufrücken durch Erhitzen. Verweilen in sehr hoher Temperatur kann, auch ohne Einwirkung des Luftdrucks, ein dauerndes, unter Umständen erhebliches Hinaufrücken (bis + 20°) der festen Punkte zur Folge haben. Thermometer für hohe Temperaturen sind vor dem Gebrauch einige Tage lang zu erhitzen und langsam zu kühlen. Öfteres Kontroliren des Eispunkts ist stets anzuraten.

IV. Thermometrie mit steter Nullpunktsbestimmung.

Bei der eingangs gegebenen Definition der Temperaturskale wurde, dem gewöhnlichen Gebrauch des Thermometers entsprechend, angenommen, dafs dieses bei allen Messungen, auch bei der Nullpunktsbestimmung zur Ruhe kommt. Wird das Thermometer nur in mittleren Temperaturen benutzt, so variirt der Nullpunkt selbst bei Intervallen von 20° höchstens um einige Hundertel Grad. Sind dagegen die Schwankungen grofs, was z. B. bei einem durch Null- und Siedepunkt in sich zu kontrolirenden Thermometer sich nicht vermeiden läfst, so führt zu einer weit höheren Genauigkeit ein anderes, wegen seiner Umständlichkeit freilich zu gewöhnlichen Zwecken kaum anwendbares Verfahren (Pernet).

Insofern nämlich der Abstand zwischen dem Siedepunkt (100°) und dem gleich nach diesem bestimmten Nullpunkt konstanter und aufserdem leichter zu bestimmen ist, als das gewöhnlich benutzte Intervall, weil die vorige Operation lange Zeiträume erfordert; weiter, da vorausgegangene andere Temperaturen die folgenden Einstellungen beeinflussen; endlich, da die Depression des Nullpunktes nicht der Temperatur proportional ist

(wodurch zwischen den beiden Definitionen sogar eine kleine Differenz entsteht), so brauchen feine thermometrische Messungen die folgenden Definitionen:

1. Grad ist der 100te Teil der Strecke zwischen dem Siedepunkt und dem gleich nach dem Sieden gefundenen Eispunkt.

2. Die Temperatur t wird immer von demjenigen Nullpunkt gerechnet, welchen man unmittelbar nach der Temperaturbeobachtung findet oder finden würde. (Der Nullpunkt ist in dieser Definition also eine veränderliche Gröfse.) Vgl. über die Berechnung III, 3.

Literatur zu III u. IV: Pernet, Thermometrie in Winkelmann, Handbuch II, 2; Guillaume, Traité prat. de la thermométrie, Paris 1889; Thiesen, Grunmach, Wiebe, Weinstein, metronom. Beiträge Nr. 3, 1881; Wiebe, ZS. f. Instr. 1888, 373; 1890, 207; und Böttcher ib. 1888, 409; Chappuis, Mém. du bur. internat. des poids et mesures 1893, 165; ZS. f. Instr. 1894, 141; Pernet, Jaeger u. Gumlich, Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanst. Bd. 1; ZS. f. Instr. 1895, 2, 41, 81 u. 117.

V. Herausragender Faden.

Die Thermometerskale nimmt an, dafs das ganze Quecksilber die zu messende Temperatur hat. Bleibt, wie gewöhnlich, ein Teil des Fadens aufserhalb, und hat die Umgebung eine andere Temperatur, so ist folgendermafsen zu korrigiren. Der „scheinbare Ausdehnungskoefficient" des Quecksilbers im Glase, d. h. der Unterschied der Volum-Ausdehnungskoefficienten beider Substanzen beträgt für gewöhnliches und Jenaer Thermometerglas Nr. XVI 0,000157, für Jen. Therm.-Glas Nr. 59 0,000163, für Verre dur 0,000158; also hat man zu der Ablesung t hinzuzufügen

$$0{,}000157 \text{ bez. } 0{,}000163 \text{ oder } 0{,}000158 \times a\,(t - t_0),$$

wenn t_0 die Mitteltemperatur, a die in Graden ausgedrückte Länge des herausragenden Fadens ist. Bezüglich t_0 mufs man sich häufig mit einer Schätzung begnügen; am sichersten ist es also, herausragende Fäden zu vermeiden. Die Ermittelung von t_0 geschieht folgendermafsen:

1. Man nimmt ein kleines Hilfsthermometer, dessen Gefäfs etwa in der mittleren Höhe des herausragenden Fadens angebracht ist, oder mehrere in verschiedenen Höhen angebrachte, und beurteilt die Temperatur des Fadens aus den Ablesungen am Hilfsinstrument.

Über die Anwendung einer Korrektionsröhre neben dem Thermometer vgl. Guillaume, C. R. 112, 87. 1891. Über ein Fadenthermometer hierfür s. Mahlke, ZS. f. Instr. 1893, 58; 1894, 73.

2. Ein anderes Verfahren ist das folgende (Mousson, Wüllner). Man setzt für den herausragenden Faden die Temperatur des Zimmers, aber als Fadenlänge, welche auf dieser Temperatur sich befindet, nicht die ganze herausragende Länge, sondern man zieht von dieser Länge eine konstante Gröfse α ab, welche sich folgendermafsen bestimmt. Das Thermometer zeige in einem warmen Bade von konstanter Temperatur etwa dem Siedegefäfs S. 141) die Einstellung T, wenn es ganz eingetaucht

ist, während es, um A Grade herausgezogen, nach längerer Zeit nur t anzeige. τ_0 sei hierbei die Lufttemperatur. Dann ist

$$\alpha = A - \frac{1}{0{,}000156} \cdot \frac{T-t}{t-\tau_0}.$$

Das so gefundene α ist also bei dem Gebrauch dieses Thermometers immer von der herausragenden Fadenlänge a abzuziehen; dann ist die Korrektion nach der ersten Formel, und zwar mit t_0 als Lufttemperatur zu berechnen.

In höheren Temperaturen bei herausragenden Thermometerteilen auf Abdestilliren von Quecksilber achten!

VI. Korrektion des Quecksilberthermometers auf das Gasthermometer (42).

Das Quecksilber dehnt sich, verglichen mit vollkommenen Gasen, nicht genau gleichförmig, sondern etwas beschleunigt aus.

Sein Volumen bei t^0 Wasserstofftemperatur ist zwischen 0 und 100° (Thiesen, Scheel und Sell) $v_t = v_0\,(1 + 0{,}0001816\,t + 0{,}0_7078\,t^2)$. Hieraus berechnet sich für Zimmertemperatur t der relative Ausdehnungs-Koefficient $1/v \cdot dv/dt = 0{,}0001813$, ferner zwischen 0° und Zimmertemperatur $v_t = v_0\,(1 + 0{,}0001817\,t)$ oder $v_0 = v_t\,(1 - 0{,}0001811\,t)$.

Dasselbe gilt vom Glase, aber nach den Sorten in verschiedenem Maſse. Offenbar würde eine Glassorte, die eine ebenso starke (absolute) Ungleichmäſsigkeit der Volumausdehnung zeigte, wie das Quecksilber, ein Thermometer ergeben, dessen Angaben mit dem Gasthermometer übereinstimmen. In Wirklichkeit aber zeigen die Quecksilberthermometer, wenn Eispunkt, Siedepunkt und Kaliber richtig sind, zwischen 0 und 100 etwas zu hoch, darüber hinaus verhalten sie sich verschieden. Die Abweichungen können je nach der Glassorte bis 150 0,5°, bis 250 4°, bis 350 10° erreichen.

Die Korrektionen der modernen Thermometergläser bis 100° auf Wasserstoff, oberhalb 100° auf Luft, die aber von Wasserstoff nur wenig abweicht, s. in Tab. 16.

Im Prüfungsschein ist diese Korrektion bereits berücksichtigt!

Zahlenzusammenstellungen nach den Beobachtungen von Chappuis, Grützmacher, Lemke, Thiesen, Scheel und Sell, Wiebe und Böttcher s. bei Scheel, Wied. Ann. 58, 168, 1896; Vereinsbl. d. Deutsch. Ges. f. Mech. u. Opt. 1897, S. 91. 97. 105; Grützmacher, Wied. Ann. 68, 769. 1899. — Über das relative Verhalten von Stickstoff und Wasserstoff Chappuis Phil. Mag. (5) 50, 433. 1900.

41. Kalibrirung eines Thermometers.

Ein Thermometer ist in sich richtig, wenn die Fixpunkte stimmen und das Volumen aller Skalenteile gleich grofs, d. h. bei linearer Einteilung, wenn der Querschnitt konstant ist. Wegen der Abweichungen von der letzteren Bedingung sind käufliche Thermometer in hohen Temperaturen zuweilen sehr unrichtig.

Eine Korrektionstabelle wird durch Kalibrirung in Verbindung mit der Bestimmung der Fixpunkte folgendermafsen erhalten. Zur Kalibrirung dient ein von der übrigen Masse abgetrennter Quecksilberfaden. Über die Korrektion auf die Gasskale vgl. **40** VI.

Ablösen eines Fadens. Man hält das, als luftleer vorausgesetzte, Thermometer verkehrt und führt einen leichten Stofs gegen das Ende aus. Bei einem Einschlufsthermometer mufs man, damit nicht die Kapillare bricht, vorsichtig sein, und statt des Stofsens mit einem plötzlichen Schnellen auszukommen suchen. Es löst sich entweder ein Faden ab, oder es fliefst das ganze Quecksilber, indem es sich in der Kugel von der Wandung löst. Das Abreifsen wird meistens durch ein irgendwo dem Glase anhaftendes mikroskopisches Luftbläschen bewirkt, welches sich zu einer gröfseren Blase ausdehnt. Reifst das Quecksilber in der Kugel, so läfst man durch rasches Aufrichten des Thermometers die dort gebildete Blase in den Eingang der Röhre aufsteigen, was mit einiger Geduld immer gelingt. Dann reifst die Säule im Eingang der Röhre ab.

Wenn dieser Faden um p Grade länger ist, als gewünscht wird, so erwärmt man, während der Faden abgetrennt ist, die Kugel; die Luft wird vor dem ansteigenden Quecksilber fortgeschoben. Darauf läfst man den Faden rasch zu dem übrigen Quecksilber zurückfliefsen und merkt sich die Einstellung im Augenblick des Zusammenfliefsens. Das Luftbläschen bleibt, wenn die beiden Quecksilbermassen in Berührung getreten sind, an dem Punkte der Glasröhre haften, wo der Zusammenstofs erfolgte. Läfst man also um p Grade abkühlen und wiederholt die Neigung und Erschütterung, so reifst jetzt ein Faden von der verlangten Länge ab.

Ist umgekehrt ein Faden um p zu kurz, so vereinigt man ihn mit der übrigen Masse, erwärmt nach der Vereinigung um p, dann reifst beim Abkühlen die gewünschte Länge ab.

Nach einigen Wiederholungen wird es gelingen, bis auf Bruchteile eines Grades genau Fäden von willkürlicher Länge zu erhalten. Nur für sehr kurze Fäden versagt das Verfahren wohl, so dafs man kombinirte Beobachtungen mit verschiedenen Fäden anwenden mufs; vgl. unten.

Einstellung und Ablesung des Fadens. Durch gelindes Neigen und Erschüttern läfst sich das eine Ende des Fadens auf einen beliebigen Teilstrich einstellen. Es genügt aber auch, genähert einzustellen und die Zehntel Grade an beiden Enden des Fadens abzulesen. Man mache mindestens zwei Reihen von Beobachtungen.

Zur Vermeidung der Parallaxe legt man eine Spiegelplatte unter und hält das Auge so, dafs sein Bild mit dem abgelesenen Teilstrich zusammenfällt; liegt das Thermometer hierbei senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Augen, so braucht man kein Auge bei dem Ablesen zu schliefsen. Oder man stellt eine Lupe oder ein Fernrohr fest auf und verschiebt das Thermometer parallel mit sich selbst.

Beobachtung und Berechnung. Die Kalibrirung kann man verschieden ausführen. Um nicht nachher auf verwickelte Rechnungen angewiesen zu sein, stellt man den Plan vorher fest. Eis- und Siedepunkt sollen jedenfalls Endpunkte verglichener Volumina bilden. Beobachtungen nach dem folgenden Schema, mit Fäden von 20° für eine von 0 bis 100 reichende Skale oder auch von 50° für höhere Temperaturen, bei denen ohnehin die Fehlerquellen beträchtlich sind, werden für gewöhnliche Zwecke genügen, vorausgesetzt, dafs die Teilung an sich gut und dafs das Rohr nicht in besonders hohem Grade unkalibrisch ist.

Die Fadenlänge a, mit welcher kalibrirt wird, sei in 100 teilbar, also $n = 100/a$ eine ganze Zahl. Der Faden wird folgeweise auf die Strecken von nahe 0 bis a, a bis $2a$ etc. gelegt; er nehme die Anzahl Teilstriche ein:

	$a + \delta_1$	$a + \delta_2$ .... $a + \delta_n$	u. s. w.
auf der Strecke	0 bis a	a bis $2a$ ... $(n-1)a$ bis 100.	

Der Nullpunkt liege bei dem T.-Str. p_0, der 100°-Punkt bei $100 + p_1$ (man nennt $(p_0 - p_1)/100$ die Gradwert-Korrektion).

$\delta_1\ \delta_2 \ldots$ sowie p_0 und p_1 sind also kleine, positive oder negative Zahlen, in Skalenteilen und deren Bruchteilen ausgedrückt. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$s = \frac{1}{n} \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n),$$

(die Summe der δ nur zwischen 0 und 100 genommen!) so ist

für den Teilstrich	die Korrektion
0	$-p_0$
a	$s - p_0 - \delta_1$
$2a$	$2s - p_0 - \delta_1 - \delta_2$
.	. . . .
ma	$ms - p_0 - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_m$.

Oder auch: für den Teilstrich ma ist die Korrektion $\varDelta_m$, wenn $\varDelta_{m-1}$ diejenige für den Teilstrich $(m-1)a$ ist,

$$\varDelta_m = \varDelta_{m-1} + s - \delta_m.$$

Die unter „Korrektion" enthaltenen Gröfsen geben also, der danebenstehenden Ablesung hinzugefügt, resp. wenn negativ von ihr abgezogen, den Stand, welchen das Thermometer mit richtigem Kaliber, Nullpunkt und Siedepunkt zeigen würde. Vgl. aber noch **40**, VI u. Tab. 16.

Für die zwischenliegenden Grade interpolirt man eine Tabelle auf gewöhnlichem Wege, am besten graphisch (**6**).

Beweis. Der Faden, $n$mal aneinandergelegt, nimmt das Volumen von Teilstrich 0 bis 100, vermehrt um $\delta_1 + \cdots + \delta_n$ ein. Da aber 0° bei p_0, 100° bei $100 + p_1$ liegt, also der Vermehrung des Quecksilbervolumens von Teilstrich 0 bis 100 eine Temperaturzunahme von $100 + p_0 - p_1$ Graden entspricht, so bedeutet das Volumen des Fadens die Temperaturzunahme

$$1/n \cdot (100 + p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n) = a + s \text{ (s. oben).}$$

Also entspricht einem Steigen des Quecksilbers
vom T.-Str. 0 bis a die Temperatur-Zunahme $a + s - \delta_1$,
„ „ a „ $2a$ „ „ „ $a + s - \delta_2$ u. s. w.
oder vom T.-Str. 0 die Temperatur-Zunahme

bis a	$a +$	$s - \delta_1$
„ $2a$	$2a +$	$2s - \delta_1 - \delta_2$
. .	. .	. . . . .
„ ma	$ma +$	$ms - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_m$.

Die Ausdrücke hinter dem Strich würden die Thermometer-Korrektionen sein, wenn der T.-Str. 0 richtig wäre. Da ihm die Temperatur $-p_0$ entspricht, so ist überall noch p_0 abzuziehen.

Beispiel. Ein Thermometer für hohe Temperaturen soll, was für gewöhnliche Zwecke genügt, von 50° zu 50° kalibrirt werden; also $n = 100:50 = 2$. Ein Faden nahm die Strecken ein

von T.-Str.	0,0	bis	50,9	$\delta_1 = +0,9$
	50,0	„	100,4	$\delta_2 = +0,4$
	100,1	„	150,3	$\delta_3 = +0,2$
	149,8	„	199,6	$\delta_4 = -0,2$ u. s. w.

Der Eispunkt war auf T.-Str. $+0,6$, die Temperatur 100° auf T.-Str. 99,7 gefunden; also $p_0 = +0,6$, $p_1 = -0,3$ und

$$s = 1/n \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \delta_2) = \tfrac{1}{2}(+0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4) = +1,1.$$

Also für Teilstrich	beträgt die Korrektion	
0	$-0,6$	$= -0,6$
50	$1,1 - 0,6 - 0,9$	$= -0,4$
100	$2,2 - 0,6 - 0,9 - 0,4$	$= +0,3$
150	$3,3 - 0,6 - 0,9 - 0,4 - 0,2$	$= +1,2$
200	$+1,2 + 1,1 + 0,2$	$= +2,5$ u. s. w.

Die für 100 berechnete Korrektion liefert teilweise eine Probe der Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer mit gröfseren Korrektionen. Die obige Anweisung setzt voraus, dafs das Thermometer nicht etwa in hohem Grade unkalibrisch ist. Denn es wurde nicht berücksichtigt, dafs $\delta_1 \delta_2 \ldots$ eigentlich nicht Temperaturgrade, sondern Skalenteile bedeuten; auch nicht, dafs manche Strecken von dem Faden nicht bedeckt oder doppelt bedeckt waren. Je unrichtiger das Thermometer ist, desto weniger sind die Vereinfachungen gestattet.

Es wird meist genügen, in einem solchen Falle so zu verfahren: Man wählt einen Faden, der, n mal aneinander gelegt, die Strecke vom Eispunkt bis zum Siedepunkt nahe ausfüllen würde, und beobachtet ihn, von dem Eispunkt anfangend, in solchen Lagen, dafs die nächste sich der vorigen anschliefst. Dann rechnet man gerade so wie vorhin. Die Korrektionen gelten aber nicht genau für die Teilstriche 0, a, $2a$ etc., sondern für die ihnen benachbarten Grenzpunkte der Teilstrecken. Eine handliche Korrektionstabelle wird graphisch abgeleitet.

Kalibrirung durch mehrere abgelöste Fäden. Der Faden von der Länge a läfst sich durch mehrere längere Fäden ersetzen, die verschiedene Vielfache von a sind. Durch den Faden ka kann man das Volumen 0 bis a mit ka bis $(k+1)a$ vergleichen, indem man ihn zwischen 0 und ka und zwischen a und $(k+1)a$ bringt etc.; denn das Volumen, welches bei der Verschiebung auf der einen Seite frei wird, ist gleich dem auf der anderen Seite neu eingenommenen.

Um aber alle Teile auf dasselbe Mafs zurückzuführen, müssen mehrere Fäden genommen werden, z. B. von der Länge $2a$ und $3a$. Mit denselben führt man die zu vergleichenden Volumina alle auf möglichst kurzem Wege auf ein und dasselbe Vergleichsintervall zurück, z. B. auf das mittelste. Ein Beispiel wird genügen.

Beispiel. Die Strecke 0 bis 100 soll von 20 zu 20° mittels zweier Fäden von 40° resp. 60° Länge kalibrirt werden. Als Vergleichsintervall betrachten wir die Strecke 40 bis 60, reduciren also die Beobachtungen auf die Zahlen, welche ein Faden F geliefert haben würde, der das Volumen von T.-Str. 40 bis 60 gerade ausfüllt. Nach früherer Bezeichnung (S. 147) ist also $\delta_3 = 0$.

Der 40°-Faden reiche von T.-Str. + 0,3 bis 40,0 20,7 bis 60,0.
Der Faden F würde also gereicht haben

von T.-Str. + 0,3 bis 20,7; also $\delta_1 = +0,4$.

Ebenso führt man durch Beobachtung von 40 bis 80 und 60 bis 100 die Strecke 80 bis 100 auf F zurück. Man finde $\delta_5 = -0,7$.

Dann legen wir einen 60°-Faden zwischen 0 und 60, sowie 20 und 80. Dadurch wird 60 bis 80 auf 0 bis 20 reducirt, und da letzteres bereits mit 40 bis 60 verglichen worden ist, auch auf den Faden F. Die eingenommenen Strecken seien T.-Str. 0,0 bis 60,2 und 20,0 bis 79,6; so ist 0 bis 20 gleich 60,2 bis 79,6. Der Faden F aber ist um 0,4 länger als 0 bis 20, würde also von 60,2 bis 80,0 gereicht haben, also $\delta_4 = -0,2$.

Endlich sei ebenso durch Beobachtungen zwischen 20 bis 80 und 40 bis 100 gefunden $\delta_2 = +0,3$.

Ferner sei $p_0 = +0,1$, $p_1 = +0,8$,

die Anzahl der Teilstrecken zwischen 0 und 100 ist $n = 5$, also (S. 147)

$$s = \tfrac{1}{5}(+0,1 - 0,8 + 0,4 + 0,3 + 0,0 - 0,2 - 0,7) = -0,18.$$

Die Korrektionstabelle wird unter Benutzung der Formel S. 148

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m$$

Teilstrich	Korrektion
0	$-0,10$
20	$-0,10 - 0,18 - 0,4 = -0,68$
40	$-0,68 - 0,18 - 0,3 = -1,16$
60	$-1,16 - 0,18 + 0,0 = -1,34$
80	$-1,34 - 0,18 + 0,2 = -1,32$
100	$-1,32 - 0,18 + 0,7 = -0,80.$

Die letzte Zahl ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer für Kalorimeter. Bei diesen kommt höchstens die Strecke 11° bis 28° in Betracht. Um diese einfach zu erhalten, bestimmt man an einem Normalthermometer mit Fäden von 50° bez. 33,3°, deren Länge durch zwei-, bez. dreimaliges Ansetzen zwischen 0 und 100 ermittelt ist, die Punkte 50, 33,3 und 16,7°. Mit diesen Punkten wird dann das kalorimetrische Thermometer im Bade verglichen. Durch einen Faden von 11,1° ermittelt man an ihm selbst noch die Punkte 11,1, 22,2 und 27,8. Die meisten kalorimetrischen Versuche kann man so leiten, dafs die Temperaturen den eben bestimmten Punkten nahe liegen.

Über feinere Kalibrirungsmethoden vgl. z. B. v. Oettingen, Über die Korrektion des Thermometers, Dorpat 1865; Thiesen, Carl. Rep. 15, 285. 1879; Marek ib. S. 300.

Vergleichung zweier Thermometer. Die gewöhnliche Rektifikation eines Thermometers geschieht durch Vergleichung mit einem Normalthermometer. Beide Instrumente werden, die Kugeln dicht nebeneinander, in ein Bad, und zwar wenn die Temperatur von der Umgebung abweicht, in ein reichlich grofses

Bad gebracht, welches mit Filz und Deckel gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist. Den Gang der Temperatur eliminirt man durch Wiederholung jeder Gruppe von Ablesungen in umgekehrter Reihenfolge. Vor jeder Ablesung wird gerührt. In hohen Temperaturen ist anzuraten, daſs ein Beobachter die Ablesungen in regelmäſsiger Reihenfolge nach der Uhr macht und ein zweiter, der zugleich beständig rührt, sie aufschreibt.

Schema:	Therm. A	68,43	68,47	68,49	68,50
	" B	67,92	67,94	67,96	
	Mittel A	68,45	68,48	68,49	
	Also $A-B=$	+0,53	+0,54	+0,53	

42. Gas- oder Luftthermometer.

Die jetzt allgemein angenommene Temperaturskale beruht auf der Annahme, daſs ein vollkommenes Gas auf jeden Grad Temperaturzuwachs bei konstantem Druck eine gleiche Volumzunahme oder bei konstantem Volumen eine gleiche Druckzunahme erfährt. Das Ansteigen beträgt je 1/273 des für 0° geltenden Betrages. Vgl. S. 71. $\alpha = 1/273$ ist der Ausdehnungskoefficient. — Als Normalgas gilt Wasserstoff. In hoher Temperatur bereitet die starke Diffusion und chemische Aktivität des Wasserstoffs Schwierigkeiten, so daſs man dann auf ein anderes Gas angewiesen ist; gebräuchlich ist Stickstoff. Voraussichtlich wird Helium allgemein brauchbar sein, welches zugleich den Vorteil bietet, daſs es als einatomiges Gas von dem Verdachte etwaiger Dissociation frei ist.

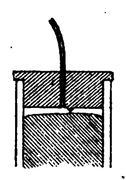
Unter Beiseitelassung des umständlicheren Verfahrens mit konstant gehaltenem Druck wird hier nur die Messung durch Änderung des Druckes H bei konstantem Volumen behandelt.

Um alle Verhältnisse festzulegen, ist als Normalgas Wasserstoff von der Dichtigkeit verabredet worden, welche bei 0° einem Quecksilberdruck von 1000 mm entspricht. Der Unterschied der Angaben von Wasserstoff ($\alpha = 0{,}003663$) und Stickstoff ($\alpha = 0{,}003675$ zwischen 0° und 100°) beträgt zwischen 0 und 100 höchstens 0,01°. In tiefer Temperatur wächst er, erreicht aber selbst bei — 190° (siedende Luft) nur etwa 0,6°.

Die Beziehungen zwischen Gas- und Quecksilberthermometer s. in **40**, VI.

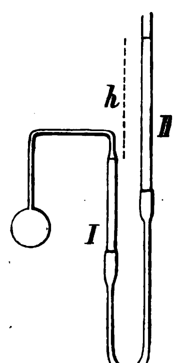
Der Druck H ist bestimmt durch die Formel $H_t = H_0(1 + \alpha t)$. Wenn also das auf konstantem Volumen gehaltene Gas bei 0° den Druck H_0 hat, so zeigt der Druck H die Temperatur $t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}$ oder $\frac{1}{\alpha} = 273$ gesetzt, $t = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0} - 273$. Am einfachsten drückt sich die „absolute Temperatur“ $T = 273 + t$ aus, nämlich $T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0}$.

Bei der Messung treten zwei unvermeidliche, mit der Temperatur beschleunigt wachsende Korrektionen auf, nämlich wegen der Gefäſs-



ausdehnung und wegen des „schädlichen Raumes", d. h. des mit Gas gefüllten Raumes, der das Meſsvolumen mit dem Manometer verbindet. Daſs dieser Raum möglichst klein werde, ist besonders für hohe Temperaturen wichtig. Eine Anordnung zu diesem Zwecke von Chappuis zeigt die Figur. Die kurze Einstellspitze ist nicht an das Glas angeschmolzen, sondern sitzt unter einem eingekitteten ebenen Stahldeckel. Die Verbindung mit dem Thermometergefäſs geschieht durch eine in den Deckel eingekittete Platinkapillare.

Die einfachste Anordnung (Modell von Jolly) für mäſsige Temperaturen besteht in Folgendem. Ein mit trockenem Gas gefüllter Glasballon von etwa 50 ccm Inhalt steht durch ein Kapillarrohr mit einer vertikalen Glasröhre I in Verbindung, in welcher die Luft über Quecksilber abgegrenzt wird. Durch die Erhöhung oder Vertiefung des Quecksilberstandes in einem mit I durch einen Gummischlauch kommunicirenden Rohre II kann man die Oberfläche in I bis zu einer nahe an der Mündung des Kapillarrohres befindlichen Marke (meist eingeschmolzene Glasspitze) „einstellen". Die Verhältnisse sind so zu wählen, daſs auch bei den niedrigsten Temperaturen der Schlauch überall unter innerem Überdruck steht, weil anderenfalls leicht Luft einsickert.



Erstes Verfahren. Um irgend einen beobachteten Druck auf die ihm entsprechende Temperatur umrechnen zu können, genügt es, den Druck bei einer bekannten Temperatur bestimmt zu haben. Wir wählen hierzu den Eispunkt. Man umgibt also die Kugel mit schmelzendem Eise (**40** I), stellt das Quecksilber ein und beobachtet den Barometerstand b_0 und die Höhe h_0 der Kuppe in II über derjenigen in I. Wir setzen $b_0+h_0=H_0$, wo h_0 negativ ist, wenn das Quecksilber in II tiefer steht. Alle b und h werden auf dieselbe Temperatur, z. B. auf 0^0 reducirt (**37**).

Um eine andere Temperatur zu messen, wird diese der Kugel mitgeteilt, die Luft wieder auf ihr Normalvolumen gebracht und die jetzige Quecksilberhöhe h und der Barometerstand b beobachtet. Dann ist, wenn $b+h=H$ gesetzt wird und α den Gasausdehnungs-Koefficienten bedeutet, von Korrektionen einstweilen abgesehen

$$T=\frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0} \quad \text{und} \quad t=\frac{1}{\alpha}\frac{H-H_0}{H_0}. \tag{1}$$

Korrektion wegen der Gefäfsausdehnung. Der kubische Ausdehnungs-Koefficient der Kugel heifse γ. Dann ist

$$T = \frac{1}{\alpha} \frac{H(\alpha - \gamma)}{\alpha H_0 - \gamma H} \quad \text{und} \quad t = \frac{H - H_0}{\alpha H_0 - \gamma H}, \tag{2}$$

oder nahe

$$T = \frac{1}{\alpha} \frac{H}{H_0} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \frac{H - H_0}{H_0}\right) \qquad t = \frac{1}{\alpha} \frac{H - H_0}{H_0} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \frac{H}{H_0}\right).$$

Korrektion wegen des schädlichen Raumes. v sei das Volumen des Gefäfses, v' das Luftvolumen, welches nicht auf die zu messende Temperatur t gebracht werden kann, sondern auf der Zimmertemperatur t' bleibt. Beide Volumina sind durch Auswägen mit Quecksilber oder Wasser bestimmt worden. Ihr Verhältnis sei $v'/v = k$. Dann ist obiger Ausdruck Nr. 2 für t noch zu multipliciren mit $\frac{1 + \alpha t' + k}{1 + \alpha t' - k\alpha t}$ oder man rechnet nach Formel 3, unten.

Als Probe der Formel für t dient die Messung der Siedetemperatur des Wassers (Tab. 14a).

Beweis. Die Luftmenge bleibt konstant. Ist v das Volumen des Ballons bei 0°, s_0 die Dichtigkeit der Luft für 0° und 760 mm, so berechnet sich die Luftmenge, wenn wir die Temperatur t' des schädlichen Raumes als konstant annehmen,

bei 0° und H_0 bei t und H

$$\frac{s_0 H_0}{760}\left(v + \frac{v'}{1 + \alpha t'}\right), \qquad \frac{s_0 H}{760}\left(\frac{v(1 + \gamma t)}{1 + \alpha t} + \frac{v'}{1 + \alpha t'}\right).$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke und Multiplikation beider Seiten mit $(1 + \alpha t)/v$ kommt

$$H_0 (1 + \alpha t)\left(1 + \frac{k}{1 + \alpha t'}\right) = H\left(1 + \gamma t + k \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}\right),$$

$$\text{oder} \quad t\left(\alpha H_0 - \gamma H - k \frac{\alpha}{1 + \alpha t'}(H - H_0)\right) = (H - H_0)\left(1 + \frac{k}{1 + \alpha t'}\right). \tag{3}$$

Hieraus entstehen, wenn man k und γ, bez. nur k gleich Null setzt, die Ausdrücke 1 bez. 2. — Die Ausdrücke für T werden aus denen für t leicht durch Addition von $1/\alpha$ gefunden.

Fehlerrechnung. Enthält eine der Gröfsen H, H_0, α etc. einen Fehler ΔH, ΔH_0, $\Delta \alpha$ etc., so wird die berechnete Temperatur t unter Vernachlässigung kleinerer Fehler um einen relativen Betrag fehlerhaft:

$$\frac{\Delta H}{H - H_0}, \quad -\alpha T \frac{\Delta H_0}{H - H_0}, \quad -\frac{\Delta \alpha}{\alpha}, \quad T \Delta \gamma, \quad \alpha T \Delta k; \quad -\alpha^2 T k \Delta t'.$$

Man sieht, dafs die vom Ausdehnungskoefficienten des Gefäfses, und von

Gröfse und Temperatur des schädlichen Raumes herrührenden Fehler mit der Höhe der zu messenden Temperatur wachsen. Es mufs also in der Pyrometrie der schädliche Raum und seine Temperatur sowie der Ausdehnungskoefficient des Gefäfses gut bekannt sein. Bei der Eispunktsbestimmung kommt es darauf weniger genau an, so dafs die der Formel 3 zu Grunde liegende Annahme, dafs die Temperatur hier dieselbe sei, wie bei der anderen Messung, im allgemeinen gestattet sein wird.

Zweites Verfahren. Dasselbe ist von den Werten für die Ausdehnungskoefficienten und den schädlichen Raum weniger abhängig. Man bestimmt Eispunkt und Siedepunkt des Instrumentes. Werden H_0 und H_1 als Druckhöhen für 0^0 und für die Temperatur t_1 des siedenden Wassers gefunden, so entspricht einer Druckhöhe H die Temperatur t

$$t = t_1 \frac{H-H_0}{H_1-H_0}\left[1 - \frac{H_1-H}{H_0}\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{k}{1+\alpha t'}\right)\right].$$

Über sehr hohe oder tiefe Temperaturen vgl. noch **43a.**

Über die Behandlung des Luftthermometers s. u. A. Chappuis, Trav. et Mém. du Bur. internat. 6, 1888; Wiebe und Böttcher, ZS. f. Instr. 10, 16 u. 233. 1890; Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68, 187. 1899; Ann. d. Phys. 2, 505. 1900.

43. Elektrische Temperaturmessung.

Diese ist von Bedeutung erstens, wenn die grofse Masse oder der Umfang eines Quecksilberthermometers hinderlich ist; aufserdem in den höchsten und niedrigsten Temperaturen, wo die übrigen einfachen Mittel versagen (**43a**). Die Empfindlichkeit der elektrischen Methoden kann sehr weit getrieben werden.

I. Thermo-Element (Th. J. Seebeck, 1822).

Benutzt wird die durch Temperaturdifferenz an den Kontaktstellen zweier Metalle auftretende elektromotorische Kraft. Man lötet zwei gleich lange thermoelektrisch wirksame Drähte, für niedere Temperaturen z. B. Eisen und Neusilber, oder noch wirksamer Eisen-Konstantan, für hohe Temperaturen Platin-Platinrhodium (Le Chatelier) aneinander und mit den anderen Enden an Kupferdrähte. Bringt man die erstere Lötstelle an den Punkt, dessen Temperatur gesucht wird, und erhält die beiden anderen Lötstellen zusammen auf einer bekannten Temperatur (etwa durch Eis auf 0^0), so entsteht eine elektromotorische Kraft. Diese wird entweder selbst durch Kompensation gegen

ein Normalelement (**99** bis **103**) gemessen, oder aus ihrer Proportionalität mit der Stromstärke beurteilt, die sie in einem Galvanometer hervorbringt.

Für kleinere Temperaturdifferenzen kann Proportionalität der Stromstärke mit der Temperaturdifferenz angenommen werden. Man braucht also nur einmal die Stromstärke bei bekannter Differenz zu messen, um aus jeder Beobachtung die Temperatur abzuleiten. Man nimmt ein Spiegelgalvanometer (**83**) von mäfsigem Widerstande. Es ist gut, Klemmen aus anderem Material, als dem der Leitungsdrähte zu vermeiden.

Für gröfsere Differenzen wird empirisch eine Tabelle konstruirt, indem die Ausschläge für einige Temperaturen beobachtet werden. Hieraus interpolirt man durch Rechnung oder auf graphischem Wege eine Tabelle zum Gebrauch.

Zu den gebräuchlichen folgenden Thermoelementen ist die für 1° Temp.-Differenz zu erwartende el. Kraft in Mikrovolt (**80** I) gesetzt: Bi-Sb 100; Konstantan-Fe 53; „Patentnickel" (d. h. die Legirung der deutschen Nickelmünzen)-Fe 45; Konstantan-Cu 40; Ni-Fe 32; Patentnickel-Pt 28; Neusilber-Fe 25; Ni-Cu 22; Pt-Fe 17; 10%Rhod.Pt- oder 10%IrPt- oder 10%RuPt-Pt 10.

Über PtRhod-Pt in hoher Temperatur s. d. Tab. S. 157.

Thermoelemente mit einer von der P. T. Reichsanstalt beigegebenen Tabelle ihrer Spannung als Funktion der Temperatur sind im Handel. —

II. Widerstands-Thermometer („Bolometer")[1] (Will. Siemens).

Der elektrische Widerstand von Metallen wächst mit der Temperatur, am stärksten bei reinen Metallen. Bei reinem Platin kann der Temperaturkoefficient (relative Änderung für 1°) 0,004 erreichen, bei Eisen und bei Nickel 0,006. Wegen der Schärfe und Einfachheit der elektrischen Mefsmethoden hat das Verfahren grofse Vorteile.

Man schaltet den Mefsdraht mit einem gleichen Draht oder mit einem gleichen Rheostatenwiderstand in die Wheatstone'sche Brücke oder das Differentialgalvanometer (**93**, oder **92**).

Der Widerstand werde gefunden bei den bekannten Temperaturen t_0 und t_1 (z. B. 0 und 100°) gleich w_0 und w_1, bei einer zu messenden Temperatur t gleich w, dann ist in den Grenzen eines merklich konstanten Temp.-Koefficienten

$$t = t_0 + (t_1 - t_0) \cdot (w - w_0)/(w_1 - w_0).$$

1) Die gebräuchliche Bezeichnung Bolometer pafst eigentlich nur auf die Messung strahlender Wärme (**72a**).

Für weitere Grenzen bestimme man zunächst bei den bekannten Temperaturen t_0 t_1 t_2 die Widerstände w_0 w_1 w_2. Schreiben wir

$$w_1 - w_0 = \gamma_1 \quad w_2 - w_0 = \gamma_2 \quad t_1 - t_0 = \tau_1 \quad t_2 - t_0 = \tau_2 \text{ und}$$

$$a = \frac{\tau_1 \gamma_2^2 - \tau_2 \gamma_1^2}{\gamma_1 \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1)} \qquad b = \frac{\tau_2 \gamma_1 - \tau_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)},$$

so bedeutet der Widerstand w die Temperatur

$$t = t_0 + a(w - w_0) + b(w - w_0)^2.$$

In noch weiteren Grenzen, wenn auch diese Formel nicht genügt, stellt man durch Beobachtung bei einer Anzahl von Temperaturen die letzteren als Funktion der Widerstände in einer Kurve dar, welcher die zu irgend einem Widerstande gehörige Temperatur entnommen werden kann (6).

Wenn die Temperatur t_v eines Vergleichsdrahtes aus demselben Material wie der Meſsdraht wenig schwankt, so zählt man am einfachsten alle Temperaturen stets von t_v an und addirt t_v zu den so berechneten zu messenden Temperaturen. Den jedesmaligen Widerstand des Vergleichsdrahtes nimmt man als Einheit an.

Für das Temperaturbad kann bei kleinen Widerständen und kleinen Stromstärken, wenn Platin gebraucht wird, reines Wasser dienen. Sicherer ist eine nicht leitende Flüssigkeit (Petroleum). Schwach werden die Ströme schon zu dem Zwecke genommen, Stromwärme zu vermeiden, welche besonders bei unsymmetrischen Verhältnissen beider Drähte Fehler bringt.

Die Meſswiderstände werden z. B. auf Glimmerplättchen aufgewickelt; Zuleitungsdrähte nimmt man, soweit sie mit erwärmt werden, am besten aus demselben Metall, nur dicker.

Hohe Temperaturen s. **43a**, Wärmestrahlung **72a**.

43a. Messung tiefer und hoher Temperaturen; Pyrometrie.

I. Luft-Pyrometer.

Hierüber vgl. **42**, besonders auch das über Wasserstoff, schädlichen Raum- und Gefäſs-Ausdehnung gesagte.

Elektrische Heizung s. 8, 29.

Für Gefäſse mit Stickstoff als Meſsgas ist verwendbar bis 500° Jenaer Glas 59, bis 1100° innen und auſsen glasirtes Porzellan. Höher hinauf ist Innenglasur wegen Verdampfung unzulässig, Auſsenglasur wird durch

Überdruck von innen leicht durchbrochen. Aufsenglasirte Gefäfse, bis etwa 1400° brauchbar, sind daher unter äufserem Überdruck zu halten.

Den genannten Stoffen ist Platin oder Platiniridium (vielleicht bis 1700° brauchbar) überlegen, *falls jede Art von Heizgasen ausgeschlossen wird.*

Die Temperatur des schädlichen Raumes kann mit einem längs der Kapillare verschiebbaren Thermoelement bestimmt werden. Läfst ein gröfserer schädlicher Raum sich nicht vermeiden, so verwendet man vorteilhaft einen Kompensator, d. h. ein Luftthermometer ohne Ballon (Deville und Troost), welches dicht neben dem eigentlichen Thermometer im gleichen Raume geheizt wird. Die Angaben dieses Hilfsthermometers sind dann stets von denen des Hauptthermometers abzuziehen.

Verdrängungsverfahren (Craffts, V. Meyer). Aus einem Gefäfs mit zwei Kapillaren wird die Luft bei der zu messenden Temperatur durch ein Gas (Kohlensäure, Chlorwasserstoff) verdrängt und über einer Flüssigkeit, welche das verdrängende Gas absorbirt, aufgefangen und gemessen. Ist das auf Trockenheit, auf 0° und den atmosphärischen Druck umgerechnete (**18**) Volumen der ausgetretenen Luft $= v_0$, das Volumen des Gefäfses $= v$, so war die Temperatur des letzteren $= 273(v - v_0)/v_0$.

S. auch die akustischen und optischen Methoden **56**, III u. **63a**.

II. Elektrische Pyrometer.

a. Thermoelement (**43**, I).

Besonders Platin gegen Platin-Rhodium (10% Rh; Le Chatelier) oder Platin-Iridium (10% Ir; Barus) oder Platin-Ruthenium (10% Ru) sind bis gegen den Schmelzpunkt des Platins brauchbar. Man isolirt elektrisch durch ein über den einen Draht geschobenes unglasirtes Porzellan- oder Thonrohr und gegen Flammengase durch ein über das Ganze geschobenes glasirtes Porzellanrohr.

Für die von Heraeus zur Zeit ausgegebenen Elemente Pt-RhPt gilt im Mittel, die eine Lötstelle auf 0°, die andere auf t° C. gehalten:

$t =$	300	400	500	600	700	800	900°
$E =$	2,26	3,19	4,15	5,14	6,17	7,23	8,33 Milli-Vt.

$t =$	1000	1100	1200	1300	1400	1500°
$E =$	9,46	10,63	11,83	13,06	14,33	15,64 Milli-Vt.

Die Aichung geschieht mit bekannten Schmelz- oder Siedepunkten (Cd, Zn, Ag, Au, Cu, Pd; Tab. 11), bei nicht oxydirenden Metallen am einfachsten durch Einfügung eines 5 mm langen Drahtstücks in die Lötstelle; die thermoelektrische Kraft im letzten Augenblick vor dem Durchschmelzen wird beobachtet. Oxydirbare Metalle schmelzt man besser im Tiegel und steckt

die heifse Lötstelle isolirt hinein. Bei Silber und Kupfer ist der Einflufs des Sauerstoffs der Luft zu beachten, der die Schmelztemperatur um 8^0 bez. 20^0 erniedrigt. Vgl. auch **45.**

b. Widerstand (**43,** II).

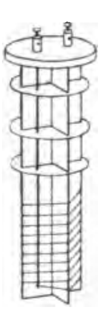
„Platintemperatur" t_p nennt man wohl (Callendar) den Ausdruck $t_p = 100(w_t - w_0)/(w_{100} - w_0)$, wenn w_0, w_{100}, w_t den Widerstand bei 0, 100 und t bedeuten. Gegen die wirkliche Temperatur t besteht, bis 600^0 geprüft, die Differenz

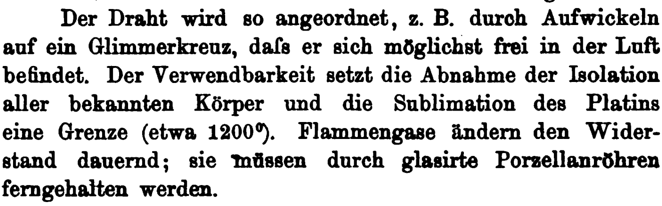
$$t - t_p = \delta\left[\left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100}\right].$$

δ wird durch eine Beobachtung in bekannter höherer Temperatur (siedender Schwefel 445^0, schmelzendes Zink 419^0; Tab. 11) bestimmt. Für reines Platin wird $\delta = 1{,}5$ angegeben; die Differenz ist also in hoher Temperatur beträchtlich.

Widerstandsänderungen der Zuleitung können durch eine entsprechende Drahtschleife im anderen Brückenzweig oder dadurch eliminirt werden, dafs der Widerstand durch eine Spannungsmessung bestimmt wird (**91** II, **101, 103**).

Als Widerstandsmaterial kommt nur reines Platin in Frage.





Der Draht wird so angeordnet, z. B. durch Aufwickeln auf ein Glimmerkreuz, dafs er sich möglichst frei in der Luft befindet. Der Verwendbarkeit setzt die Abnahme der Isolation aller bekannten Körper und die Sublimation des Platins eine Grenze (etwa 1200^0). Flammengase ändern den Widerstand dauernd; sie müssen durch glasirte Porzellanröhren ferngehalten werden.

Lit. zu Pyrometrie. Barus, physik. Behandl. u. Mess. hoher Temp., Leipzig 1892 (enthält eine vollständige Übersicht und die Literatur). — Über Luftthermometer und besonders Thermoelemente: Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. 47, 107. 1892; Holb. u. A. Day, ib. 68, 817. 1899; Ann. d. Physik 2, 505. 1900. — Über Widerstandspyrometer: Callendar, Phil. Trans. 178, S. 161. 1887; 182, S. 119. 1891; Ph. Mag. (5) 48, 519. 1899; Chappuis u. Harker, Trav. et Mém. du Bureau internat. 12, 1900; Ph. Trans. A. 194, 37. 1900.

III. Tiefe Temperaturen.

Bis etwa -100^0 sind Alkohol- oder besser Toluolthermometer anwendbar, weiter abwärts das, am besten mit Wasserstoff gefüllte Gasthermometer; von Flüssigkeiten bleibt bis zur siedenden Luft abwärts nur der, durch Fraktioniren auf etwa 15^0 Siedepunkt rektificirte Petrol-

äther hinreichend beweglich, wenn man anfangs nur die Thermometerkugel einsenkt, so dafs die Flüssigkeitssäule im Rohr nicht zähe wird, ehe sie ihrem tiefsten Stand nahe gekommen ist. Vgl. Holborn u. Wien, Wied. Ann. 59, 213. 1896; F. K., ib. 60, 463. 1897.

Zur Prüfung tiefer Skalenpunkte kann feste Kohlensäure (— 78,2°), Stickoxydul (— 88°) und Sauerstoff (— 182,5°) dienen. Letzteren entwickelt man aus chlorsaurem Kali und kondensirt ihn im Bade von flüssiger Luft. Das Kondensirgefäfs kann nach Umhüllung mit einem engen, aufsen etwa noch durch einen schlechten Wärmeleiter geschützten Mantelrohr (Fig.) später als Siedegefäfs dienen, wobei der Sauerstoff, durch die Löcher oben in den Mantel entweichend, einen Temperaturschutz bildet.

Als Messungsmittel kommen hauptsächlich in Betracht der Platinwiderstand, das Thermoelement Konstantan-Eisen (Pt-RhPt wird in der Kälte unempfindlich) und das Toluol- bez. Petroläther-Thermometer; **39.**

44. Wärme-Ausdehnungskoefficient.

Linearen Ausdehnungskoefficienten β eines festen Körpers nennt man die Verlängerung seiner Längeneinheit, kubischen oder Volum-Ausdehnungskoefficienten 3β (vgl. S. 24) die Volumzunahme seiner Volumeinheit bei der Temperaturerhöhung um 1°.

Wird eine Länge l oder ein Volumen v um t Grad erwärmt, so sind die neuen Gröfsen also

$$L = l(1+\beta t) \qquad V = v(1+3\beta t).$$

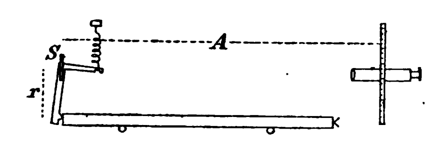
Der (Volum-) A.-K. α einer Flüssigkeit nimmt, vom Quecksilber abgesehen, mit wachsender Temperatur stark zu. Wächst bei der Erwärmung von t auf t' ein Volumen v zu v', so nennt man $\alpha = 1/v \cdot (v'-v)/(t'-t)$ den mittleren A.-K. von t auf t'.

I. Durch Längenmessung.

Wenn ein Stab von der Länge l sich bei der Temperaturerhöhung t um λ verlängert, so ist $\beta = \lambda/lt$.

Die geringen Ausdehnungen werden gewöhnlich auf einen Kontakthebel übertragen. r sei der Abstand des Kontaktpunktes von der Drehaxe, φ der Drehungswinkel, dann ist $\lambda = r\sin\varphi$, vorausgesetzt, dafs bei einer der beiden Temperaturen der Hebelarm zur Stabrichtung senkrecht ist.

Der Drehungswinkel wird mit Spiegel und Skale (z. B.



Anordnung von Edelmann) gemessen. Man stellt den Faden des Fernrohrs auf den Fufspunkt der vom Spiegel S auf die Skale gefällten Senkrechten ein, deren Länge $= A$ Sk.-T. sei. Der Ausschlag durch die Temperaturänderung betrage e Skalenteile, dann ist (25) $e/A = \operatorname{tg} 2\varphi$. Für ein kleines φ kann man setzen $\sin\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\varphi$, also ist in diesem Falle $\lambda = \frac{e}{2}\frac{r}{A}$. Vgl. auch das Beispiel in 3.

Gröfseren Temperaturunterschieden ist die Ausdehnung nicht mehr genau proportional. Man pflegt dann die Länge bei der Temperatur t auszudrücken als

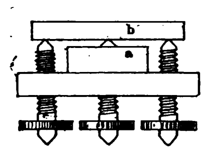
$$l = l_0(1 + \beta t + \beta' t^2)$$

und bestimmt die beiden Koefficienten β und β' aus mindestens drei Beobachtungen. Vgl. 3.

Über einen Apparat für kürzere Stäbe von Fuess s. Glatzel, Pogg. Ann. 160, 497. 1877; Über Beobachtungen bis zu Glühtemperaturen mit elektrischer Heizung Holborn u. Day, Ann. d. Phys. 2, 505. 1900; 4, 104. 1901.

II. Durch Lichtinterferenz (Fizeau 1863).

Die Ausdehnung wird in Lichtwellenlängen gemessen; man untersucht Platten von mäfsiger Dicke, welche zwei parallele Flächen haben, von denen die obere a polirt sein mufs. Diese liegt auf einer von Stahlschrauben getragenen Stahlplatte und



verschiebt sich bei der Ausdehnung nach einer fast parallelen, in kleinem Abstande darüber befindlichen ebenfalls planen Unterfläche b einer Glasplatte hin. Homogenes Licht, welches an a und b gespiegelt wird, erscheint dem darüber befindlichen Auge mit Newton'schen Interferenzstreifen, welche sich bei der Verkürzung der Zwischenschicht um p Wellenlängen um $2p$ Streifenbreiten verschieben. Die Verschiebung wird durch ein Mikroskop an Marken gemessen, welche an der oberen Fläche angebracht sind. Die Änderung der Wellenlänge in der Luftschicht durch die Erwärmung und etwa durch Luftdruck-Schwankungen wird nach den Sätzen in Rechnung gezogen, dafs die Wellenlänge mit dem Brechungsverhältnis n aus dem

leeren Raum in Luft im umgekehrten, und dafs $n-1$ mit der Dichtigkeit der Luft im direkten Verhältnis steht.

Die Ausdehnung der Stahlschrauben, welche die obere Platte tragen, mufs bekannt sein und in Rechnung gesetzt werden. Man bestimmt sie nach der nämlichen Methode, entweder an der polirten Fläche des Stahl-Tischchens selbst oder mit Hilfe einer auf dasselbe gelegten Quarzplatte.

Anstatt der Stahlschrauben kann ein hohler Quarzcylinder (Zeiss'sche Werkstätte) dienen, dessen Ausdehnung (s. unten) zuverlässig bekannt ist. Mit je drei vorragenden Punkten ruht er auf einer Bodenplatte und trägt die Deckplatte. Der ebenfalls auf der Bodenplatte stehende zu untersuchende Körper wird vorteilhaft von einer Höhe gewählt, welche die Höhe des Quarzcylinders fast erreicht. Die wirkliche Ausdehnung des Körpers ist gleich der bekannten des Quarzcylinders, vermehrt oder vermindert um die aus der Verschiebung der Streifen sich ergebende Differenz beider Ausdehnungen.

Einen Körper ohne spiegelnde Fläche kann man untersuchen, indem man auf ihn eine spiegelnde dünne Platte von bekannter Ausdehnung (Quarz) legt.

Natriumlicht ist wegen seiner zweifachen Wellenlänge, welche die Streifen periodisch undeutlich macht, nicht bei allen Distanzen anwendbar. Das brauchbarste Licht liefert eine längsdurchsichtige Geissler'sche Röhre (**59a**) mit Wasserstoff und etwas Quecksilber. Neben den Wasserstofflinien $H\alpha (10^6 \lambda = 656{,}3 \text{ mm})$ und $H\beta$ (486,1) entstehen beim Anwärmen die Quecksilberlinien, von denen besonders die grüne (546,0) und die blaue (435,8) bei sehr grossen Gangunterschieden noch scharfe Interferenzen zeigen.

Der Ausdehnungskoefficient des Quarzes für die Temperatur t ist (Benoît) in der Richtung der Axe $= 0{,}0_4 0716 + 0{,}0_7 080 \cdot t$,
senkrecht dazu $= 0{,}0_4 1325 + 0{,}0_7 116 \cdot t$.

Fizeau, Pogg. Ann. 119, 87. 1863; 123, 515. 1864; 128, 564. 1866. Benoît, Trav. et Mém. du bur. internat. I. 1881 u. VI. 1888; Pulfrich, ZS. f. Instr. 1893, S. 365, 401 u. 437 über das Fizeau'sche Dilatometer der Zeiss'schen Werkstätte; vgl. besonders daselbst auch die Bemerkungen über die Ermittelung der gewanderten Streifenzahl durch gleichzeitige Messungen an mehreren Wellenlängen und über die Korrektionen wegen der schwankenden Luftdichtigkeit. — Vgl. auch **65**, IV.

III. Durch Wägung.

Mit Quecksilber. Oft liegt für Glassorten das Bedürfnis einer Kenntnis des Ausdehnungskoefficienten vor. Ein kleiner Ballon wird in eine Spitze ausgezogen, oder besser, es wird, damit das Quecksilber glatt abreifst, sein abgeschmolzenes und in der Flamme abgerundetes Ende bis zu einer feinen Öffnung abgeschliffen.

Dann wägt man ihn bei zwei Temperaturen, z. B. 0 und 100°, ganz mit Quecksilber gefüllt; 8, 1 u. **23**. Zur Füllung taucht man die Spitze des vorher erwärmten Ballons ein, worauf beim Erkalten Quecksilber aufgesaugt wird. Dies wiederholt man, indem zuletzt das Quecksilber zum Sieden gebracht wird, bis zur vollständigen Füllung. Endlich läfst man den Ballon unter Quecksilber bis zu einer niedrigen Temperatur t abkühlen. Die Wägung des so ganz gefüllten Ballons ergebe das Nettogewicht p des Quecksilbers. Alsdann erwärmt man bis zur Temperatur t', wobei Quecksilber ausfliefst, und bestimmt wieder das Gewicht p'. Dann berechnet sich der kubische Ausd.-Koefficient des Glases

$$3\beta = 0{,}000182\frac{p'}{p} - \frac{1}{t'-t}\cdot\frac{p-p'}{p}.$$

Beweis s. folg. S.

Mit Wasser. Wägt man bei zwei Temperaturen t und t' mit luftfreiem Wasser, so ist

$$3\beta = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\frac{Q}{Q'}-1\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\frac{v'}{v}-1\right),$$

wo die Dichtigkeiten Q und Q' oder die Volumina des Wassers v und v' zu t und t' aus Tab. 4 oder 5 genommen werden.

Um 100° herum hat im Verhältnis zu 4° das Wasser das Volumen $1{,}04327 + 0{,}00080(t-100)$.

Weil die Ausdehnung des Quecksilbers und in höherer Temperatur mehr noch die des Wassers die Ausdehnung der festen Körper weit übertrifft, so wird eine sehr genaue Bestimmung der Temperatur verlangt.

Aus Dichtigkeitsbestimmungen. Sind die Dichtigkeiten s und s' eines Körpers für die Temperaturen t und t' hinreichend genau bekannt, so ist der Ausdehnungskoefficient

$$3\beta = \left(\frac{s}{s'}-1\right)/(t'-t).$$

IV. Ausdehnung von Flüssigkeiten.

1. Konstantes Gefäfs. Ein Glasgefäfs — mit ausgezogener Spitze oder in der Form der Figuren S. 59 — halte bei der niederen Temperatur t das Flüssigkeitsgewicht p. Dann erwärme man die Flüssigkeit in einem Bade auf die höhere Temperatur t' und bringe sie, etwa durch Austupfen mit Fliefspapier, auf denselben Stand im Gefäfs. Erkaltet habe das Ganze nun das Gewicht p'. Wenn 3β der kubische Ausdehnungskoefficient des Glases (s. v. S., Tab. 11 und 8, 5), so ist der mittlere Ausdehnungskoefficient der Flüssigkeit zwischen t und t' gleich

$$\alpha = 3\beta\frac{p}{p'} + \frac{1}{t'-t}\frac{p-p'}{p'}.$$

Denn wenn v und v' das specifische Volumen der Flüssigkeit für t und t' bezeichnen, so ist $\alpha = (v'/v - 1)/(t'-t)$. Nun ist offenbar $p'/p = [1 + 3\beta(t'-t)]\,v/v'$, also $v'/v = p/p' + 3\beta(t'-t)\,p/p'$, woraus diese Formel und auch die unter III sich leicht ergibt.

2. Auftriebsmethode. Man wäge einen Glaskörper bei zwei Temperaturen t und t' in einer Flüssigkeit. Wenn p und p' die Auftriebe, so gilt dieselbe Formel.

3. Dilatometer. Ein Glasgefäfs, nach Art eines Thermometers mit einem angeblasenen engen, geteilten Rohr wird bis in das Rohr mit der Flüssigkeit gefüllt und die Einstellung der Säule bei den Temperaturen t bez. t' beobachtet. Sind die abgelesenen Volumina v bez. v', so hat man als mittleren Ausdehnungskoefficienten

$$\alpha = 3\beta\frac{v'}{v} + \frac{1}{t'-t}\frac{v'-v}{v}.$$

Das Gefäfs kalibrirt man mit Quecksilber oder Wasser, die Strecken des Rohres mit Quecksilberfäden, die man wägt (vgl. **23** und **24**; auch daselbst das Verfahren beim Einfüllen). Anstatt zu kalibriren kann man auch zuerst eine Flüssigkeit von bekannter Ausdehnung in dem Apparat untersuchen und daraus die Volumenverhältnisse ableiten. — Sehr geeignet ist auch das Pyknometer Fig. 4 S. 59, wenn die Steigrohre geteilt und kalibrirt sind.

Bei Flüssigkeiten von grofser Dampfspannung wird man das Verdampfen auch innerhalb des Dilatometers beachten.

4. Kommunicirende Röhren. Wenn eine Flüssigkeitssäule von der Höhe h und der Temperatur t mit einer andern von

h' und t' im Gleichgewicht (15, A 6) steht, so ist $1+\alpha(t'-t)=\frac{h'}{h}$ oder $\alpha=\frac{1}{t'-t}\cdot\frac{h'-h}{h}\cdot$ Durch ihre Unabhängigkeit von der Glasausdehnung ist die Methode fundamental (Dulong). Sie verlangt aber zur genauen Ausführung grofse Mittel.

Über Ausführung am Quecksilber vgl. Regnault, Mém. de l'Acad. franç. XXI, 1847, am Wasser Thiesen, Scheel u. Diesselhorst, Wied. Ann. 60, 340. 1897; Wiss. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 3, 1. 1900.

V. Ausdehnungskoefficient eines Gases.

1. **Bei konstantem Volumen mit dem Gasthermometer.** Die Anweisung ergibt sich aus 42. Am einfachsten geschieht die Messung bei 0 und 100°. Wenn zu den Temperaturen 0 und t bei konstantem Volumen die Drucke H_0 und H beobachtet werden, so ist $\alpha=(H-H_0)/H_0 t+\gamma H/H_0$; γ bedeutet den kubischen Ausdehnungskoefficienten des Gefäfses (vgl. Gl. 2, S. 153). Mit Rücksicht auf den schädlichen Raum von der relativen Gröfse k wird der vollständige Ausdruck

$$\alpha=\frac{1}{t}\frac{H-H_0}{H_0}\left(1+k\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}\right)+\gamma\frac{H}{H_0}.$$

Anstatt diesen vollständig auf α aufzulösen, wird man rechts meist ausreichend genau $(1+\alpha t)/(1+\alpha t')=(273+t)/(273+t')$ schreiben dürfen.

2. **Bei konstantem Druck durch Wägung.** Ein Ballon mit abgrenzbarem Volumen (Hahn, ausgezogene zuschmelzbare Spitze) wird mit dem Gase gefüllt zur Temp. t erwärmt, verschlossen, in diesem Zustand unter Quecksilber von der Temperatur t_0 geöffnet, so dafs Quecksilber eintritt, und abgesperrt, während das innere und äufsere Niveau gleich steht. Das eingetretene Quecksilbergewicht sei $=m'$, während die ganze Füllung mit Quecksilber von derselben Temperatur m betrage. Es werde $m'/m=p$ bezeichnet. Dann ist

$$\alpha=\frac{p+\gamma(t-t_0)}{t-t_0-pt-\gamma(t-t_0)t_0}.$$

Beweis. Die Dichtigkeiten des Gases bei t_0 und t gleich s_0 und s gesetzt, so dafs $(1+\alpha t)/(1+\alpha t_0)=s_0/s$ ist, erhält man $s_0(m-m')/13{,}6=s(1+\gamma(t-t_0))m/13{,}6$, oder $\frac{s_0}{s}=\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_0}=\frac{1+\gamma(t-t_0)}{1-p}$, woraus der Ausdruck folgt.

45. Schmelzpunkt; Gefrierpunkt.

So heifst die Temperatur, bei welcher feste und flüssige Teile des Körpers nebeneinander bestehen können (Tab. 11 u. 12). Gemische mehrerer Körper, wie die meisten Fette, Paraffin, Glas haben im allgemeinen keinen scharfen Schmelzpunkt, sondern ein Temperaturintervall, innerhalb dessen sie erweichen. — Die Temperatur beginnender Erstarrung kann beträchtlich unter dem Schmelzpunkt liegen.

Schmelzpunkt eines Körpers. Die Ausführung einer Bestimmung ist nach der Natur des Körpers, besonders nach der Höhe des Schmelzpunktes sehr verschieden. Z. B. kann man in einem ausgezogenen Glasröhrchen eine kleine Menge geschmolzener Substanz aufsaugen und darin erstarren lassen. Der starre Zustand wird sich von dem flüssigen meist durch eine Trübung des Tropfens unterscheiden. Man bringt das Röhrchen mit einem Thermometer in ein Bad (Becherglas mit Wasser, Petroleum, Paraffin etc.), welches man unter Umrühren langsam erwärmt, und beobachtet die Temperatur, bei welcher der Tropfen sich klärt oder beweglich wird. Die erste Beobachtung wird nur zur Orientirung dienen.

Sicherer ist die Anwendung gröfserer Mengen. Dieselben erwärmt man allmählich zusammen mit einem Thermometer. Den Schmelzpunkt erkennt man daran, dafs die Temperatur einige Zeit lang stationär bleibt.

Hohe Schmelztemperaturen.

Tiegelmethode. Der Körper wird in ausreichender Menge im bedeckten Tiegel aus Porzellan, oder wenn eine reduzirende Atmosphäre gewünscht wird, aus Graphit, mittels Flamme, Gebläseofen oder elektrischer Heizung (**8**, 29) geschmolzen. Durch den Deckel ist ein mit einem Porzellanröhrchen umhülltes Thermoelement (**43a**, II) eingeführt. Bei richtig regulirter Heizung erkennt man das Schmelzen oder Erstarren daran, dafs die Thermokraft eine Zeit lang stationär bleibt.

Drahtmethode. Man fügt in die eine Lötstelle eines Thermoelements das zu untersuchende Metall in Gestalt eines etwa cm-langen Drahtstückchens ein, erhitzt allmählich und beobachtet die Thermokraft im Augenblick des Durchschmelzens.

Näheres über diese Methoden z. B. bei Holborn u. Day, Ann. d. Phys. 2, 523. 1900.

Meldometer (Joly). Ein etwa 10 cm langes, 1 mm breites Platinband wird elektrisch regulirbar geheizt; sein Temperaturzustand wird mikrometrisch nach der Verlängerung beurteilt. Benutzt wird nur der mittlere Teil von gleichmäfsiger Temperatur. Eine ganz kleine Menge der zu untersuchenden Substanz wird aufgebracht und ihr Aggregatzustand, in allmählich engere Temperatur-Grenzen eingeschlossen, mit einem schwachen Mikroskop beobachtet. Geaicht wird das Instrument empirisch mit Körpern von bekanntem Schmelzpunkt (Tab. 11).

Joly, Chem. News 65, 1. 1892; Ramsay u. Eumorfopoulos, Phil. Mag. 41, 360. 1896.

Gefrierpunkt von Lösungen.

Die Bedeutung dieser Aufgabe besteht hauptsächlich in der Bestimmung der Molekulargröfse eines gelösten Stoffes. Der Gefrierpunkt eines Lösungsmittels erniedrigt sich durch Auflösung eines Stoffes proportional der molekularen Koncentration der Lösung, solange die letztere nicht zu stark wird (Rüdorff, de Coppet, Raoult). Ist p die in Grammen gemessene gelöste Menge in 1000 gr des Lösungsmittels, M das chemische Molekulargewicht des gelösten Stoffes, so nennt man $p/M = \mu$ die in 1000 gr gelöste Anzahl von Gramm-Molekülen. Die Erniedrigung τ des Gefrierpunkts ist dann

$$\tau = G \cdot \mu = G \cdot p/M,$$

G ist von der Art des gelösten Stoffes unabhängig, hat jedoch für jedes Lösungsmittel einen besonderen Wert. G ist nach Betrachtungen über die osmotische Arbeit beim Auflösen (van't Hoff) durch die Schmelztemperatur t und die Schmelzwärme ϱ (Tab. 12) des Lösungsmittels gegeben als

$$G = 0{,}00198(273 + t)^2/\varrho,$$

z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 273^2 : 80 = 1{,}85$. Aufserdem ist G empirisch bestimmt. Einige Werte sind

	für Wasser	Benzol	Essigsäure	Ameisensäure	Nitrobenzol
Gefrierpunkt $t =$	0,0°	5,0°	17°	8,6°	3°
Schmelzwärme $\varrho =$	80	30	45	58	22
theoretisch $G =$	1,85	5,1	3,7	2,7	6,9
empirisch $G =$	1,84	5,1	3,8	2,8	7,07

Man kann also nach der Formel (vgl. oben)

$$M = G \cdot \frac{p}{\tau}$$

aus der Gefrierpunktserniedrigung τ ein Molekulargewicht M ableiten. Es ist aber zu beachten, dafs viele Körper, worunter insbesondere die Elektrolyte (Salze, Alkalien, Säuren), von diesem Gesetz ausgeschlossen sind. Die wirkliche Erniedrigung τ ist bei wässrigen Lösungen von Elektrolyten gröfser als die aus der Formel mit dem chemischen Mole-

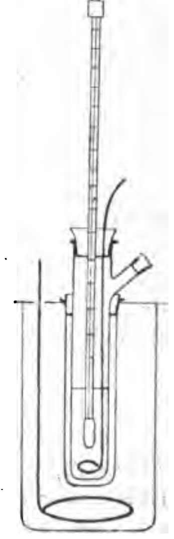
kulargewicht berechnete τ_0. Dies bestätigt die Annahme, dafs solche Moleküle in der Lösung zerfallen, „dissociirt“ sind (Arrhenius). Den „Dissociationsgrad“ (vgl. S. 74) berechnet man für eine Spaltung:

in 2 Moleküle als $\frac{\tau}{\tau_0} - 1$, in n Moleküle als $\frac{1}{n-1}\left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)$.

Da es nach dem Vorigen darauf ankommt, die Gefrierpunkts-Erniedrigung einer Lösung gegen ihr Lösungsmittel mit beträchtlicher Genauigkeit zu bestimmen, so ermittelt man die Gefrierpunkte des Lösungsmittels und der Lösung mit dem nämlichen Thermometer.

Eine genaue Messung verlangt trotzdem beträchtliche Vorsichtsmafsregeln, besonders in Wasser als Lösungsmittel. Man bestimmt den Gefrierpunkt durch allmähliche Abkühlung der Lösung, mit einem empfindlichen Thermometer unter stetem Umrühren. Die Temperatur pflegt zunächst ohne Erstarrung unter den Gefrierpunkt zu sinken; beginnt die Ausscheidung, so steigt die Temperatur plötzlich auf den Gefrierpunkt, der nun abgelesen wird. Das Gefrieren wird zweckmäfsig durch Impfen mit einer Spur von gefrorenem Lösungsmittel eingeleitet.

Die nebengezeichnete Anordnung von Beckmann erleichtert die Messung. Ein innerer Cylinder enthält die durch einen Seitenansatz eingegossene Lösung, einen Rührer und das Thermometer. Von dem Quecksilberfaden des letzteren kann man je nach dem Gefrierpunkt des angewandten Lösungsmittels geeignete Mengen abtrennen (**39**). Die Erniedrigung wird von der Einstellung des Quecksilberfadens in dem gefrierenden reinen Lösungsmittel gezählt. Jener Cylinder ist durch eine Luftschicht in einem etwas weiteren umgebenden Cylinder von der Kältemischung etc. getrennt, in welche man den weiteren Cylinder einsetzt. Die durch das Verhältnis von Eis und Kochsalz regulirbare Temperatur der Kältemischung soll nicht zu weit (3^0) unter der Gefriertemperatur liegen, da man die letztere sonst im allgemeinen zu tief, aber wenn sich ein Eiscylinder an den Wänden bildet, auch wohl zu hoch findet.



Der Cylinder wird mit einer gewogenen

Menge (vielleicht 20 gr) des Lösungsmittels beschickt und dessen Gefrierpunkt nach der oben gegebenen Anweisung wiederholt bestimmt. Ebenso der erniedrigte Gefrierpunkt, nachdem man eine gewogene Menge des aufzulösenden Körpers durch den Seitenansatz eingeführt hat. Man arbeitet mit Erniedrigungen um einige Zehntel Grad, setzt also etwa $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{2}{1000}$ gr-Molekül zu 10 gr des Lösungsmittels.

Beispiel. 1) 20 gr Wasser. Nachdem das in 1/100 geteilte Thermometer auf — 0,3 gesunken war, wurde das Gefrieren eingeleitet. Das Thermometer stieg auf + 0,016. 2) 1,00 gr Rohrzucker in diesem Wasser gelöst und bis zu — 0,6 gekühlt. Nach Einbringen einer Spur Eis stieg das Thermometer auf — 0,259. Also Gefrierpunkts-Erniedrigung $\tau = 0{,}016 - (-0{,}259) = 0{,}275^0$.

Das Molekulargewicht M berechnet sich hieraus, da $p = 1{,}00 \cdot 1000/20 = 50$ und die Konstante für Wasser $G = 1{,}84$ ist, $M = G \cdot p/\tau = 1{,}84 \cdot 50/0{,}275 = 335$. ($C_{12}H_{22}O_{11}$ gibt $M = 342$.)

Das Ausfrieren des Lösungsmittels erhöht die Koncentration der Lösung, also soll die dem Gefrieren vorausgegangene Unterkühlung nicht zu beträchtlich sein und das Ausfrieren nicht lange dauern. Die durch Ausfrieren entstandene Erhöhung der Koncentration läfst sich aus der dem Gefrieren vorausgegangenen Unterkühlung Δ unter den Gefrierpunkt schätzen. Ist ϱ die Schmelzwärme, c die specifische Wärme des Lösungsmittels, so ist durch das Ausfrieren die Lösung nahe im Verhältnis $1 + c\Delta/\varrho$ koncentrirter geworden. Dauerte das Ausfrieren bis zur Beobachtung längere Zeit, so wird die Korrektion gröfser. Man kann dann den Gang des allmählichen Niedergangs des Gefrierpunkts noch eine Zeit lang beobachten und auf den ersten Augenblick zurückrechnen.

Literatur: Beckmann, ZS. f. physik. Chem. 2, 638 u. 715. 1888; ib. 21, 239. 1896. Über Vorsichtsmafsregeln: Loomis, Wied. Ann. 51, 500. 1894; Nernst u. Abegg, über Korrektionen für Körper, bei denen das Ausfrieren langsam stattfindet, ZS. f. physik. Ch. 15, 681. 1894. Über den Gang der Depression in koncentrirteren Lösungen, Abegg ib. 15. 209. — Eine eingehende zusammenfassende Behandlung: Raoult, ib. 27, 618. 1898.

46. Siedepunkt.

Siedepunkt heifst die Temperatur, bei der eine Flüssigkeit unter Atmosphärendruck, d. h. unter dem Druck von 760 mm Quecksilber von 0° siedet, oder bei welcher ihre gesättigte Dampfspannung 760 mm beträgt.

Die Dampfentwicklung pflegt von der Wand aus stattzufinden, nicht

nur weil in der Regel von hier aus geheizt wird, sondern auch weil die Dampfblasenbildung im Innern der Flüssigkeit durch die Kohäsion erschwert wird, während an der Wand eine Gasschicht zu haften pflegt, welche die Kohäsion vermindert. Im Laufe der Zeit vermehrt sich die Kohäsion zwischen Wand und Flüssigkeit und es entsteht ein „Siedeverzug", d. h. eine, unter Umständen, und zwar besonders bei langsamem Sieden, beträchtliche Überhitzung über den Siedepunkt. Metallwände sind in dieser Hinsicht weniger gefährlich als Glaswände.

Bei der Messung hat man, unter möglichster Vermeidung der Abkühlung wie besonders der Überhitzung der nicht bespülten Wandungen, mit der Flamme oder mit einem Bade ein mäfsiges gleichförmiges Sieden zu unterhalten, wobei die Siedeverzüge durch Stückchen Platinblech oder noch besser durch einen durch den Gefäfsboden durchgeschmolzenen Platindraht eine Zeit lang verhindert werden können. Immerhin bringe man das Thermometer nicht in die Flüssigkeit, sondern dicht über die Oberfläche; dasselbe überzieht sich mit einer Flüssigkeitshaut und zeigt dann den richtigen Siedepunkt an. (In Lösungen dagegen mufs das Thermometer eintauchen; vgl. unten.)

Über die etwaige Thermometer-Korrektion wegen herausragenden Fadens s. **40** V.

Der Siedepunkt mufs von dem zufälligen Barometerstande b (**37**) auf 760 mm reducirt werden. Liegt bereits eine Tabelle über die Siedepunkts-Änderung mit dem Druck für die Flüssigkeit oder für eine nahe liegende Mischung vor, so korrigirt man hiernach. Andernfalls benutzt man die Erfahrung, dafs die Siedetemperatur vieler Flüssigkeiten um 760 mm herum sich nahe gleich stark ändert, nämlich um 0,038 oder $\frac{3}{80}$ Grad auf 1 mm Hg, zu einer wahrscheinlichen Korrektion und fügt also zu dem beobachteten Siedepunkt hinzu $\frac{3}{80}\cdot(760-b)$ Grad.

Flüssigkeitsgemische müssen mit Rückflufskühler untersucht werden; 8, 27.

Siedepunkt einer Lösung.

Zweck der Bestimmung ist in der Regel die Bestimmung der Molekulargröfse des gelösten Körpers.

Gesetz der Siedepunktserhöhung einer Lösung. Durch Auflösung eines Stoffes, der selbst nicht verdampft, vermindert sich die Dampf-

spannung, also erhöht sich der Siedepunkt des Lösungsmittels. Solange die Lösung verdünnt bleibt, ist die Änderung proportional der molekularen Koncentration. In 1000 gr des Mittels seien gelöst p gr des Körpers, also $p/M = \mu$ gr-Moleküle, wenn M das Molekulargewicht des Körpers. Dann beträgt die Erhöhung τ des Siedepunktes (vgl. auch **46a**)

$$\tau = S \cdot \mu \quad \text{oder} \quad \tau = S \cdot p/M.$$

S ist erfahrungsgemäfs (Raoult) für jedes Lösungsmittel konstant, für Äther 2,1, Alkohol 1,16, Benzol 2,7, Chloroform 3,6, Wasser 0,52. S. auch Tab. 12. S berechnet sich theoretisch (van't Hoff) aus der Siedetemperatur t und der Verdampfungswärme σ des Lösungsmittels (Anh. 9; Tab. 12)

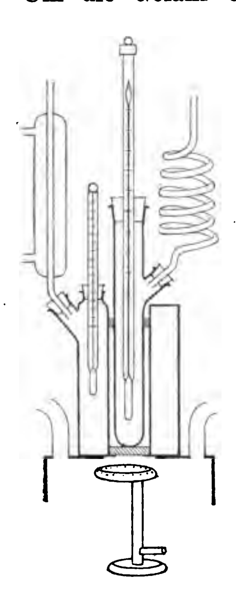
$$S = 0{,}00198\,(273 + t)^2/\sigma,$$

z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 273^2 : 536 = 0{,}514$. S läfst sich empirisch bestimmen, indem man einen Stoff auflöst, über dessen Molekulargröfse in dem Lösungsmittel kein Zweifel besteht. Aus der Siedepunktserhöhung τ eines Lösungsmittels von der Konstante S berechnet sich also das Molekulargewicht des gelösten Stoffes

$$M = S \cdot \frac{p}{\tau}.$$

Über den Einflufs der Dissociation, besonders in wässriger Lösung vgl. S. 166, 167.

Zur Ausführung der Bestimmung wird oft die beistehende oder eine etwas abgeänderte Anordnung (Beckmann) gebraucht. Um die Gefahr einer Überhitzung oder Unterkühlung zu verringern, befindet sich die zu untersuchende Lösung in einem Kochcylinder, der von einem Ringmantel aus Glas oder Porzellan umgeben ist, in welchem nur Lösungsmittel siedet. Der links gezeichnete Kühler läfst die in ihm verdichtete Flüssigkeit zurückfliefsen.



Die Lösung selbst wird in dem inneren Gefäfs so bereitet, dafs eine abgewogene Menge Lösungsmittel, etwa 10 bis 20 gr, eingebracht wird, deren Siedepunkt man zuerst bestimmt. Abgewogene Mengen des Körpers werden dann mit Pipetten oder in Stücken oder zu Pastillen geprefst durch die Seitenöffnung eingeführt. Der untere Teil des Siedegefäfses enthält Glaskugeln, um das Sieden zu erleichtern und um mit wenig Flüssigkeit auszureichen. Häufig ist ein Platindraht durch den Boden

geschmolzen. Das Gefäfs steht auf Asbestpappe, wird auch oben durch einen Asbestring gehalten. Damit die Lösung ungeändert bleibt, wird der Dampf in dem Rückflufskühler verdichtet. Bei der geringen Dampfentwicklung genügt hier für eine nicht zu niedrig siedende Flüssigkeit der in der Figur gezeichnete spiralige Luft-Rückflufskühler; ein gestrecktes (von Kühlwasser umflossenes) Rückflufsrohr bietet übrigens den Vorteil, dafs die Substanz ohne Öffnen des Gefäfses eingeworfen werden kann. Geheizt wird gleichzeitig der Mantel und das Siedegefäfs mit 2 kleinen Bunsenflammen oder einem Ringbrenner. Der nach unten hohle Heizkasten mit Abzugsrohren (höher als gezeichnet) besteht aus Asbest.

Beckmann, ZS. f. phys. Ch. 8, 223. 1891; 15, 661. 1894; 18, 473. 1895; 21, 245. 1896. Die Stelle des Mantels mit Lösungsmittel vertritt in der zuletzt beschriebenen Anordnung ein mit Glimmer abgedeckter Luftmantel. Anstatt Glaskugeln werden Platinkörper verwendet und der Kühler ist anders geordnet.

Beispiel. Zu 20 gr Wasser wurden 8 gr Rohrzucker gesetzt, also $p = 400$ gr Zucker in 1000 gr Wasser. Das Wasser zeigte den Siedepunkt 99,72°, die Lösung 100,34°; also $\tau = 100{,}34 - 99{,}72 = +0{,}62°$. Hieraus berechnet sich das Molekulargewicht des Rohrzuckers $M = S \cdot p/\tau = 0{,}52 \cdot 400/0{,}62 = 335$ (anstatt $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$).

46a. Dampfspannung.

Unter Dampfspannung eines Körpers wird der (in einer Quecksilbersäule von 0° oder in Atmosphären gemessene), Druck seines gesättigten Dampfes verstanden, welcher durch das Einbringen der Substanz im Überschufs in das Vakuum entsteht, d. h. z. B. bei Zimmertemperatur die Höhe, um welche der Meniskus einer Toricelli'schen Vakuumröhre dadurch sinkt, dafs man die Flüssigkeit in einem kleinen Überschufs in das Vakuum bringt. Falls der Raum aufserdem ein gegen den Körper neutrales Gas enthält, so addirt sich zu dessen Druck die Dampfspannung (Dalton).

Die Dampfspannung wächst beschleunigt mit der Temperatur. Die Temperatur, für welche sie 1 Atm. beträgt, ist gleich dem Siedepunkt des Körpers.

Man stellt ein Toricelli'sches Vakuum her, indem man ein etwa meterlanges, 10 mm weites, einseitig geschlossenes Glasrohr mit trockenem Quecksilber (8, 1) fast ganz füllt, die anhängenden Luftbläschen mittels der an der Rohrwand gleitenden gröfseren Luftblase oder vollkommener durch Auskochen beseitigt und das alsdann ganz gefüllte Rohr mit dem Finger

verschlossen in Quecksilber umstürzt. An einer Millimeterteilung hinter oder auf dem Rohr oder mit dem Kathetometer (**22**; **36**) liest man die Höhe H der Quecksilbersäule ab, die dem Barometerstande nahe gleich sein mufs. Man bringt in das Vakuum die luftfreie Substanz im Überschufs, indem man sie unten, eine Flüssigkeit mit einem Spritzchen oder in einem kleinen leichten Fläschchen, welches nötigenfalls mit aufsteigen darf, einführt und aufsteigen läfst (bei stark verdampfenden Substanzen das Rohr vorher neigen, bis das Quecksilber oben anstöfst, sonst wird das Rohr zertrümmert!).

Besser ist bei der Untersuchung von Flüssigkeiten ein Rohr mit einer Verengung und einem Stöpsel, vielleicht einem eingeschliffenen Thermometer (Fig.). Der Stöpsel wird durch Aufgiefsen von ein wenig Quecksilber gedichtet, ev. auch mit einem nicht verdampfenden Schmiermittel, welches von der Flüssigkeit nicht angegriffen wird (Vaselin). Die Füllung des Rohrs mit Quecksilber wird sehr einfach, wenn das Gefäfs, in dem das Rohr steht, einen so langen Fortsatz hat, dafs man das Rohr ganz einsenken kann. Nach Herstellung und Ablesung des Vakuums giefst man die zu untersuchende Flüssigkeit in den Trichter und lüftet den Stöpsel vorsichtig, bis das Quecksilber und so viel Flüssigkeit eingetreten ist, dafs ein Teil unverdampft bleibt, giefst aber alsbald wieder etwas Quecksilber auf.

Die Höhe H' der Quecksilbersäule wird wieder abgelesen. $H - H'$, ev. gemäfs dem folgenden korrigirt, ist die Dampfspannung des Körpers.

Zu dem abgelesenen H' ist zuzuzählen erstens $h \cdot s/13{,}6$, wo s das specifische Gewicht und h die Höhe der nicht verdampften Flüssigkeit auf dem Quecksilber ist; zweitens in höherer Temperatur die Spannkraft des Quecksilberdampfes selbst nach Tab. 18. Aufserdem sind während länger dauernder Versuche die Änderungen des Barometerstandes in leicht ersichtlicher Weise zu berücksichtigen. War bei der Trockenablesung der Barometerstand $= b$, bei der Ablesung mit Dampf aber $= b'$, so hat man H' um $b - b'$ zu vergröfsern.

Man liest immer oben am Quecksilbermeniskus ab. Da die Kapillarspannung des Quecksilbers durch den Flüssigkeitstropfen

geändert wird und da dieser ebenfalls eine Kapillarspannung besitzt, so verlangen genaue Messungen, besonders bei geringen Spannungen, ein Rohr, welches an den Ablesestellen 15 bis 20 mm weit ist.

Je niedriger der Raum des Vakuums ist, desto gröfser werden Fehler aus einem Rest Luft. — Vor der Ablesung soll man durch vorübergehendes Tieferstellen oder Neigen des Rohres neue Flüssigkeitsteile an die Oberfläche bringen.

Flüssigkeiten von gröfserem Dampfdruck kann man in dem geschlossenen Schenkel eines aufrecht stehenden Heberrohres untersuchen. Die Dampfspannung ist gleich dem äufseren Luftdruck $\pm$ Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln. Verunreinigungen durch schwerer flüchtige Körper werden hier bedenklicher, weil der verdampfende Bruchteil grofs und der Rest also stärker verunreinigt ist.

Für andere Temperaturen als Zimmertemperatur mufs man den Verdampfungsraum mit einem durchsichtigen Bade (Wasser, Eis und Wasser, Dampf) umgeben und sorgfältig darauf halten, dafs kein Teil eine niedrigere Temperatur hat, als die beobachtete. Es kommen dann aber auch die Temperaturänderungen der Quecksilbersäule in Betracht, insofern sie die Dichtigkeit des Quecksilbers ändern.

Über ein Verfahren mit einem Differentialmanometer, an welchem der Dampfdruck und das Vakuum ausgewechselt werden, s. Thiesen u. Scheel, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 76. 1900.

Siedeverfahren. Aus der Siedetemperatur t (**46**) einer Flüssigkeit erhält man immer einen Punkt der Dampfspannungskurve, nämlich die Spannkraft b (Barometerstand), welche zu t gehört. Sieden unter anderem als atmosphärischem Drucke wird durch ein an den Dampfraum angeschlossenes gröfseres Luftvolumen von regulirbarer Dichtigkeit („künstliche Atmosphäre“) unter Anwendung eines Rückflufskühlers (8, 27) ermöglicht.

Lösungen.

Das Gesetz (Babo, Wüllner, Raoult), nach welchem die Dampfspannung einer Flüssigkeit durch die Auflösung eines Körpers verkleinert wird, der selbst keine merkliche Dampfspannung hat, lautet: Enthält die Lösung μ Moleküle des gelösten Körpers auf μ' Moleküle des Lösungs-

mittels, welchem an sich die Spannung e zukommt, so beträgt die Depression ε der Dampfspannung

$$\varepsilon = e \cdot \frac{\mu}{\mu + \mu'}.$$

μ und μ' berechnen sich aus der Masse des gelösten Körpers p und des Lösungsmittels p', wenn M und M' die zugehörigen Molekulargewichte bedeuten, $\mu = \frac{p}{M}$ und $\mu' = \frac{p'}{M'}$. Die Dampfdruckerniedrigung von Lösungen kann also nach folgender Regel ebenfalls zur Ermittelung von Molekülgröfsen dienen: es seien p Gewichtsteile eines Körpers in p' Teilen einer Flüssigkeit gelöst. Die Dampfspannung der Flüssigkeit sei e (Tab. 13, 14, 18), diejenige der Lösung sei um ε kleiner. Dann verhalten sich die Molekulargewichte

$$\frac{M}{M'} = \frac{p}{p'} \frac{e - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Für koncentrirtere Lösungen entstehen Abweichungen. Ferner gelten für Elektrolyte die Bemerkungen von S. 166. 167.

Man kann die vorige direkte Methode anwenden, allein die gesuchte Differenz ε ist hierdurch bei verdünnten Lösungen nicht leicht genug zu ermitteln.

Differenzmethode (Dieterici). Ein empfindliches Manometer (**36**, IV) wird durch geeignete Hahnverbindungen abwechselnd mit den auf derselben Temperatur gehaltenen Dampfräumen der Lösung und des Lösungsmittels verbunden und zeigt so die gesuchte Differenz an. Die übrigen Apparatenteile werden auf einer höheren Temperatur gehalten. Die Reduktionskonstante des Manometers wird empirisch ermittelt.

Dieterici, Wied. Ann. 50, 47. 1893; 62, 620. 1897.

Siedeverfahren. Die Änderung der Dampfspannung einer Lösung kann man folgendermafsen bestimmen. Man füllt ein „abgekürztes Barometer" von mindestens 10, besser 15 mm Weite mit Quecksilber, bringt in den geschlossenen Schenkel eine nicht zu kleine Menge der Lösung und hängt das Ganze in einen Raum, der durch einen starken Dampfstrom des siedenden Lösungsmittels geheizt wird. Der Höhenunterschied der Quecksilbersäule in beiden Schenkeln gibt die Änderung der Dampfspannung des Lösungsmittels an. Korrektionen s. S. 172.

Beispiel. Lösung von $p = 20$ gr Rohrzucker in $p' = 100$ gr Wasser. Unterschied der beiden Quecksilberhöhen $= 7{,}5$ mm, während im ge-

schlossenen Rohr über dem Quecksilber die 17% Zuckerlösung 11 mm hoch stand. Deren spec. Gewicht bei 100° gleich 1 gesetzt, kommen zu den 7,5 mm noch 11/13,4 = 0,82 mm hinzu. Es ist also $\varepsilon = 8,32$. Der Barometerstand, auf Quecksilber von 100° umgerechnet, war $e = 747$ mm, also ist $M = M' \frac{p}{p'} \frac{e - \varepsilon}{\varepsilon} = 18 \frac{20}{100} \frac{747 - 8,3}{8,32} = 320$. In Wirklichkeit $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$.

Über die Benutzung des Siedepunktes der Lösung selbst zur Ermittelung ihrer Dampfdruck-Erniedrigung s. **46**.

Über die statischen Methoden vgl. noch z. B. Lehmann, Molekularphysik II, 144. 1889.

47. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit (Hygrometrie).

Für die Meteorologie oder für physikalische Zwecke können folgende hygrometrische Eigenschaften der Luft in Betracht kommen:

1. Die Dichtigkeit des Wasserdampfes in der Luft, d. h. die in 1 cm³ Luft enthaltene Wassermenge in gr. Weil die Zahl sehr klein ist, pflegt man sie mit 10^6 multiplicirt anzugeben, wodurch man also den Wassergehalt von 1 m³ Luft in gr ausgedrückt erhält. Diese Gröfse heifst in der Meteorologie die absolute Feuchtigkeit der Luft; sie werde mit f bezeichnet.

2. Die relative Feuchtigkeit, oder der Sättigungsgrad, d. h. das Verhältnis des wirklich vorhandenen Wassergehaltes zu demjenigen, bei welchem die Luft mit Wasser gesättigt wäre. Diese Gröfse ergibt sich aus der absoluten Feuchtigkeit f und der Lufttemperatur, zu welcher man aus Tab. 13 das Maximum f_0 des möglichen Wassergehaltes entnimmt, als f/f_0.

3. Die Spannkraft e des Wasserdampfes oder der Dunstdruck.

Wird die Spannkraft in mm Quecksilber gemessen, so hängen Spannkraft e, absolute Feuchtigkeit f und Lufttemperatur t durch die Formeln zusammen

$$e = 0,943 \cdot (1 + 0,00367 \cdot t) \cdot f, \qquad f = 1,060 \cdot \frac{e}{1 + 0,00367 \cdot t}, \qquad 1.$$

so dafs die Bestimmung von t und e oder f immer ausreicht.

Denn die Dampfdichte des Wassers ist nach S. 74 = 18/28,9 = 0,623; also wiegt 1 m³ Dampf (**18**, **19**),

$$0,623 \cdot \frac{1293}{1 + 0,00367 \cdot t} \cdot \frac{e}{760} = \frac{1,060 \cdot e}{1 + 0,00367 \cdot t} \text{gr}.$$

Bequem für das Gedächtnis ist, dafs (Tab. 13) e in mm und f in gr/m³ einander nahe gleich sind. Aufserdem entfernen sich die Werte in mittlerer Temperatur (von 6 bis 30°) im Falle der Sättigung nicht weit von der in Centigraden ausgedrückten Temperatur selbst.

4. Der Taupunkt, d. h. die Temperatur τ, bei welcher die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist.

I. Taupunkt-Hygrometer (Daniell, 1820; Regnault).

In Tab. 13 findet man den zum Taupunkt τ gehörigen Wassergehalt f von 1 m³ Luft, sowie die Spannkraft e des bei der Temperatur τ gesättigten Wasserdampfes; und zwar ist die so entnommene Spannkraft ohne weiteres die in der Atmosphäre vorhandene. Die Dichtigkeit verlangt eine Korrektion, weil die Luft in der Nähe des Instrumentes abgekühlt und dadurch verdichtet worden ist. Der aus der Tabelle zu τ entnommene Wassergehalt ist also zu grofs und mufs mit

$$\frac{1+0{,}00367\cdot\tau}{1+0{,}00367\cdot t}=\frac{273+\tau}{273+t}$$

multiplicirt werden, wenn t die Lufttemperatur bedeutet.

Man stellt das Instrument so auf, dafs die glänzende Fläche dem Auge volles Himmelslicht oder das Licht einer Kerze spiegelt. Am Daniell'schen Hygrometer (Fig.) wird die mit dem Läppchen bewickelte Kugel durch das Verdampfen aufgetröpfelten Äthers gekühlt, worauf eine Destillation von der anderen Kugel aus und hierdurch auch die Abkühlung der letzteren eintritt. Man kühlt, bis man eine Trübung des glänzenden Ringes bemerkt. Sofort unterbricht man das Verdampfen des Äthers; die Temperatur steigt, und man beobachtet den Stand des Thermometers, bei welchem der Niederschlag zu verschwinden anfängt. Nach einigen orientirenden Versuchen gelingt es leicht, diese beiden Temperaturen einander auf einen kleinen Bruchteil eines Grades zu nähern. Das Mittel aus beiden nimmt man als Taupunkt τ der Luft. — Man sehe darauf, dafs die von dem Körper, vom Atmen u. s. w. herrührende Feuchtigkeit möglichst von der Taufläche entfernt bleibe.

Am Regnault'schen Hygrometer (Fig.) sucht man durch Reguliren des Wasserabflusses aus dem Aspirator eine solche Temperatur des durch den Luftstrom verdampften Äthers zu bewirken, dafs auf der glänzenden Fläche ein Niederschlag zeitweilig entsteht und verschwindet. Diese Temperatur ist der Taupunkt.

II. Psychrometer (August, 1828).

Die atmosphärische Feuchtigkeit wird aus der Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher Wasser in der Luft verdampft, welche Geschwindigkeit wiederum aus der Abkühlung eines befeuchteten Thermometers erkannt wird.

Ist t die Lufttemperatur (Temperatur eines trockenen Thermometers),
t' die Temperatur des feuchten Thermometers,
e' die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei t', wie dieselbe aus Tab. 13 entnommen wird,
b der Barometerstand in mm,

so erhält man nach meteorologischen Erfahrungen die wirkliche Dampfspannung e, je nachdem

t' über 0^0 oder unter 0^0 liegt,

$$e = e' - 0{,}00080 \cdot b \cdot (t - t') \qquad e' - 0{,}00069 \cdot b \cdot (t - t').$$

Aus e berechnet sich die absolute Feuchtigkeit f vermöge der Formel 1 Seite 175.

Obige Konstanten gelten für Beobachtungen in freier, mäfsig bewegter Luft. In ruhender Luft sind gröfsere Zahlen einzusetzen, die im geschlossenen kleinen Zimmer um 50% steigen können. Um bei Zimmerbeobachtungen die Bedingungen der Konstante 0,00080 herzustellen, bewegt man das Psychrometer, am einfachsten, indem man es an einem langen Faden pendeln läfst.

Näherungsformeln. Bei den mancherlei Fehlerquellen des Psychrometers genügt es häufig, für b einen mittleren Barometerstand anzunehmen. Setzt man $b = 750$ mm, so wird

$$e = e' - 0{,}60(t - t') \quad \text{bez. unter } 0^0 \quad - 0{,}52(t - t'). \qquad 2.$$

Genähert kann man auch f nach der Formel

$$f = f' - 0{,}64(t - t') \qquad 3.$$

berechnen, worin man für f' den aus Tab. 13 zu t' entnommenen Wert setzt.

Beispiel.* $t = 19{,}50^0$, $t' = 13{,}42^0$; $b = 739$ mm. Man findet zu t' in Tab. 13 $e' = 11{,}44$ mm. Davon ist abzuziehen $0{,}00080 \cdot 739 \cdot 6{,}08 = 3{,}59$ mm, also ist die Dampfspannung $e = 7{,}85$ mm. Hierzu berechnet sich für $19{,}5^0$ nach Gl. 1 S. 175 $f = \frac{1{,}060 \cdot 7{,}85}{1 + 0{,}00367 \cdot 19{,}5} = 7{,}8 \frac{\text{gr}}{\text{m}^3}$. Die relative Feuchtigkeit ist $7{,}8/16{,}7 = 0{,}47$.

Die genaue Regnault'sche Formel $e = e' - \frac{0{,}480 \cdot b(t-t')}{610-t'}$, bez. unter Null 689 statt 610, gibt nur in besonders hohen Temperaturen merklich andere Werte als unser Ausdruck.

Aspirations-Psychrometer (Afsmann). Temperaturbeobachtungen der Luft werden durch Strahlung gefährdet, besonders im Freien. Deswegen sind die Thermometerkugeln hier von einem polirten doppelten Metallschutzrohr umgeben, durch welches mittels eines Uhrwerk-Ventilators ein Luftstrom mit etwa 2 m/sec Geschwindigkeit gesaugt wird. Man berechnet $e = e' - 0{,}00066 \cdot b(t - t')$ unter gewöhnlichen Verhältnissen nahe $= e' - 0{,}5\,(t - t')$. Auch für nicht meteorologische Zwecke kann die Anwendung eines Thermometers mit Ventilation wertvoll sein.

Afsmann, ZS. f. Instr. 1892, 1.

III. Absorptionshygrometer.

Direkt erhält man den Wassergehalt, wenn man ein gemessenes Volumen der Luft durch eine mit Stückchen Chlorcalcium, oder Bimstein mit koncentrirter Schwefelsäure, oder wasserfreier Phosphorsäure gefüllte Röhre saugt und das absorbirte Wasser wägt.

IV. Haarhygrometer etc.

Die Gestalt (Länge, Torsion, Krümmung) hygroskopischer Körper hängt von der Luftfeuchtigkeit ab. Die Einstellung s des Zeigers an der Skale soll die relative Feuchtigkeit in Procenten geben, also $s = 100 f/f_0$, oder $f = \frac{1}{100} s \cdot f_0$, wo f_0 zu der Lufttemperatur aus Tab. 13 genommen wird. Die Spannkraft e wird aus f berechnet (vgl. oben).

Um den 100%-Punkt zu prüfen, stellt man das Instrument einige Zeit unter eine gut schliefsende Glocke mit Wasser. Am Koppe'schen Hygrometer wird das Zeug, welches sonst die durchlässige Hinterwand bildet, genäfst und der abschliefsende Schieber aufgesetzt. Der Nullpunkt wird unter einer Glocke mit koncentrirter Schwefelsäure kontrolirt; manche Hygrometer sollen aber durch das Austrocknen Schaden leiden. Andere Punkte der Teilung müssen durch gleichzeitige Beobachtung eines anderen Hygrometers geprüft werden.

48. Specifische Wärme, Mischungsverfahren. Wasser-Kalorimeter.

Einheit der Wärmemenge oder Kalorie.

Vgl. Warburg, Referat über die Wärmeeinheit, Leipzig, 1900.

Als Einheit pflegt man die Wärmemenge zu setzen, welche die Masseneinheit Wasser (1 gr oder 1 kg; Gramm- oder Kilogramm-Kalorie) um 1° erwärmt. Diese Menge ist nicht ganz konstant. Da man gewöhnlich mit Wasser etwas unterhalb Zimmertemperatur mifst, so wird neuerdings bevorzugt und hier als Einheit zu Grunde gelegt:

die Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser bei 15° (von 14,5 auf 15,5°) um 1° erwärmt.

Aufserdem kommen in Betracht:

die Kalorie von 0 auf 1°, die nach Regnaults Vorgang lange Zeit gebraucht worden ist. Sie wird $=1{,}006$ 15°-Kalorien angenommen (vgl. unten);

die mittlere Kalorie, der 100te Teil der Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser von 0 auf 100° erwärmt. Auf diese Menge kann man nämlich das Eisschmelzverfahren am bequemsten zurückführen. Der nach den vorliegenden Bestimmungen hier als Mittelwert angenommene Betrag 1 mittl. Kal $=1{,}003$ Kal_{15} mag um $\pm 0{,}003$ unsicher sein;

die Eis-Kalorie, das ist die zum Schmelzen der Masseneinheit Eis notwendige Wärmemenge. Diese ist nach den Versuchen $=79{,}9$ mittleren Kalorien, wird hier also $=80{,}1$ Kal_{15} gesetzt;

die mechanische Kalorie. Die wissenschaftliche Einheit ist die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge. Dies ist in dem C.G.S-System die Arbeit, welche 1 gr an einem Orte, wo die Schwerbeschleunigung $= 1$ cm/sec^2 wäre, um 1 cm hebt. Das 10^7fache entspricht der technischen elektrischen Arbeitseinheit Wattsekunde oder Joule. Vgl. Anh. 9. Nach den gegenwärtigen Kenntnissen gilt: 1 Wattsek $= 0{,}239$ gr-Kal_{15}; 1 C.G.S $= 0{,}239 \cdot 10^{-7}$ gr-Kal_{15}; 1 gr-$Kal_{15} = 4{,}19 \cdot 10^7$ C.G.S.

Specifische Wärme.

Spec. Wärme eines Körpers ist die Wärmemenge oder Anzahl von Kalorien, welche seine Masseneinheit (gr oder kg, je nach der Definition der Kalorie) um 1° erwärmt. Da die Wärmekapacität der Körper nicht ganz konstant ist, sondern im allgemeinen mit der Temperatur mehr oder weniger zu wachsen pflegt, so mufs die Temperatur angegeben sein, für welche die Zahl gilt. Bei dem Mischungsverfahren mifst man gewöhnlich die Wärmeabgabe zwischen 100° und 16°. Dann wird also die mittlere spec. Wärme zwischen diesen Temperaturen gefunden.

Spec. Wärme des Wassers. Sie nimmt von 0° aufwärts bis etwa 26° ab, um dann wieder zu wachsen. Nach neueren Bestimmungen wird, wenn man $c_{15} = 1$ setzt, anzunehmen sein bei der Temp. t:

$t =$	0°	5	10	15	20	25	30°	50°
$c_t =$	1,0065	1,0044	1,0017	1,0000	0,9988	0,9984	0,9986	1,003.

Litteratur über Kalorien und spec. Wärme des Wassers:

Aufser den von Warburg l. c. zusammengestellten neueren Arbeiten (Rowland, Dieterici, Bartoli u. Stracciati, Lüdin, Pernet, Griffiths, Joly u. A.) noch Barnes, Proc. R. S. 67, 238. 1900. Die beobachteten Werte sind:

	$t=0°$	5	10	15	20	25	30°	50°
Rowland	—	1,0054	1,0019	1,0000	0,9979	0,9972	0,9969	1,010
Bart. u. Stracc.	1,008	1,0046	1,0018	—	0,9994	0,9997	1,0008	
Lüdin	1,005	1,0027	1,0010	—	0,9994	0,9993	0,9996	1,005
Barnes	—	1,0050	1,0020	—	0,9986	0,9978	0,9973	1,000
Joly								0,996

Das Produkt aus spec. Wärme und Atom- bez. Molekulargewicht eines Körpers heifst seine **Atom- bez. Molekularwärme.** Die Atomwärme der festen Elemente ist, mit gröfseren Abweichungen z. B. für C, B, Si, ungefähr = 6,3.

Die Messung auf 1/1000 genau auszuführen, ist schwierig. Zur Rechnung genügen deswegen 4stellige Logarithmen (Tab. 53).

I. Feste Körper.

Der zu untersuchende Körper wird gewogen, auf eine gemessene Temperatur T erwärmt und mit einer gewogenen Wassermenge von der Temperatur t gemischt. τ sei die gemeinschaftliche Endtemperatur des Körpers und des Wassers. Ist dabei

m die Masse des Körpers,

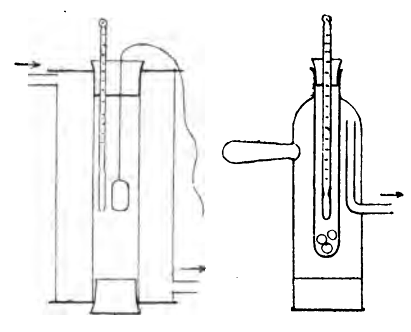
w die Masse des Wassers, vermehrt um den Wasserwert der übrigen Teile des Kalorimeters (siehe unten),

so findet sich die mittlere specifische Wärme c des Körpers zwischen τ und T aus der Formel

$$c = \frac{w}{m} \frac{\tau - t}{T - \tau}. \qquad 1.$$

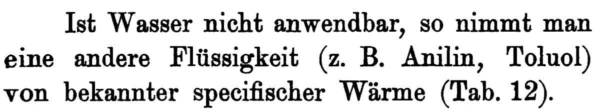
Denn $w(\tau - t)$ ist die Wärmemenge, welche das Wasser bekommt; $cm(T-\tau)$ ist die Menge, welche der Körper abgibt; beide Mengen sind identisch, also gleich grofs.

Die anfängliche Erwärmung des Körpers wird in einem durch siedendes Wasser oder durch Dämpfe von siedendem



Wasser äuſserlich geheizten, gegen Luftwechsel sorgfältig geschützten Raume (nach Regnault, Neumann, Pfaundler) hervorgebracht und muſs fortgesetzt werden, bis das darin befindliche Thermometer einige Zeit hindurch eine stationäre Temperatur angezeigt hat. Der erhitzte Körper wird nach Entfernung des Verschlusses aus dem ersten Apparat durch Herablassen am Faden, aus dem zweiten durch Umkehren rasch in das Wasser des Kalorimeters gebracht.

Kalorimeter. Ein Gefäſs aus polirtem, thunlichst dünnem Blech (Messing, Silber) steht auf einer die Wärme schlecht leitenden Unterlage, etwa Korkschneiden oder gekreuzten Fäden, in einer Schutzhülle. Ein Deckel ist zweckmäſsig, um Verdunstungsfehler zu vermeiden. Während der Beobachtung wird gerührt. Über Thermometer-Korrektion s. S. 150.



Ist Wasser nicht anwendbar, so nimmt man eine andere Flüssigkeit (z. B. Anilin, Toluol) von bekannter specifischer Wärme (Tab. 12).

Wasserwerte. Die Wärmemenge, welche einen Körper um 1^0 erwärmt, d. h. numerisch die ihm kalorimetrisch äquivalente Wassermenge, heiſst sein Wasserwert. Zu der Masse des Wassers im Kalorimeter ist zu addiren der Wasserwert des Gefäſses, des Rührers und des Thermometers. Die ersteren beiden werden als Masse mal spec. Wärme berechnet (Tab. 11).

Der Wasserwert des Thermometers wird empirisch bestimmt. Man erwärmt es, etwa in erhitztem Quecksilber oder auch über der Flamme (um etwa 30^0) zur Temp. Θ, taucht es rasch in eine gewogene, kleine Wassermenge μ, deren Temp. ϑ dadurch auf ϑ' steige. Dann ist $\mu \cdot (\vartheta' - \vartheta)/(\Theta - \vartheta')$ der Wasserwert.

Meist wird es genügen, den Wasserwert des Thermometers aus dem Volumen v cm^3 des eintauchenden Teiles des Thermometers als $0{,}46 \cdot v$ zu berechnen. 1 cm^3 Quecksilber hat nämlich

den Wasserwert $13,6 \cdot 0,034 = 0,46$, und 1 cm³ Glas hat zufällig nahe denselben Wert, nämlich $2,5 \cdot 0,19 = 0,47$ (Tab. 11 u. 12). Man bestimmt v durch Einsenken in die Flüssigkeit eines kalibrirten Rohres oder eines auf der Wage äquilibrirten Gefäſses.

Für w ist dann in obiger Formel einzusetzen die Summe der so ein für allemal bestimmten Wasserwerte der festen Teile des Kalorimeters, vermehrt um das Nettogewicht des zur Füllung gebrauchten Wassers.

Endlich kann noch als Behälter des Körpers ein Körbchen oder Gefäſs in Betracht kommen. Sein Wasserwert w' wird wieder als das Produkt aus Masse und spec. Wärme gefunden.

Mit Rücksicht auf diese Korrektionen gilt also zur Berechnung der sp. W. aus den beobachteten Gröſsen m, w, τ, T u. t (S. 180) die Beziehung $(cm + w')(T - \tau) = w(\tau - t)$, also ist

$$c = \frac{1}{m}\left(w\frac{\tau - t}{T - \tau} - w'\right) \cdot \qquad 1\text{a.}$$

Wärmeverluste. Der unvermeidliche Wärmeaustausch des Kalorimeters mit der Umgebung wird nach Rumford dadurch eliminirt, daſs man die Anfangstemperatur t um ungefähr ebensoviel tiefer als die Zimmertemperatur nimmt, wie die Schluſstemperatur τ höher sein wird. Die zu erwartende Temperaturerhöhung kann durch einen Vorversuch, oder wenn die spec. Wärme ungefähr bekannt ist, durch Rechnung näherungsweise bestimmt werden. Damit dieser Kunstgriff wenigstens angenähert genüge, dürfen die Temperaturänderungen im Kalorimeter eine mäſsige Gröſse (5°) nicht übersteigen. Auch muſs die Zeit, welche zum Übergang der Wärme aus dem Körper in das Wasser nötig ist, klein sein, weswegen man den Körper, besonders wenn er die Wärme nicht gut leitet, in kleinen Stücken anwendet, die etwa auf einen Faden aufgezogen oder in ein Körbchen gefüllt werden, dessen Wasserwert in Rechnung gesetzt wird; vgl. oben.

Einwurfsfreier verfährt man so: Die Anfangstemperatur t des Kalorimeters sei so tief, daſs die Endtemperatur τ auch noch ein wenig unter der Temp. der Umgebung bleibt. 5 bis 10 min lang vor dem Einbringen des heiſsen Körpers beobachtet man das Thermometer etwa alle Minuten und leitet daraus und

aus der Lufttemperatur den Temperaturgewinn pro Minute und Grad Temperaturüberschufs der Umgebung ab. Das Einbringen des Körpers geschieht nach der Uhr, und man beobachtet nun das steigende Thermometer etwa von 20 zu 20 sec. Hieraus wird der zu korrigirende Temperaturgewinn so berechnet, wie das Beispiel angibt. Während der ganzen Zeit wird gleichmäfsig gerührt.

Beispiel.

Wasserwerte: Gefäfs und Rührer aus Messing wogen zusammen $\mu = 19$ gr.

Specifische Wärme des Messings $\gamma = 0{,}093$; also Wasserwert $\mu\gamma = 19 \cdot 0{,}093 = 1{,}8$ gr.

Das Thermometer wurde, auf 45° erwärmt, in 20 gr Wasser von 16,25° gebracht; die Temp. stieg auf 17,10°. Also Wasserwert $= 20 \cdot (17{,}10 - 16{,}25)/(45 - 17{,}1) = 0{,}6$ gr.

Das Wasser wog netto 74,0 gr, also $74{,}0 + 1{,}8 + 0{,}6 = w = 76{,}4$ gr.
Der zu bestimmende Körper wog $m = 48{,}3$ gr.
Temperatur des erhitzten Körpers $T = 99{,}7°$.
Anfangstemperatur des Wassers $t = 12{,}05°$.
Gemeinschaftliche Endtemperatur $\tau = 17{,}46°$.

Hieraus würde man finden $c = \frac{76{,}4}{48{,}3} \cdot \frac{17{,}46 - 12{,}05}{99{,}7 - 17{,}46} = 0{,}1041$.

Korrektion wegen Wärmeaustausches.

Umgebungstemperatur $= 18{,}0°$.

Vorperiode								
	Uhr	25 min	26	27	28	29	30 min	Mittel
	Kalorimeter	11,54°	11,65	11,75	11,88	11,96	12,05°	11,80°.

Das Thermometer stieg also, während die Mitteltemperatur um 6,2° unter der Umgebung lag, in 5 min um 0,51°. Folglich beträgt der Temperaturgewinn pro Grad Überschufs $0{,}51/(5 \cdot 6{,}2) = 0{,}0164$ °/min. Auf 30 min 0 sec wurde der heifse Körper eingebracht, der Heizapparat sofort wieder entfernt und nun unter beständigem Rühren beobachtet:

um	**30′**	20″	40″	**31′**	20″	40″	**32′**	20″	40″	**33′**	Mittel
	12,05°	14,7	15,9	16,8	17,2	17,3	17,4	17,44	17,45	17,46°	16,6°.

In diesen 3 min lag die Temp. also im Mittel 1,4° unter der Umgebung; von der Temperaturzunahme entstammte also der Wärmeaufnahme aus der Umgebung der Anteil $0{,}016 \cdot 3 \cdot 1{,}4 = 0{,}07°$. Das beobachtete $\tau = 17{,}46°$ ist also um $-0{,}07°$ zu korrigiren, gibt τ korrig. $= 17{,}39°$, und hiermit aus obiger Formel c korrig. $= 0{,}1026$.

Bei der Berechnung der Mitteltemperatur für die Korrektion sind die erste und die letzte Beobachtung mit halbem Gewicht eingesetzt worden, d. h. man hat ihr Mittel 14,8° mit den übrigen acht Werten zum Mittel vereinigt. Bei sehr genauen Bestimmungen stellt man den Gang der Temperatur graphisch dar und entnimmt daraus die Temperaturen etwa für 5 15 25 sec etc.

Ist das Kalorimeter offen, so geht durch Verdunstung etwas Wärme verloren, wodurch das Verfahren einer Ergänzung durch Beobachtung des Temperaturganges nach der Erwärmung bedürftig wird. Ausführliche Anweisungen über die Verbesserungen der Resultate wegen Wärmeverlust siehe z. B. Müller-Pfaundler Physik II, S. 297; Wüllner Exp.-Physik II, 5. Aufl. S. 453, 1896.

II. Flüssigkeiten.

1. Die specifische Wärme einer Flüssigkeit läfst sich gerade wie oben ermitteln, wenn man die Flüssigkeit in ein Gefäfs eingeschlossen hat, sie mit demselben erhitzt und in ein Wasserkalorimeter einsenkt. Der Wasserwert des Gefäfses wird in Rechnung gesetzt.

2. Verfügt man über eine gröfsere Flüssigkeitsmenge, so füllt man mit ihr das Kalorimeter, erhitzt einen gewogenen, die Wärme leicht abgebenden Körper (Körbchen mit Kupferstücken) von bereits bekannter specifischer Wärme und verfährt wie oben. Bedeuten

M, T, C Gewicht, Temperatur und specifische Wärme des erhitzten Körpers,

t die Anfangstemperatur der Flüssigkeit,

τ die Endtemperatur,

m das Nettogewicht der Flüssigkeit,

w' den Wasserwert der festen Teile des Kalorimeters,

so ist die gesuchte specifische Wärme c der Flüssigkeit, und zwar die mittlere zwischen t und τ,

$$c = C\frac{M}{m}\frac{T-\tau}{\tau-t} - \frac{w'}{m}. \qquad 2.$$

3. Als Erhitzungskörper kann bequem eine Glaskugel mit einigen 100 gr Quecksilber dienen, welche ein enges Steigrohr mit einer hoch (80^0) und einer niedrig gelegenen (25^0) Marke hat. Man erhitzt im Quecksilberbade oder vorsichtig über der Flamme bis über die höhere Marke, läfst dann abkühlen und senkt im Augenblick der Einstellung auf diese Marke den Erhitzungskörper in die Flüssigkeit ein. Wenn, unter Umrühren, die niedrige Marke erreicht ist, hebt man den Körper heraus und beobachtet nun wieder die Temperatur der Flüssigkeit. (Andrews; Marignac; Pfaundler.)

m, w', t, τ mögen die obigen Bedeutungen behalten; ein gleicher Versuch, bei welchem man denselben Erhitzungskörper

in eine Wassermenge w in demselben Gefäfs bringt, ergebe die Erwärmung des Wassers von t' auf τ', dann ist offenbar

$$c = \frac{1}{m}\left[(w + w')\frac{\tau' - t'}{\tau - t} - w'\right]. \qquad 3.$$

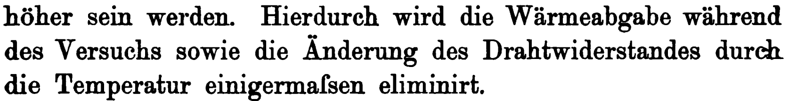
Denn es ist $(cm + w')(\tau - t) = (w + w')(\tau' - t')$.

Die Endtemperaturen t und t' müssen in den beiden Versuchen ungefähr gleich sein, sonst entsteht eine Korrektion dadurch, dafs die Endvolumina des Glases nicht gleich grofs sind.

49. Specifische Wärme. Elektrische Methode.

I. Vergleichung specifischer Wärmen von Flüssigkeiten (Pfaundler).

Zwei Flüssigkeitsmengen werden in gleichen Gefäfsen, gegen Wärmeverlust möglichst geschützt (Figg. S. 181 u. 191) durch denselben elektrischen Strom (**80**) erwärmt, welcher gleiche Drahtwiderstände aus einer Legirung durchfliefst, deren Leitvermögen von der Temperatur möglichst wenig beeinflufst wird (Tab. 30), etwa aus Platinsilber. Zweckmäfsig wählt man die beiden Mengen so, dafs die zu erwartenden Temperaturzunahmen ungefähr gleich sind. Man nehme ferner die Anfangstemperaturen etwa um ebensoviel niedriger als die Zimmertemperatur, wie die Schlufstemperaturen höher sein werden. Hierdurch wird die Wärmeabgabe während des Versuchs sowie die Änderung des Drahtwiderstandes durch die Temperatur einigermafsen eliminirt.



Die Flüssigkeitsmenge m samt dem Wasserwert w ihres Gefäfses und Thermometers erwärme sich von t auf τ, die andere Menge m' samt zugehörigem Wasserwert w' der festen Teile von t' auf τ', dann ist $(cm + w):(c'm' + w') = (\tau' - t'):(\tau - t)$, also

$$c = \frac{1}{m}\left[(c'm' + w')\frac{\tau' - t'}{\tau - t} - w\right]. \qquad 1.$$

c' wird $= 1$, wenn die Flüssigkeit m' Wasser ist.

Etwaige Unsymmetrien eliminiren sich am einfachsten durch Vertauschen der Flüssigkeiten und Mittelnehmen aus den beiden gefundenen Resultaten.

Fehlerquellen sind darin gegeben, dafs ein Teil des Stromes von dem Drahte ab durch die Flüssigkeit gehen könnte und dafs

die Temperatur der Drähte, also auch ihr Widerstand, durch verschieden rasche Wärmeabgabe verschieden sein kann. Reines Wasser leitet sehr wenig; ein Abfliefsen des Stromes ist, schon der Polarisation wegen, nicht zu fürchten, wenn die Spannung im Drahte unter 2 Volt bleibt (**80** I). Man nehme die Widerstände nicht zu grofs. — Das Widerstandsverhältnis R/R' der beiden Drähte läfst sich während des Versuches durch Abzweigung (**91**, **92**) ermitteln, oder auch indem die Drähte als Zweige einer Wheatstone'schen Brücke (**93**) angeordnet werden. Man hat dann $(\tau'-t')/(\tau-t)$ mit R/R' zu multipliciren.

Vgl. Müller-Pfaundler Lehrbuch der Physik, 8. Aufl. II, 2. S. 311. Pfaundler, Wien. Sitz. Ber. 1891. 352.

II. Absolute Bestimmung.

Flüssigkeiten. Ein Strom i Am entwickelt in einem Widerstande r Ohm in 1 sec die Wärmemenge $0{,}239 i^2 r$ gr-Kal (Anh. 30). Fliefst der Strom z sec lang durch den Widerstand und erwärmt dabei die Flüssigkeitsmenge m gr um t Grad, so folgt daraus $cmt = 0{,}239 i^2 rz$, also

$$c = 0{,}239 \frac{i^2 r z}{m t}.$$

Man hat also den Versuch so, wie einen der unter I beschriebenen anzustellen, aber mit einem in Ohm bekannten Drahtwiderstande (**80**, I) und unter Messung der Stromstärke, etwa mit einem Weston-Strommesser (**85**, 2), und der Stromdauer. Stromschwankungen eliminirt man durch zeitlich regelmäfsiges Ablesen und Mittelnahme der beobachteten i oder, wenn die Schwankungen grofs sind, von i^2.

Zugleich mufs der Wärmeaustausch mit der Umgebung berücksichtigt werden, genähert etwa durch den Rumford'schen Kunstgriff oder durch das Verfahren im Beispiel S. 183, wobei jedoch die gröfsere Zeitdauer die Schwierigkeit erhöht. Ein gut abgedecktes Dewar'sches Gefäfs (**8**, 30) könnte dies erleichtern; sein Wasserwert für die Füllungshöhe wird freilich, wenn er nicht vor dem Zusammenblasen bestimmt werden kann, empirisch nicht leicht genau zu ermitteln sein.

Die Versuchsdauer läfst sich durch grofse Stromstärke einschränken. Dabei wird aber der Drahtwiderstand unsicher und man mifst statt seiner besser mit einem Spannungsmesser (**101** bis **103**) die mittlere Spannung e an den Drahtenden während des Versuchs in Volt und rechnet

$$c = 0.239 \frac{e i z}{m t}. \qquad 2.$$

Feste Leiter. Über ein Verfahren, welches die in einem Metallcylinder durch einen gemessenen Strom hervorgebrachte zeitliche Temperaturänderung benutzt, vgl. Jaeger u. Diesselhorst, Wiss. Abhandl. der Phys.-Techn. Reichsanstalt, III, S. 269, 1900.

49a. Specifische Wärme. Erkaltungsmethode. (Dulong u. Petit.)

Man vergleicht die Zeiten, in denen Körper unter denselben Umständen sich um gleichviel abkühlen. Höchstens bei Flüssigkeiten oder bei gut leitenden festen Körpern können brauchbare Resultate entstehen.

Ein kleines erwärmtes Gefäfs aus dünnem polirtem Metall mit einem Thermometer und der eingegossenen oder gepulvert fest eingestampften Substanz kühlt sich in einem luftleeren Metall-Behälter ab. Die Umgebung ist durch eine gröfsere Wassermenge oder schmelzendes Eis auf konstanter Temperatur erhalten. Beträchtliche Mengen Flüssigkeit kann man auch in einem geschlossenen Metallgefäfse in der Luft beobachten.

Es sei der Gang des Temperatur-Überschusses über die Umgebung bei der Füllung mit zwei verschiedenen Substanzen beobachtet worden. m und M seien die eingefüllten Mengen, M etwa Wasser, also $C = 1$, w der Wasserwert des Gefäfses mit dem Thermometer (S. 181), z und Z die Abkühlungszeiten von demselben Anfangs- zu demselben Endüberschufs, am besten der Anfangs-Überschufs 2 bis 3mal so grofs als der letzte, c und C die beiden specifischen Wärmen, so gilt $(mc+w):(MC+w)=z:Z$, also

$$c = 1/m \cdot [(MC+w)z/Z - w].$$

Die erste Zeit nach der Erwärmung läfst man vor der Beobachtung verstreichen. Am besten werden jedesmal die Temperaturen von etwa 20 zu 20 sec notirt, mit der Zeit als Abscisse, der Temperatur als Ordinate in einer Kurve dargestellt, und daraus die Zeiten entnommen, welche gleichen Anfangs- und Endwerten entsprechen. Aus einem Paare von Beobachtungsreihen läfst sich so eine Anzahl von Bestimmungen ableiten, aus denen ein Mittel genommen wird. Siehe auch **3**, III.

Man kann auch in zwei möglichst kongruenten Gefäfsen beide Versuche gleichzeitig ausführen. Wiederholt man sie noch unter Auswechselung der Flüssigkeiten und nimmt die Mittel der erhaltenen Zeiträume für jede Flüssigkeit, so wird die Ungleichheit der Gefäfse eliminirt.

50. Specifische Wärme. Eis-Kalorimeter.

Zur Verwandlung der Masseneinheit Eis von 0° in Wasser von 0° werden 80,1 Kal_{15} erfordert (Schmelzwärme des Eises).

1 gr Eis hat das Volumen 1,0908 cm^3, 1 gr Wasser von 0° dagegen

1,0001 cm^3. Wenn das Volumen sich um 1 cm^3 vermindert, so ist also eine Eismenge $1/0{,}0907 = 11{,}03$ gr geschmolzen.

Altes Verfahren. (Lavoisier und Laplace.) Man bringt den auf die Temperatur t erwärmten Körper vom Gewicht m in trockenes Eis von 0°, welches sich selbst in einer Umgebung von schmelzendem Eise befindet. Wird durch den Körper das Gewicht M geschmolzen, so ist seine specifische Wärme

$$c = \frac{M}{m}\frac{80{,}1}{t}. \qquad 1.$$

Um die geschmolzene Menge einigermaſsen genau zu bestimmen, sind wegen der Adhäsion des Wassers am Eise groſse Mengen des Körpers nötig.

Für eine genäherte Bestimmung dient auch ein Eisstück von ebener Oberfläche mit einer Höhlung, in welche der erhitzte Körper eingelegt wird. Während dessen Abkühlung bedeckt man die Platte mit einem ebenen Eisdeckel. Nachher wird das geschmolzene Wasser mit einem kalten Schwämmchen ausgetupft und gewogen. (Black.)

Eiskalorimeter von Bunsen, 1870.

Die geschmolzene Menge Eis wird aus der Volumen-Abnahme v bestimmt, welche beim Schmelzen eintritt. Ist v dadurch bewirkt, daſs m gr eines Körpers sich von t auf 0° abkühlen, so ist nach Obigem die spec. Wärme des Körpers

$$c = \frac{v}{m}\frac{11{,}03 \cdot 80{,}1}{t} = \frac{v}{m}\frac{884}{t}. \qquad 2.$$

Das Bunsen'sche Kalorimeter besteht aus Glasteilen mit dem aufgekitteten eisernen Aufsatz d. Die Teile b, c, d und das Skalenrohr s sind bis zu den punktirten Linien mit Quecksilber gefüllt. Über letzterem befindet sich in b ausgekochtes Wasser; das Eis in demselben wird vor dem Versuche mittels einer in a eingefüllten Kältemischung gebildet.

Zum Gebrauch wird das Instrument mit reinem schmelzendem Eis oder Schnee umgeben, und das Skalenrohr s soweit eingedrückt, ev. mit einem doppelt durchbohrten Hahn der Quecksilberstand so regulirt, daſs die Quecksilbersäule eine hinreichende Länge vor der Teilung hat. Nachdem das Gefäſs a bis α mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit gefüllt worden ist, welche den zu untersuchenden Körper nicht auflöst, erhitzt man diesen (Fig. 2 S. 181), läſst ihn in a hineinfallen (wobei ein Baumwollenpfropf auf dem Grunde des Probirröhrchens dessen

Beschädigung verhindert) und verschliefst a mit einem Kork. Das Quecksilber in s nehme nach dem Zurückgehen um p Sk.-T. einen stationären Stand ein. Ist das Volumen eines Teiles $= A$ (24) und t die Temperatur des Skalenrohres, so ist $v = A(1 - 0{,}00018\, t)\, p$.

Ohne Kalibrirung kann man den Wärmewert K eines Skalenteils folgendermafsen bestimmen. Ein leichtes Glaskügelchen (0,5 bis 1 cm^3), bis auf einen kleinen Ausdehnungsraum mit einer gewogenen Wassermenge gefüllt, mit etwas Platin beschwert, wird zur Temperatur t' erhitzt (S. 181) und eingebracht. w sei die Summe der Wasserwerte (über Glas vgl. 8, 5), p' die erfolgende Skalenverschiebung; dann entspricht dem Zurückziehen des Quecksilbers um 1 Sk.T. die Wärmemenge $K = w\, t'/p'$. — Bewirkt nun ein zur Temp. t erhitzter Körper von m gr bei der Abkühlung p Sk.T. Verschiebung, so ist seine spec. Wärme

$$c = K \cdot \frac{p}{m t}. \qquad 3.$$

Ebenso läfst K sich mittels einer durch einen elektrischen Strom zugeführten bekannten Wärmemenge bestimmen; vgl. **49**, II. Ein Strom von i Am durchfliefse einen durch das Gefäfs a gehenden Drahtwiderstand von r Ohm oder zeige an dessen Enden die Spannung e Volt; in z sec bewirke er die Skalenverschiebung p', so ist $K = 0{,}239\, i^2 r z/p'$ oder $= 0{,}239\, e i z/p'$.

Wägungsverfahren. Anstatt den Quecksilberfaden im Rohre abzulesen, taucht man das ganz gefüllte, geeignet gebogene Rohr in ein Gefäfs mit Quecksilber ein und bestimmt die bei dem Einbringen des warmen Körpers eingesaugte Quecksilbermenge durch Differenzwägung des Gefäfses. 0,01540 gr Quecksilber entsprechen der 15^0-Gramm-Kalorie.

Geringe Verunreinigungen des Schnees oder Eises, womit das Kalorimeter umhüllt ist, genügen, um den Quecksilberstand allmählich zu verschieben. Man beobachtet die Bewegung und setzt dieselbe für die Beobachtungszeit in Rechnung.

Oder man setzt durch Probiren mittels Druckvermehrung,

indem man die Mündung des Quecksilbers hebt, den Gefrierpunkt des inneren Wassers so weit herunter, dafs das Wandern des Fadens aufhört (Dieterici). Das angesetzte Kapillarrohr ist zu diesem Zwecke zweimal gebogen, so dafs man den vorderen horizontalen Teil mit der Ableseskale oder die Mündung mit dem Gefäfs höher oder tiefer stellen kann.

Vgl. Bunsen, Pogg. Ann. 141, 1. 1870; Dieterici, Wied. Ann. 33, 418. 1888; 38, 1. 1889; Schuller und Wartha ib. 2, 359. 1877, wo auch über die Bestimmung chemischer Verbindungswärmen gehandelt wird.

50a. Specifische Wärme. Dampf-Kalorimeter (Joly; Bunsen).

Die Dampfwärme des Wassers, d. h. die Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasserdampf bei ihrer Kondensation zu Wasser von gleicher Temperatur abgibt, ist bei Atmosphärendruck gleich 539 Kal_{15}.

Der Körper m befindet sich, an einer Wage mit einem feinen Drahte aufgehängt, in einem Raum, in welchen man plötzlich durch ein weites Rohr Dämpfe von siedendem Wasser so lange einleitet, bis der Körper sich zur Temperatur des Wasserdampfes erwärmt hat. Die auf dem Körper kondensirte Wassermenge w wird gewogen. Die specifische Wärme ist, wenn der Körper die Anfangstemperatur t_0 hatte und T die Temperatur des Wasserdampfes ist (Tab. 14a),

$$c = \frac{w}{m} \frac{539}{T - t_0}.$$

Der neben dem Aufhängedraht entweichende Dampf wird durch die Wasserluftpumpe oder einen erwärmten Schornstein mittels eines Rohres neben der mit einem durchbohrten Gipspfropf ausgekleideten Öffnung abgesaugt. Gegen Abtropfen von Wasser schützt ein unten an dem Körper befestigtes dünnes Platinblech, dessen eigener Wasserwert von mc abgerechnet wird (48, I; Tab. 11). Vor der Wägung wird der Dampfstrom gemäfsigt, weil er sonst das scheinbare Gewicht beeinträchtigt.

Die Methode mufs mit grofser Umsicht gehandhabt werden, kann dann aber sehr genaue Werte liefern. — Vgl. Joly, Proceed. Roy. Soc. 41, 352. 1886; 47, 218. 1889; Bunsen, Wied. Ann. 31, 1. 1887; Schükarew, Wied. Ann. 59, 229. 1896; ein Vorschlag zu einem Ätherdampfkalorimeter bei Neesen, Wied. Ann. 39, 131. 1890.

51. Andere kalorimetrische physikalische und chemische Messungen.

Thermochemische Messungen. Zur Bestimmung der Wärmetönung bei chemischen Vorgängen eignet sich oft das Eiskalorimeter, in welchem man die auf 0^0 vorgekühlten Körper den chemischen Procefs vollziehen läfst.

Ein einfacherer Apparat ist z. B. der folgende (Nernst). Innerhalb eines weiteren Glases ruht auf Korkschneiden ein gegen ein Liter fassendes Becherglas. Wärmestrahlung wird durch Versilberung der einander zugewandten Flächen eingeschränkt. Ein Dewar'sches Gefäfs (8, 30), dessen Wasserwert durch eine Reaktion von schon bekanntem Zahlenwert in einer gewogenen Wassermenge ermittelt ist, wird am besten sein. Durch einen gut schliefsenden Holzdeckel gehen ein empfindliches Thermometer, ein Rührer und ein dünnwandiges Reagirglas, in welchem die Reaktion vor sich geht. Will man Verdünnungs- oder Lösungswärmen messen, so kommt die Substanz, eventuell fein gepulvert, in den Reagircylinder, dessen Boden nach erfolgtem Temperaturausgleich durchstofsen wird. Man operirt mit kleinen Temperaturänderungen.

Aus den letzteren wird die entwickelte Wärmemenge in folgender Weise berechnet (48 I). Die Flüssigkeitsmenge m im Becherglas habe die spec. Wärme c, der eingebrachte Körper m' habe c'; die Summe der Wasserwerte von Becherglas, Reagirglas, Rührer und Thermometer sei $= w$ (S. 181), die Temperatur steige von t auf τ, dann beträgt die entwickelte Wärmemenge $(cm + c'm' + w)(\tau - t)$. Vorsichtsmafsregeln und Korrektionen wegen Wärmeaustausch treten ebenso herein wie S. 182.

Nernst, Theor. Chemie. 3. Aufl. S. 551. 1900.

Absorptionswärmen von Gasen bestimmt man im Princip ähnlich wie oben, aber anstatt im Becherglase in einem der Spritzflasche ähnlichen Glaskolben, durch welchen das Gas in die Flüssigkeit tritt. Die absorbirte Gasmenge kann durch Volummessung, oder durch Wägung der Flasche vor und nach dem Versuch auf einer empfindlichen Wage, oder durch chemische Analyse bestimmt werden.

Schmelzwärme. Eine geschmolzene Menge m des Körpers von der Temperatur t werde in das Eiskalorimeter (**50**) gebracht. Der Schmelzpunkt sei $= \tau$ (höher als 0^0), die spec. Wärmen im flüssigen und festen Zustand seien bekannt gleich c und c'. Die geschmolzene Menge Eis sei $= M$. Die Schmelzwärme ist dann

$$\varrho = 80{,}1\, M/m - ct + (c - c')\tau.$$

Liegt der Schmelzpunkt unter 0^0, so kann man den Körper fest in das Eiskalorimeter einführen, so dafs er in diesem schmilzt, und dann ähnlich rechnen.

Statt $80{,}1\, M$ kann man setzen $884\, v$, wenn v die Volumänderung durch das Schmelzen des Eises bedeutet (**50**).

Verdampfungswärme. 1. Mit dem Eiskalorimeter. Eine Dampfmenge m von der Siedetemperatur t schmelze bei ihrer Kondensation und Abkühlung auf 0^0 die Eismenge M. Die specifische Wärme der Flüssigkeit sei $= c$. Dann berechnet sich die Dampfwärme $\sigma = 80{,}1\, M/m - ct$. Die Verdichtung des Dampfes geschieht in einem Schlangenrohr mit einem kleinen Kühlgefäfs am Ende. Die Messung ist grofsen Fehlerquellen unterworfen.

Über einen kleinen Dampfwärmemesser mit Wasserkalorimeter s. Berthelot, Thermochem. Mess. S. 63.

2. Elektrisches Verfahren. Vgl. auch **49**. Durch eine abgewogene Flüssigkeitsmenge in einem zunächst verschlossenen Gefäfs ist ein elektrischer Heizdraht geführt, etwa eine geeignet gestaltete kleine Glühlampe. Das Gefäfs ist von siedendem Dampf der gleichen Flüssigkeit umspült und wird zuerst hierdurch bis zur Siedetemperatur erwärmt. Nun wird das Gefäfs geöffnet, und ein Strom von i Am, während die Dampfheizung fortdauert, z sec lang durch den Heizdraht geschickt, und nach dem Erkalten durch Wägung die verdampfte Menge m bestimmt. Der Drahtwiderstand betrage r Ohm, bez. seine Endspannung e Volt. Dann ist

$$\sigma = 0{,}239 \frac{i^2 r z}{m} \text{ bez. } = 0{,}239 \frac{e i z}{m}.$$

Für i (**81** bis **88**) und e (**80**, II; **100**, **101**) werden zeitliche Mittelwerte eingesetzt.

Vgl. Marshall und Ramsay, Phil. Mag. (5) 41, 38. 1896 und 43, 27. 1897, wo Dampfwärmen verschiedener Flüssigkeiten mit einander verglichen werden.

Kalorimetrische Bombe. Die Bombe enthält stark verdichteten Sauerstoff und dient zur Bestimmung der Verbrennungswärme. Der eingebrachte Körper wird durch einen galvanisch glühenden Körper entzündet. Die entwickelte Wärmemenge ergibt sich aus der Temperaturerhöhung eines Wasserbades, in welchem die Bombe sich befindet (**48** I), wobei der Wasserwert der Bombe zu dem des Kalorimeters zu addiren ist.

Genauere Vorschriften: Thomsen, Thermochem. Unters. Leipzig 1882—1886; Berthelot, Thermochem. Messungen, übers. v. Siebert, Leipzig 1893; Hempel, gasanalyt. Methoden, 3. Aufl. S. 375. 1900.

Zur Bestimmung des Heizwertes von Leuchtgas dient das Kalorimeter von Junkers, in dem die Wärme an durchströmendes Wasser abgegeben wird. ZS. f. Instr. 1895, S. 408.

51a. Wärmeleitvermögen.

Wärmeleitvermögen λ (Tab. 11) ist die Wärmemenge (Wasser-gr-Kal.), welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt Eins (1 cm^2) hindurchfliefst, wenn senkrecht zu diesem Querschnitt das Temperaturgefälle Eins stattfindet, d. h. wenn auf der Strecke Eins (1 cm) die Temperaturänderung = Eins (1^0 C) ist. Den gröfsten bekannten Wert hat Silber, zufällig nahe = 1 gr-Kal. $cm^{-1} \cdot Grad^{-1}$. Verunreinigungen können λ stark herabdrücken.

λ nimmt in der Regel mit wachsender Temp. ein wenig ab. Bei den meisten reinen Metallen stehen die L.-V. λ für Wärme und $\varkappa$ für Elektricität genähert in demselben Verhältnis (G. Wiedemann); wird λ in gr-Kal. $cm^{-1} \cdot Grad^{-1}$ und $\varkappa$ in Ohm^{-1} cm^{-1} (**80** I) gemessen, so ist bei Zimmertemperatur ungefähr $\varkappa/\lambda = 6 \cdot 10^5$.

λ geteilt durch Dichte $\times$ sp. Wärme heifst Temperaturleitungskoefficient.

Zur Messung der Temperaturen an bestimmten Orten dienen Thermoelemente (**48** I).

Alte Methode. Vergleichung von Stäben.

Seiner einfachen Hilfsmittel wegen wird das Verfahren (Despretz, Wiedemann) als Übungsaufgabe beschrieben.

Die Stäbe sollen gleichen Querschnitt und gleiche Oberfläche (versilbert oder vernickelt) haben. Man erhitzt (siedendes Wasser) das eine Ende und kühlt (Eis) das andere, bis die Temperaturverteilung stationär geworden ist. In drei vor Strahlung geschützten äquidistanten Querschnitten I, II und III werde der Temperaturüberschufs u_1, u_2 und u_3 über die Umgebung gemessen; wir bezeichnen $\frac{1}{2}(u_1 + u_3)/u_2 = n$.

Dasselbe Verfahren auf einen anderen Stab angewandt ergebe an drei ebensoweit abstehenden Punkten die Temperaturüberschüsse U_1, U_2 und U_3 und $\frac{1}{2}(U_1 + U_3)/U_2 = N$.

Dann verhalten sich die Leitvermögen λ und Λ

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \left[\frac{\log(n + \sqrt{n^2 - 1})}{\log(N + \sqrt{N^2 - 1})}\right]^2.$$

Beweis. Im stationären Zustand empfängt jedes Längenelement dx des Stabes in der Zeiteinheit durch Leitung so viel Wärme, wie es an die Umgebung abgibt. Die letztere Menge ist $\eta \cdot u \cdot dx$, wenn η das auf die Längeneinheit des Stabes bezogene „äufsere Leitungsvermögen" vorstellt. Erstere Menge ist $\lambda \cdot q \frac{d^2u}{dx^2} dx$. η und der Querschnitt q sind für beide Stäbe gleich. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert die Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\eta}{\lambda q} \cdot u = \alpha^2 \cdot u$, wenn $\frac{\eta}{\lambda q} = \alpha^2$ bezeichnet wird. Das allgemeine Integral der Gleichung ist: $u = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$, wo C_1 und C_2 zwei von der Erwärmung der Endflächen abhängige Integrationskonstanten bedeuten. Nennt man u_1, u_2, u_3 die Temperaturen für drei je um die Länge l auseinanderliegende Querschnitte, so findet man durch Einsetzen von x, $x + l$ und $x + 2l$ für x in obige Gleichungen nach Elimination von C_1 und C_2 die Beziehung $e^{\alpha l} + e^{-\alpha l} = (u_1 + u_3)/u_2 = 2n$ (siehe oben). Hieraus folgt

$$e^{\alpha l} = n + \sqrt{n^2 - 1}, \qquad \text{also } \alpha^2 l^2 = \frac{\eta}{\lambda q} l^2 = \left[\log \text{nat}(n + \sqrt{n^2 - 1})\right]^2.$$

Dieselbe Gleichung mit Λ und N für den zweiten Stab aufgestellt und in die erstere dividirt liefert den zu beweisenden Ausdruck.

Die Temperaturen bestimmt man mit Thermoelementen aus ganz feinen zusammengelöteten Drähten (Konstantan — Eisen), deren eine Lötstelle in feine Bohrungen der Stäbe eingesenkt oder auch wohl, durch Gewichtchen an den Drahtenden, auf den Stab aufgedrückt ist, während die anderen Verbindungen in der umgebenden Luft liegen. Vgl. 43 I.

Vgl. noch Wiedemann und Franz, Pogg. Ann. 89, 497. 1853.

Das absolute Leitvermögen kann man bei diesem Verfahren angenähert folgendermafsen auf das äufsere Wärmeleitvermögen η zurückführen. Es folgt aus der letzten Gleichung in obigem Beweise

$$\lambda = \frac{\eta}{q} \frac{l^2}{[\log \text{nat}(n + \sqrt{n^2 - 1})]^2}.$$

Eine genäherte Bestimmung von η/q kann nun so ausgeführt werden: Man erwärmt den Stab gleichmäfsig, legt ihn ebenso hin wie vorher und beobachtet mit dem Thermoelement zu mehreren Zeiten t', $t''\cdots$ die zugehörigen Temperaturüberschüsse u', $u''\cdots$. Die letzteren sollen von der-

selben Gröſsenordnung gewählt werden, wie die u_1, $u_2 \cdots$ oben. Nennt man noch s die Dichtigkeit, c die specifische Wärme des Stabes (Tab. 2 und 11), so ist

$$\frac{\eta}{q} = cs \frac{\log \text{nat}\, u' - \log \text{nat}\, u''}{t'' - t'}.$$

Denn wenn in dem Zeitelement dt die Temperatur sich um du ändert, so ist die hierbei von der Längeneinheit des Stabes abgegebene Wärmemenge einerseits $= \eta u dt$, andrerseits $= -qcs du$. Daraus folgt $qcs \cdot du/u = -\eta \cdot dt$ und das Integral dieser Gleichung $qcs \log \text{nat}\, u = C - \eta t$. Also ist: $qcs(\log \text{nat}\, u' - \log \text{nat}\, u'') = \eta(t'' - t')$, q. e. d.

Absolutes Leitvermögen.

Messungen mit Zeitbestimmung.

Man kombinirt Messungen von örtlichen und zeitlichen Temp.-Änderungen derartig, daſs zwei Gleichungen entstehen, aus denen das innere und äuſsere L.-V. einzeln abzuleiten ist.

a. Der zeitliche Temperaturverlauf wird an zwei Punkten eines Stabes gemessen, der sich abkühlt, nachdem sein eines Ende erwärmt worden war (F. Neumann).

b. Die eine Fläche eines Würfels wird einer plötzlichen dauernden Temperaturänderung ausgesetzt und die Temperatur wird an Punkten im Innern gemessen. Das äuſsere L.-V. hat hier geringen Einfluſs (Kirchhoff u. Hansemann).

c. Ein Stabende oder beide Enden werden periodischen Erwärmungen ausgesetzt; die entstehenden Wärmewellen werden in zwei Querschnitten beobachtet (Angström; H. Weber).

d. Ein Stab wird zeitweilig am einen Ende erwärmt und demnächst sich selbst überlassen. Der Temp.-Verlauf wird sowohl während der Erwärmung wie während der Abkühlung an mehreren Punkten gemessen (Lorenz).

Angström, Pogg. Ann. 114. 513. 1861 und 123, 628. 1864; Heinrich Weber, ebd. 146, 257; Kirchhoff und Hansemann, Wied. Ann. 9, 1. 1880; F. Weber, ebd. 10, 103. 1880; Lorenz, ebd. 13, 422. 1881. Eine Zusammenstellung Holborn u. Wien, ZS. d. Ver. Deut. Ing. 40, 45. 1896.

Vgl. Tab. 11.

Messung mittels des stationären Zustandes bei elektrischer Heizung (F. K.).

Ein konstanter el. Strom durchflieſst einen Metallstab, dessen seitliche Oberfläche gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist, so daſs die Stromwärme durch die in Bädern von konstanter

Temp. befindlichen Enden austreten mufs. Nachdem die Erwärmung stationär geworden ist, mifst man die Unterschiede der Maximaltemperatur in der Stabmitte gegen zwei beiderseitig gleich weit entfernte Punkte und nimmt aus den beiden nahe gleichen Differenzen das Mittel; es heifse U. Aufserdem wird die el. Spannung (Potentialunterschied) V zwischen den beiden äufseren Punkten gemessen; vgl. **101** bis **103**.

Dann ist, wenn $\varkappa$ das el. L.-V., (Beweis s. unten)

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{1}{8}\frac{V^2}{U}.$$

$\varkappa$ ermittelt man gleich bei demselben Versuch als $\varkappa = i \cdot 2l/(qV)$, wo i die Stromstärke, $2l$ der Abstand zwischen den Punkten I und III und q der Querschnitt des Stabes ist. i in Am, V in Vt, l und q durch cm gemessen gibt $\varkappa$ in $\mathrm{Ohm}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$. In dem so berechneten λ ist als Wärme-(Arbeits-)Einheit die Wattsekunde angenommen. Durch Multiplikation mit deren Verhältnis zur gr-Kalorie 0,239 (Anh. 30) wird λ in gewöhnlichem Mafse erhalten.

Beweis der Formel. Das Längenelement dx des Stabes hat den Widerstand $dx/(\varkappa q)$, erhält also in 1 sec die Stromwärme $i^2 \cdot dx/(\varkappa q)$ Wattsec. Durch Wärmeleitung gibt es ab die Wärmemenge $-\lambda q \frac{d^2u}{dx^2} \cdot dx$. Beide Mengen sind im stationären Zustande identisch, also folgt $-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{i^2}{\lambda \varkappa q^2}$ und als erstes Integral $-\frac{du}{dx} = \frac{i^2}{\lambda \varkappa q^2} x + C$ und als zweites $-u = \frac{i^2}{\lambda \varkappa q^2} \cdot \frac{x^2}{2} + Cx + C'$. Werden u und x von dem Maximalpunkt als Nullpunkt gezählt, so ist, weil daselbst $du/dx = 0$ ist, nach der ersten Integralgleichung $C = 0$, und nach der zweiten auch $C' = 0$, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ sein soll. So entsteht $-u = \frac{i^2}{\lambda \varkappa q^2} \cdot \frac{x^2}{2}$, also für jeden der beiden äufseren Punkte die (negative) Differenz gegen die Mitte $U = \frac{i^2}{\lambda \varkappa q^2} \cdot \frac{l^2}{2}$. Der Widerstand zwischen beiden Punkten ist $2l/(\varkappa q)$, also $i = \frac{1}{2} V \varkappa q/l$. Dies eingesetzt kommt $U = \frac{1}{8} \frac{\varkappa}{\lambda} V^2$, q. e. d.

Über die Ausführung, Berücksichtigung der Veränderlichkeit von λ und $\varkappa$, Elimination des Restes äufserer Wärmeleitung vgl. F. K., Ann. d. Physik 1, 145. 1900 und besonders Jaeger u. Diesselhorst, Wiss. Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanst. III, S. 269. 1900.

Wärmestrahlung siehe **72a.**

Elasticität und Schall.

52. Bestimmung des Elasticitätsmoduls durch Ausdehnung.

Der Elasticitäts-Modul oder -Koefficient charakterisirt die elastische Stärke, die Widerstandskraft eines festen Materials gegen Gestaltsänderungen, indem er für einen definirten Fall das Verhältnis der gegen eine Deformation entwickelten Kraft zu der Gröfse der Deformation angibt. Praktisch unterscheidet man den El.-Modul der Ausdehnung und der Torsion. Der erstere, auch El.-Modul schlechthin genannt, bezeichnet die Kraft, welche sich durch eine Abstandsänderung paralleler Schichten entwickelt. Auf die Ausdehnung läfst sich die Biegung zurückführen. Über Torsion vgl. **55**.

Ein Cylinder (Draht, Stab) habe die Länge l, den Querschnitt q; eine ausdehnende Kraft p bewirke eine Verlängerung λ, welche nach dem Aufhören der Kraft wieder verschwinde. Dann ist, wenn man den El.-Modul der Ausdehnung durch E bezeichnet, innerhalb der Proportionalitäts-Grenze

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}p \quad \text{oder} \quad E = \frac{l}{\lambda}\frac{p}{q}.$$

E ist also das Verhältnis der Spannung, welche an einem Cylinder von der Länge und dem Querschnitt Eins angebracht wird, zu der dabei entstehenden Verlängerung; oder auch die Belastung, welche die Länge eines Drahtes vom Querschnitt Eins verdoppeln würde, wenn das anfängliche Verhältnis der Verlängerung zur Belastung bis dahin bestehen bliebe.

Die Gröfse der Zahl E hängt von den Einheiten ab, in denen Querschnitt und Gewicht gemessen werden:

Gewöhnliche technische Definition. Man pflegt den Querschnitt in mm^2, die ausdehnende Kraft in kg-Gewichten zu messen (die Längeneinheit hebt sich heraus); die Einheit ist also das kg-Gew./mm^2. Vgl. Tab. 19.

Elasticitätsmodul $[E]$ im [C.G.S]-System. Betrachtet man gr, kg etc. nicht als Gewichts-, sondern als Masseneinheiten, so ist $g \cdot p$ die dehnende Kraft, wo g die Schwerbeschleunigung bedeutet. Die Krafteinheit des [C.G.S]-Systems, die „Dyne", d. h. das Gewicht der Masse 1 gr an einem Orte, wo die Fallbeschleunigung 1 cm/sec^2 betrüge, ist also $g$mal kleiner und der El.-Modul $g$mal gröfser, als wenn das Gramm als Gewichtseinheit genommen wird. Einen in kg-Gew./mm^2 ausgedrückten El.-modul E hat man also, um den El.-modul $[E]$ im [C.G.S]-System zu erhalten, erstens mit kg/gr $= 1000$, ferner mit $cm^2/mm^2 = 100$ und endlich mit $g = 981$ cm/sec^2, also mit 98100000 zu multipliciren.

$[E]$ geteilt durch die Dichtigkeit gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit in $(cm/sec)^2$. Vgl. **53**.

Gebräuchlich ist die technische Definition.

Über den sog. zweiten El.-Modul vgl. **55**, über Querkontraktion **55** u. **55a**.

B e s t i m m u n g d e s E l a s t i c i t ä t s m o d u l s. Man befestigt das obere Ende des Drahtes oder Stabes an der Wand oder an einer soliden Stütze, belastet das untere Ende wenn nötig zuerst so weit, dafs der Draht ganz gestreckt ist, und mifst seine Länge. Man fügt eine Mehrbelastung p kg des unteren Endes hinzu und bestimmt die dadurch entstehende Verlängerung λ, in derselben Einheit wie l ausgedrückt. q ist der Querschnitt in mm^2 (vgl. unten). Dann hat man

$$E = \frac{l}{\lambda} \frac{p}{q} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Wenn das obere Ende eines dünnen Drahtes als vollkommen fest angenommen werden kann, so mag man die Verlängerung als die Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Ein Nachgeben der oberen Befestigung kann unter Umständen dadurch unschädlich gemacht werden, dafs man dieselbe mittels eines Fadens und einer Rolle durch eine der Belastung nahe gleiche Kraft auch nach oben beansprucht. Sicherer ist es, je eine Marke oben und unten am Drahte anzubringen und deren Verschiebungen durch die Belastung zu bestimmen.

Bei der Längenmessung mit einem auf einem Mafsstabe (Kathetometer **22**) verschiebbaren Mikroskop oder besser mit zwei feststehenden Mikroskopen mit Okularmikrometern (**21**, 4) werden die Marken als feine Querstriche mit dem Diamant oder einer feinen Feile oder auf angeklebtem Papier angebracht.

Die zur Messung angewandte Verlängerung mufs innerhalb der „Elasticitätsgrenze“ bleiben, das heifst, der Draht mufs nach Entlastung die frühere Länge haben, was zu kontroliren ist. Die Elasticitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, dafs man vor den Messungen stärker belastet. — Selbst bei harten Metallen wird man bei der Messung die Hälfte der Belastung, bei welcher das Zerreifsen eintritt, nicht überschreiten. Vgl. Tab. 19.

Q u e r s c h n i t t s m e s s u n g. Der Querschnitt eines Drahtes kann durch Messung des D u r c h m e s s e r s bestimmt werden, wobei man sich für kleine Dicken des F ü h l h e b e l s oder des M i k r o s k o p e s (**21**) bedient. Zweitens aber läfst sich der Querschnitt durch W ä g u n g finden. Ist s (**15** und Tab. 2) die Dichtigkeit der Substanz, wiegen ferner h mm des Drahtes m mg, so ist der Querschnitt $q = m/(hs)$ mm^2.

Um die Genauigkeit zu vergröfsern, beobachtet man bei mehreren Belastungen. Vgl. für die Rechnung mit kleinsten Quadraten **3**, aber auch S. 200.

Beispiel. 2 m eines Eisendrahtes wogen 1310 mg; Dichtigkeit = 7,61, also Querschnitt $q = 1310/(2000 \cdot 7{,}61) = 0{,}0861 \text{ mm}^2$.

Man beobachtete in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge:

Nr.	Belastung.	Länge.	*Nr.*	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 kg
1.	0,5 kg	913,80 mm	*2.*	2,5 kg	914,89 mm	1,09 mm
3.	0,6 „	913,85 „	*4.*	2,6 „	914,96 „	1,11 „
5.	0,7 „	913,90 „	*6.*	2,7 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,8 „	913,98 „	*8.*	2,8 „	915,09 „	1,11 „

Die Verlängerung auf $p = 2{,}00$ kg ist hiernach im Mittel $\lambda = 1{,}102$ mm

Folglich ist der Elasticitätsmodul

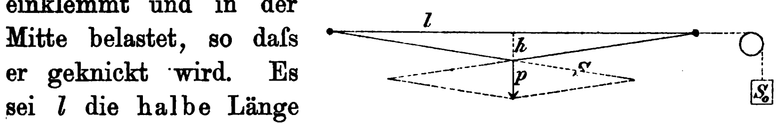
$$E = \frac{l \cdot p}{\lambda \cdot q} = \frac{913{,}8 \cdot 2{,}0}{1{,}102 \cdot 0{,}0861} = 19260 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Im [C.G.S]-System ist dieser Elasticitätsmodul (S. 197)

$$[E] = 19260 \cdot 98100000 = 1890 \cdot 10^9 [\text{cm}^{-1} \text{ gr sec}^{-2}].$$

Verkürzungsmoduln werden im Princip ebenso, aber an dicken Stäben und mit entsprechend grofsen Belastungen von oben gemessen.

Bestimmung mittels Knickung gespannter Drähte. Die Verlängerungen dünner Drähte lassen sich bestimmen, indem man den horizontal gespannten Draht an den Enden fest einklemmt und in der Mitte belastet, so dafs er geknickt wird. Es sei l die halbe Länge des Drahtes. S_0 bezeichne die ursprüngliche Spannung, h die durch die Belastung p bewirkte Senkung.



1. Wenn S_0 bekannt ist, nämlich als Gewicht über eine Rolle (Fig.), welches das eine Drahtende spannte, als dieses (ohne Verschiebung!) eingeklemmt wurde, so wird

$$E = \frac{1}{h^2}\left(p\frac{l}{h} - 2S_0\right) \cdot \frac{l^2}{q}. \tag{1}$$

2. Die ursprüngliche Spannung sei unbekannt. Man beobachtet eine zweite Senkung h' durch die Belastung p' und rechnet

$$E = \frac{p'/h' - p/h}{h'^2 - h^2} \cdot \frac{l^3}{q}. \tag{2}$$

Für gröfsere Senkungen ist Ausdruck 2 mit $1+3(h^2+h'^2)/(4l^2)$ zu multipliciren. — Die beiden p/h sind wenig verschieden, so dafs h und h' genau beobachtet werden müssen.

Beweis. λ ergibt sich aus $(l+\lambda)^2 = l^2 + h^2$, wenn λ^2 vernachlässigt wird, $\lambda = \frac{1}{2}h^2/l$. Die Längsspannung S des Drahtes durch p ist $S = p \cdot l/2h$, also $E = (S - S_0)l/(\lambda q) = (pl/2h - S_0)2l^2/(h^2 q)$, q. e. d. Denselben Ausdruck mit p' und l' zum Eliminiren von S_0 benutzend erhält man Gl. 2.

Wegen der elastischen Nachwirkung (**55b**) wachsen die Verlängerungen mehr oder weniger — bei Stahl am wenigsten — mit der Zeit. Man pflegt die Belastungen thunlichst kurze Zeit wirken zu lassen; die kleine Temperaturänderung, welche die Ausdehnung begleitet, hat keinen merklichen Einflufs. Streng genommen hat man zwei Elasticitätsmoduln bei kurzer und bei andauernder Belastung zu unterscheiden, von denen der letztere bis zu 2% kleiner sein kann.

Abweichungen von der Proportionalität der Deformation mit der Belastung. Die Ausdehnung homogenen Materials wächst in Wirklichkeit mehr oder weniger beschleunigt mit der Belastung. Man kann sie genähert darstellen durch

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}(p + A \cdot p^2) \quad \text{oder noch besser} \quad \lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}\frac{p}{1 - A \cdot p},$$

wo E den El.-Modul für kleine Belastung darstellt. Kleine Ausdehnungen können um Procente gröfsere Elasticitätsmoduln ergeben, als sehr grofse, woraus also eine Unsicherheit entspringt.

Vgl. die Versuche von J. O. Thompson, Wied. Ann. 44, 555. 1891; Bach, Elasticität u. Festigkeit, 3. Aufl. S. 11ff., 1898. Über verschiedene Formeln: Mehmke, ZS. f. Math. u. Phys. 1897. — Auf Gufseisen wird hier die Formel $\lambda = C \cdot p^n$ angewandt, die aber mit einer konstanten Schallgeschwindigkeit für kleine Schwingungen im Widerspruch stehen würde.

Über Krystall-Elasticität und ihre Literatur s. W. Voigt, die physikal. Eigenschaften der Krystalle, Leipz. 1898.

53. Elasticitätsmodul aus Längsschwingungen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u einer elastischen Verdichtungswelle ist, wenn $[E]$ in [C. G. S]-Einheiten gemessen wird, in cm/sec gegeben durch $\sqrt{[E]/s}$, also für das gewöhnliche, in kg-Gew./mm² gemessene E durch $\sqrt{98100000 \cdot E/s}$. In m/sec ausgedrückt wird die Geschwindigkeit 100mal kleiner, also gleich $\sqrt{9810 \cdot E/s}$.

Eine Wellengeschwindigkeit u kann man aus der Wellenlänge λ und der Schwingungszahl N als $u = \lambda \cdot N$ berechnen.

Schwingt ein an den Enden freier Stab mit einem Knoten oder ein an den Enden geklemmter Draht mit einem Bauch in der Mitte, so ist seine Länge l gleich einer halben Wellenlänge. Aus der Schwingungszahl N des Tons findet sich also $u = 2l \cdot N$.

Ein in der Mitte gehaltener Stab oder ein an beiden Enden eingeklemmter gespannter Draht von der Länge l m werde zum Ansprechen seines longitudinalen Grundtones gebracht, indem man den Stab am einen freien Ende, den Draht in der Mitte reibt. N sei die Tonhöhe d. h. Schwingungszahl/sec (vgl. **57** und Tab. 21). Dann ist nach dem Obigen der Elasticitätsmodul E

$$E = \frac{u^2 s}{9810} = \frac{4 N^2 l^2 \cdot s}{9810} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Die Longitudinalschwingungen werden durch Reiben mit einem wollenen Lappen erzeugt, der für Metall oder Holz mit Kolofonium eingerieben, für Glas angefeuchtet worden ist.

Die Tonhöhe wird durch Vergleichung mit einer bekannten Stimmgabel ermittelt. Das ungenaue Schätzen von Tonintervallen kann man durch die Einführung eines Monochords auf eine Längenvergleichung zurückführen (**57**, 3). Es ist oft schwierig, die Oktave zu bestimmen, in welcher die sehr hohen Töne liegen. Ein derartiger Fehler wird leicht bemerkt, weil er das Resultat immer mindestens viermal zu klein oder zu grofs werden läfst.

Über die Bestimmung der Tonhöhe aus Staubfiguren vgl. **56**, über graphische Bestimmung **57**.

Die aus der Tonhöhe bestimmten Elasticitätsmoduln können etwas anders ausfallen, als die durch Verlängerung bestimmten, erstens wegen der Erwärmung bez. Abkühlung bei der Zusammendrückung bez. Ausdehnung, und zweitens, weil zwischen der Belastung und der Längenbestimmung Zeit verstreicht, während deren eine kleine Ausdehnung vermöge der elastischen Nachwirkung hinzutritt (vgl. vor. S. und **55b**).

Beispiel. Der Eisendraht von S. 199 gab bei der Länge $l = 1{,}361$ m den Longitudinalton ais_3. Zu diesem findet sich aus Tab. 21 die Schwingungszahl $N = 1843$. Das specifische Gewicht $s = 7{,}61$ gesetzt, wird

$$E = \frac{4 \cdot 1843^2 \cdot 1{,}361^2 \cdot 7{,}61}{9810} = 19520 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

54. Elasticitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

Ein rechteckiger, am einen Ende horizontal fest eingeklemmter Stab von der Länge l, der Höhe a und der Breite b, alles in mm gemessen, erfährt durch eine Belastung von p kg am freien Ende eine Senkung h

$$h = \frac{4}{E}\frac{l^3}{a^3 b} p \text{ mm}.$$

Bei kreisförmigem Querschnitt vom Halbmesser r ist statt $a^3 b$ zu setzen $3r^4\pi$ oder $3q^2/\pi$, wenn $q = r^2\pi$ den Querschnitt bedeutet. Für einen beliebigen Querschnitt ist maſsgebend sein „Trägheitsmoment K, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Horizontale", wobei man ihn als eine Platte auffaſst, deren Flächeneinheit die Masseneinheit besitzt; z. B. für das obige Rechteck $K = ab \cdot \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{12}a^3 b$, für den Kreis $K = r^2\pi \cdot \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}r^4\pi$ (**29** I). Vorausgesetzt, daſs die Horizontale eine Hauptaxe des Trägheitsmoments ist, gilt dann

$$h = \frac{1}{3}\frac{1}{E}\frac{l^3}{K} p.$$

h ist stets von der Gestalt aus zu rechnen, welche der, etwa durch Eigengewicht schon etwas gebogene Stab ohne Belastung hat.

Ein beiderseitig aufgelegter, in der Mitte belasteter Stab erfährt eine 16mal kleinere Durchbiegung als die obige; vgl. S. 204.

I. Geklemmter Stab. Man klemmt einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachtet die Stellung des freien Endes an einem vertikalen Maſsstab (Spiegelteilung dicht dahinter; Kathetometer). Eine Belastung des freien Endes durch p kg bewirke eine Senkung um h mm. Der rechteckige Querschnitt habe die Höhe a und die Breite b; die freie Länge des Stabes sei $= l$, alles in mm. Dann ist der Elasticitätsmodul (Beweis S. 204)

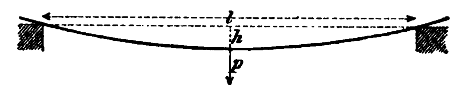
$$E = 4\frac{l^3}{a^3 b}\frac{p}{h}.$$

Über andere Querschnitte vgl. oben.

Eine Schwierigkeit bietet die Herstellung einer hinreichend festen Klemmung.

Dünne Drähte. Die Methode ist sehr gut auf dünne Drähte anwendbar, die man in einen Schraubstock klemmt. Über die Bestimmung von r vgl. S. 198. Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt werden durch eine zweite Bestimmung eliminirt, bei der man den Draht um 90^0 gedreht hat.

II. Aufgelegter Stab. Die Schwierigkeit der festen Einklemmung wird vermieden, indem man den Stab mit seinen Enden auf zwei feste Unterlagen lose auflegt. Deren Abstand von einander sei gleich l. Eine



Belastung p der Stabmitte bringe daselbst die Senkung h hervor (Spiegelmaſsstab; Kathetometer), so ist

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{p}{h}.$$

Spiegelung. Weit genauer wird statt der Senkung der Mitte die Neigung der Enden gemessen (Kirchhoff, Pscheidl). Die Belastung p der Mitte bewirke den Neigungswinkel φ eines Endquerschnittes, so ist

$$E = \frac{3}{4} \frac{l^2}{a^3 b} \frac{p}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

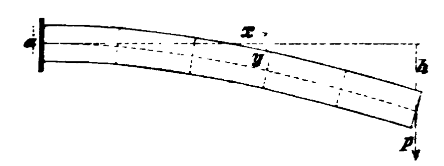
Zur Messung von φ verbindet man mit dem Ende einen kleinen vertikalen Spiegel und beobachtet dessen Drehung mit Fernrohr und vertikaler Skale (25). Besser ist die Beobachtung beider Enden und die Mittelnahme. Statt dessen kann man 2 Spiegel an beiden Enden gegeneinander richten, aber etwas schief stellen, so daſs das Licht der Skale von dem einen zum anderen Spiegel und von da ins Fernrohr geworfen wird (A. König, Wied. Ann. 28, 108. 1886). Fernrohr und Skale stehen jetzt natürlich einander gegenüber. A sei der Abstand der Skale von ihrem Spiegel, d der gegenseitige Abstand der Spiegel, beide in Skalenteilen gemessen. n bedeute den beobachteten Ausschlag. Dann kann hinreichend genau gesetzt werden $\operatorname{tg} \varphi = n/(4A + 2d)$.

Die Formeln setzen relativ zur Länge kleine Senkungen voraus. — Man hat sich auch hier zu überzeugen, daſs nach Entfernung des Gewichtes die frühere Gestalt sich herstellt. — Kleine Querschnitte werden durch Wägung bestimmt (S. 198).

Wenn die Höhe a des Stabes nicht gegen die Länge l zu vernachlässigen ist, so ist das nach den obigen Formeln berechnete E noch zu multipliciren mit $1 + 3a^2/l^2$.

Vgl. Koch, Wied. Ann. 5, 353. 1878.

Beweise für rechteckigen Querschnitt. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern gedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht behält ihre Länge. Es seien vom Befestigungspunkte an gerechnet, x die horizontale, y die vertikale Koordinate eines Punktes dieser „neutralen" Schicht, so wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Punkte durch d^2y/dx^2 dargestellt, da die Neigung klein vorausgesetzt wird. Es sei nun s der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht, nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältnis $s \cdot d^2y/dx^2$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke ds sucht sich also mit der Kraft $Esb \cdot ds \cdot d^2y/dx^2$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+s$ und $-s$ zusammen ein Drehmoment $2Ebs^2 \cdot ds \cdot d^2y/dx^2$. Das von einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehmoment ist also



$$2Eb\frac{d^2y}{dx^2}\int_0^{a/2} s^2 ds = Eb\frac{a^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dieses elastische Drehmoment mufs dem von dem angehängten Gewicht an diesem Querschnitt ausgeübten Moment $p(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12}{E}\frac{p}{a^3b}(l-x), \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = \frac{12}{E}\frac{p}{a^3b}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \text{ und}$$

$$y = \frac{12}{E}\frac{p}{a^3b}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Hieraus ergibt sich die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ und die Senkung h am Ende $(x = l)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{E}\frac{pl^2}{a^3b}, \quad y_l = h = \frac{4}{E}\frac{pl^3}{a^3b},$$

für den einseitig geklemmten Stab.

Da ferner ein Stab, wenn er an den Enden lose aufliegt, angesehen werden kann, wie wenn er an jedem Ende durch die Kraft $\frac{1}{2}p$ hinaufgezogen würde, in der Mitte aber geklemmt wäre, also die wirksame Länge $\frac{1}{2}l$ betrüge, so wird die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ 8 mal, die Senkung 16 mal kleiner als $\operatorname{tg}\varphi$ und obiges h.

55. Torsionsmodul.

An einem einseitig geklemmten cylindrischen Stabe oder Drahte von der Länge l und dem Halbmesser r bewirkt ein Drehmoment P am freien Ende eine Verdrehung desselben um den Winkel

$$\alpha = \frac{1}{[F]}\frac{2}{\pi}\frac{l}{r^4}P. \tag{1}$$

Wenn l, r und P in [C.G.S]-Einheiten gemessen sind, bedeutet $[F]$ den Torsionsmodul in diesem System. α wird in absolutem Mafse erhalten, d. h. $\alpha \times 57{,}30$ gibt z. B. den Verdrehungswinkel in Graden (Anh. 13).

Die „Direktionskraft“ eines solchen Drahtes ist nach Gl. 1 (vgl. Anh. 11 a) $D = \frac{P}{\alpha} = \frac{\pi}{2}[F]\cdot\frac{r^4}{l}\cdot$ Folglich ist die Torsionsschwingungsdauer t einer Masse vom Trägheitsmoment K[cm²gr] an diesem Drahte (vgl. Anh. 12) in sec gegeben durch $t^2 = \pi^2\frac{K}{D} = \frac{1}{[F]}2\pi K\frac{l}{r^4}\cdot$ Aus der beobachteten Schwingungsdauer ergibt sich also

$$[F] = 2\pi\frac{K}{t^2}\frac{l}{r^4}[\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathrm{sec}^{-2}]. \qquad (2)$$

Der in kg-Gew./mm² gemessene Tors.-M. ist (S. 197) $F = \frac{1}{98100000}\cdot[F]$. Statt dessen kann man gleich l und r in mm und K in kg·mm² messen, dann kommt, wenn $g = 9810\,[\mathrm{mm}\cdot\mathrm{sec}^{-2}]$ gesetzt wird,

$$F = \frac{2\pi}{g}\frac{K}{t^2}\frac{l}{r^4}.$$

Bestimmung durch Schwingungen (Coulomb 1784).

Man belastet einen vertikalen, oben geklemmten Draht von der Länge l mm und dem Halbmesser r mm (**21**, 4 u. S. 198) mit einer Masse, z. B. mit einer abgedrehten Scheibe, vom Trägheitsmoment K kg·mm², versetzt diese in Torsionsschwingungen, deren Dauer t in sec beobachtet wird (**28**), dann ist der Torsionsmodul F aus obiger Formel zu berechnen, oder, da $2\pi/9810 = 0{,}0006405$ ist,

$$F = 0{,}0006405\,\frac{K}{t^2}\frac{l}{r^4}\,\text{kg-Gew./mm}^2.$$

Für einen Cylinder (Kreisscheibe) vom Radius R und der Masse M mit vertikaler Axe ist (**29**, I) $K = \frac{1}{2}MR^2$.

Bestimmung durch Verdrehungen.

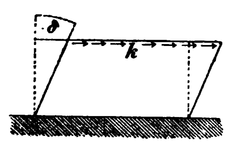
Wenn ein Drehmoment von p kg-Gewichten am Hebelarm a mm am einen Ende des Drahtes wirkend daselbst eine Drehung um b Bogengrade bewirkt, so ist

$$F = \frac{2}{\pi}\frac{l}{r^4}ap\,\frac{57{,}3}{b}.$$

An feinen Drähten zeigen sich erfahrungsgemäſs Abweichungen von dem Coulomb'schen Gesetz bis zu reichlich $\pm 5\%$. Vgl. Baumeister, Wied. Ann. 18, 578. 1883.

Das Verhältnis F/E hängt nach der Theorie mit der Querkontraktion zusammen, welche die Ausdehnung eines Stabes begleitet. Im Mittel ist $F = \frac{2}{5}E$.

Erläuterung. Torsions- oder Gleit-Modul oder zweiter Elasticitätsmodul F. Eine Platte von der Flächeneinheit sei in ihrer natürlichen Gestalt rechteckig. Die Grundfläche werde befestigt; an der gegenüberliegenden Ebene wirke in der Richtung dieser Ebene eine Kraft k, gleichförmig über diese ganze Fläche verteilt. Dadurch werden die Plattenschichten aneinander verschoben und die vorher normale Linie wird jetzt mit der Normalen einen kleinen Winkel δ bilden. Dann ist F das Verhältnis der Kraft k zu diesem Winkel, also $k = F\delta$.



Torsions-Drehmoment. Man denkt sich den Draht in dünne koncentrische Röhren zerlegt, von denen eine den inneren und äußeren Halbmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ habe. Auf dem Umfange dieser Röhre sei eine vertikale Gerade gezogen. Drehen wir nun den untersten Querschnitt um den Winkel φ, so wird diese Linie in eine Schraubenlinie verwandelt, welche gegen die Vertikale die Neigung $\varphi\varrho/l$ hat. Dies ist also unser Verschiebungswinkel δ der Schichten gegeneinander. Somit wird die Torsionselasticität den untersten Querschnitt $2\pi\varrho d\varrho$ der Röhre mit einer Kraftsumme $F \cdot 2\pi\varrho d\varrho \cdot \varphi\varrho/l$ in seine frühere Lage zurückzudrehen suchen. Da ϱ der Halbmesser der Röhre, so gibt diese Kraft das Drehmoment $2\pi F\varrho^3 d\varrho \cdot \varphi/l$.

Ein solches Moment erfährt aber jede Röhre in ihrem Endquerschnitt, so daſs das ganze Drehmoment eines Drahtes von der Länge l und dem Halbmesser r bei einem Torsionswinkel φ beträgt:

$$2\pi F \frac{\varphi}{l}\int_0^r \varrho^3 d\varrho = F\frac{\pi r^4}{2l}\cdot\varphi.$$

Mit Hilfe von Anh. 11a und 12 ergibt sich hieraus die Schwingungsdauer t, wobei aber zu beachten ist, daſs zu dem Drehmoment der Faktor g hinzutritt, wenn man, wie bei der Elasticität, die Kräfte in Gewichten ausdrückt.

Verhältnis von F zu E. Nach der Theorie (Poisson) ist $F = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\mu}$, wenn μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung bedeutet (**55a**). Da $0 < \mu < \frac{1}{2}$, so ist also $\frac{1}{2}E > F > \frac{1}{3}E$; für den Mittelwert $\mu = \frac{1}{4}$ gilt $F = \frac{2}{5}E$. Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der Elasticität, §§ 3 u. 92.

55a. Bestimmung der Elasticitätszahl (Querkontraktion) μ.

Die elastische Ausdehnung durch einseitigen Zug ist in der darauf senkrechten Richtung von einer Kontraktion begleitet, die der Ausdehnung proportional ist. Bedeutet an einem Stabe λ die Vergröſserung der Länge l und δ die damit verbundene Verkürzung des Durchmessers d, so ist also $\frac{\delta}{d} : \frac{\lambda}{l} = \mu$ für einen bestimmten Stoff eine Konstante (Poisson), deren Zahlenwert jedenfalls zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen muſs. Erfahrungsgemäſs liegt er, z. B. bei Glassorten, meist zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$.

Volumänderung durch elastische Verlängerung. Das Volumen v eines Stabes ist proportional $l \cdot d^2$, die Änderungen φ, λ und $-\delta$ stehen also (S. 6) in der Beziehung $\frac{\varphi}{v} = \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\delta}{d} = \frac{\lambda}{l}(1 - 2\mu)$. Den Grenzfällen $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = 0$ entsprechen also die Volumänderungen $\varphi = 0$ und $\varphi : v = \lambda : l$.

I. Aus dem Verhältnis der Elasticitätsmoduln der Ausdehnung E und der Torsion F.

Nach dem vor. S. erwähnten Satze $F = \frac{1}{2}E/(1 + \mu)$ ist

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{E}{F} - 1.$$

II. Aus der Volumänderung bei einseitigem Zug.

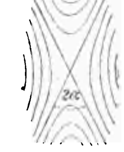
Nur auf Körper von starker elastischer Ausdehnung anwendbar, wie Kautschuk. Man dehnt innerhalb eines Dilatometers in einer Flüssigkeit. Entspricht der relativen Verlängerung λ/l, die rel. Volumvermehrung φ/v, so ist (vgl. oben)

$$\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi}{v}\frac{l}{\lambda}\right).$$

III. Aus der Oberflächengestalt eines gebogenen Stabes (Cornu).

Biegt man eine ebene prismatische Platte so, wie in der Figur, so bewirken die durch die Querkontraktion auftretenden Zugkräfte in der oberen ausgedehnten Hälfte und die Druckkräfte in der unteren Hälfte (vgl. S. 204) eine sattelförmige Oberflächengestalt. Der Hauptkrümmungshalbmesser der primären Biegung geteilt durch den der Querbiegung gibt direkt die Gröfse μ.

Die obere Fläche sei eben polirt. Man bedeckt sie mit einer parallelen ebenen Glasplatte. Durch die Gestaltsänderung entstehen zwischen beiden Platten Interferenzstreifen (**66**, V), die zwei Systemen von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten angehören. Bezeichnet 2α den nach der Querrichtung der Platte offenen Winkel der Asymptoten, welcher bei senkrechter Beobachtung erscheint, so ist



$$\mu = \mathrm{tg}^2\alpha.$$

Cornu, C. R. 69, 333. 1869; über die zur Ausführung dienende Anordnung und die Winkelmessung mit dem Dove'schen Reflexionsprisma (**70a**) vgl. Straubel, Wied. Ann. 68, 369. 1899.

55b. Elastische Nachwirkung (W. Weber 1841.)

Elastische Deformationen vollziehen sich nur zu einem Teile sofort; ein Rest, die „Nachwirkung", folgt langsamer. Derselbe ist nach der Substanz verschieden grofs. Bei Stahl und Quarz ist er sehr klein, erreicht aber bei Metallen und Gläsern auch wohl 5%, bei organischen Körpern, wie Cocon oder Kautschuk 30%, ja in niederer Temperatur die gröfsere Hälfte der Deformation.

Nachwirkungserscheinungen zeigen sich auch an anderen Molekularvorgängen, wie an der Wärmeausdehnung, insbesondere auch als elektrischer Rückstand und als Magnetisirungsnachwirkung.

Man hat diese langsam verschwindenden Abstände von neuen Gleichgewichtslagen zu unterscheiden von dauernden Änderungen, die bei der Überschreitung von Elasticitätsgrenzen etc. stattfinden und mit denen sie sich oft vermischen.

Nachwirkung nach Deformationen. Diese ist am leichtesten zu beobachten. Die natürliche Gestalt eines Körpers, der ausgedehnt, gebogen, tordirt gewesen war, stellt sich erst mit der Zeit wieder her.

Es sei s die zur Zeit t nach dem Aufhören der die Gestalt ändernden Kräfte noch bestehende Deformation. Die Annäherung an die natürliche Gestalt vollzieht sich mit einer Geschwindigkeit $-ds/dt$, welche, falls die primäre Deformation kurz gedauert hatte, dem Gesetz folgt (F. K.)

$$-\frac{ds}{dt} = a\frac{s}{t}, \quad \text{also } s = \frac{c}{t^a}. \qquad \text{I.}$$

Nur für die ersten, der Beobachtung nicht zugänglichen Bruchteile von Sekunden gilt die Formel nicht. a, welches die Geschwindigkeit des Verschwindens der Nachwirkung bedingt, ist für dieselbe Art von Deformationen an demselben Körper nahe konstant; es wurde, t nach Minuten gerechnet, an verschiedenen Körpern bei verschiedenen Vorgängen zwischen $\frac{1}{8}$ und 1 gefunden. c, d. h. die zur Zeit 1 noch vorhandene Nachwirkung, ist der Gröfse der vorangegangenen Deformation bei gleicher Dauer derselben nahe proportional und wächst mit der Dauer.

Hatte die primäre Deformation aber länger gedauert, so gilt

$$-\frac{ds}{dt} = a\frac{s}{t^n}, \quad \text{also } s = C\cdot e^{-p\cdot t^m}, \qquad \text{II.}$$

wenn $p = a/(1-n)$ und $m = 1-n$ ist. m wächst mit der Dauer der vorangegangenen Gestaltsänderungen von sehr kleinen Werten allmählich an, aber erfahrungsmäfsig nicht über $\frac{1}{3}$.

Nach denselben Ausdrücken vollzieht sich die langsame Annäherung an ein neues elastisches Gleichgewicht, welches durch eine konstante deformirende Kraft schliefslich bewirkt wird, oder an die von dem Körper schliefslich ausgeübte elastische Kraft, die einer konstanten Deformation entspricht.

F. K., Pogg. Ann. 119, 337. 1862; 128, 1. 1866; 158, 337. 1876.

Genähert lassen sich auch, z. B. an Glas, manche Nachwirkungen, die einer Deformation S von der Dauer T folgen, zur Zeit t nach dem

Aufhören ausdrücken (Boltzmann) durch $c \cdot S \cdot \lg(T+t)/t$. Wenn umgekehrt zur Zeit Null eine konstant bleibende Deformation plötzlich eintritt, so gilt für die elastische Kraft zur Zeit t genähert der Ausdruck $P(1-c \lg t)$, wo P die Kraft zur Zeit 1 bedeutet und c in beiden Ausdrücken für denselben Körper und für die gleiche Art von Deformation denselben Wert hat.

Boltzmann, Pogg. Ann. Erg. VII, 624. 1876; F. K., ib. 160, 225. 1877; Austin, Wied. Ann. 50, 659. 1893. — S. auch Braun, Pogg. Ann. 159, 337. 1876.

Nachwirkungen können lange Zeiten, selbst Monate dauern.

Um die Gröfse und Hartnäckigkeit der Nachwirkung zu bezeichnen, lasse man eine Deformation S 1 min lang bestehen und beobachte dann die Nachwirkung. Aus zwei Beobachtungspaaren $t_1\, s_1$ und $t_2\, s_2$ kommt in Formel II $a = \frac{\log s_1 - \log s_2}{\log t_2 - \log t_1}$ und $c = t_1^a \cdot s_1$ oder $= t_2^a \cdot s_2$. Graphische Darstellungen sind nützlich. c/S gibt die relative Gröfse der Nachwirkung zur Zeit Eins. $1/a$ bezeichnet die Hartnäckigkeit.

Bei Körpern mit geringer Nachwirkung mufs die Deformation vielleicht längere Zeit (10 min) bestehen, um eine Nachwirkung von ausreichender Gröfse zu geben. Dann gilt aber im Allgemeinen der Wert $n = 1$ nicht mehr, sodafs man die umständlichere Formel I nehmen mufs.

Die Temperatur hat einen beträchtlichen Einflufs. Bei harten Körpern steigert sie die anfängliche Gröfse der Nachwirkung aber auch die Geschwindigkeit ihres Verschwindens. Bei Kautschuk ist die Nachwirkung in niederer Temperatur gröfser.

Die Beobachtung ist für Torsion unter Anwendung der Spiegelablesung (25) einfach. Man dämpft den an den Draht gehängten Körper von kleinem Trägheitsmoment mit leichtem Spiegel durch einen Flügel in Flüssigkeit oder einen Luftdämpfer (8, 29) und erteilt die Drehungen oben oder unten. Ähnlich werden Biegungsnachwirkungen an eingespannten Stäben leicht wahrgenommen. Für genaue Längsnachwirkungen an Metallen werden sehr lange Drähte, empfindliche Ablesungsvorrichtungen und endlich, um die Wärmeausdehnung in Rechnung zu setzen, genaue Temperaturbeobachtungen gefordert.

Die Gefahr, dafs zugleich dauernde Gestaltsänderungen eintreten, wird verringert, wenn man früher bereits eine gröfsere Deformation in gleichem Sinne erteilt hatte.

56. Messung von Wellenlängen; Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

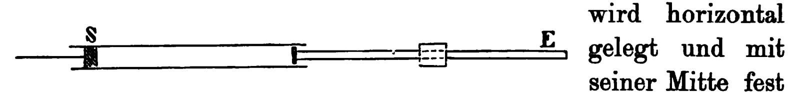
Die Schallgeschwindigkeit in trockner atmosphärischer Luft von der Temperatur t beträgt $u = 331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}00367\, t}$ m/sec; auf mittlere Luftfeuchtigkeit wird für Zimmertemperatur näherungsweise Rücksicht genommen, indem man 0,004 statt 0,00367 setzt (18). Vgl. ferner 53.

Zwei gegen einander laufende gleiche Wellenzüge erzeugen stehende Wellen von einem Knotenabstand gleich der halben Wellenlänge.

I. Staubfiguren (Kundt, 1866).

1. Schallgeschwindigkeit in festen Körpern.

Diese läfst sich für Stäbe oder Röhren, die man longitudinal anreibt, anstatt (53) auf die Schwingungszahl, auf den obigen Ausdruck zurückführen, indem die Wellenlängen desselben Tones in der Luft und in dem Stabe verglichen werden. Der Stab wird horizontal gelegt und mit seiner Mitte fest



eingeklemmt. Das eine Ende E wird longitudinal gerieben (S. 201), das andere ragt in eine, mindestens 25 mm weite (vgl. f. S. unten), am hinteren Ende durch einen dicht schliefsenden verschiebbaren Stöpsel S verschlossene, gereinigte und getrocknete Glasröhre, die ein wenig Lycopodiumsamen oder Korkstaub oder Kieselsäure enthält. Beim Anreiben des Stabes erzeugen die Stöfse des freien Endes in der Glasröhre stehende Luft-Schwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet man leicht die richtige Stellung, bei der nämlich das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht. Man kann auch die Röhre bei S fest verschliefsen und anstatt des Stöpsels die ganze Röhre verschieben. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt klebt man, um das Übertragen der Stöfse an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe.

Ist l der Abstand benachbarter Knotenpunkte von einander, d. i. die halbe Länge der Welle in der Luft, L die Länge des geriebenen Stabes, d. i. die halbe Länge seiner Welle (vgl. 53), so verhält sich die Schallgeschwindigkeit im Stabe $U : u = L : l$, also ist

$$U = 331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}004\, t} \cdot \frac{L}{l} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Der Elasticitätsmodul ergibt sich dann (**53**)

$$[E] = U^2 s\,[\mathrm{C.G.S}] \quad \text{oder} \quad E = \frac{U^2 s}{9810}\,\frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2},$$

wo s die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

Um eine genaue Länge der Staubwelle zu erhalten, mifst man den Abstand eines Paares (oder mehrerer Paare) von Knoten, die weiter aus einander liegen, und dividirt ihn durch die Anzahl der zwischenliegenden Wellen. Über Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. **3**, II.

Beispiel. Ein 900 mm langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Länge der Staub-Halbwellen $l = 62{,}9$ mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase betrug also $331\sqrt{1+0{,}004\cdot 17}\cdot 900/62{,}9 = 4890$ m/sec; der Elasticitätsmodul des Glases, dessen Dichte $= 2{,}7$ war (**15**, B 1 oder 3),

$$E = 4890^2\cdot 2{,}7/9810 = 6580 \text{ kg-Gewicht/mm}^2.$$

Längere Stäbe kann man, anstatt in der Mitte, auch in $\frac{1}{4}$ vom Ende klemmen und in der Mitte reiben, dann ist die Wellenlänge im Stabe gleich der ganzen Stablänge, also das wie oben berechnete U durch 2 zu dividiren.

2. Schallgeschwindigkeit in Gasen.

Diese ist in cm/sec gegeben (Laplace, 1816) durch

$$u^2 = k\frac{\Delta}{s},$$

wenn s das spec. Gewicht, Δ der in C. G. S.-Einheiten gemessene Druck des Gases und k das Verhältnis c_p/c_v der spec. Wärme c_p bei konstantem Druck zu c_v bei konstantem Volumen bedeutet. Ist h der in cm Quecksilber (0°) gemessene Druck, so ist (vgl. Anh. 8) $\Delta = 13332\,h$. Wenn ferner s_0 das spec. Gewicht bei 0° und 1 Atm., d. h. wenn ($\alpha = 0{,}00367$) $s = s_0 \dfrac{h}{76}\dfrac{1}{1+\alpha t}$, so wird also, u in m/sec gemessen,

$$u^2 = 101{,}32\cdot k\cdot\frac{1+\alpha t}{s_0}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right)^2. \qquad 1.$$

Für zwei Gase gilt das Verhältnis

$$\frac{u^2}{u'^2} = \frac{k}{k'}\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}\,\frac{s_0'}{s_0}. \qquad 2.$$

Diese Beziehungen können für ein Gas von bekanntem k und s_0 zur Berechnung seiner Schallgeschwindigkeit dienen und ferner zu den unter III genannten Aufgaben.

In engeren Röhren erleidet die Sch.-Geschw. eine durch Reibung und Wärmeaustausch veranlafste Verminderung, die mit der Rohrweite und der Wurzel aus der Schwingungsdauer reciprok zunimmt (Kirchhoff). Nach Versuchen von Kundt läfst sich schätzen, dafs unter den gebräuchlichen Verhältnissen eine halbe Luftwellenlänge l mm, beobachtet in einem Glasrohr von d mm Weite, zu korrigiren ist um $+\,0{,}02\cdot l^{3/2}/d$ mm.

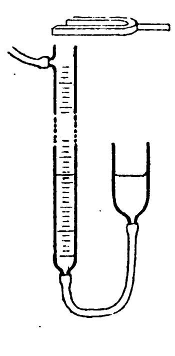
Die Schallgeschwindigkeit eines Gases läfst sich experimentell auf die der Luft (vgl. oben) zurückführen, indem man in beiden mit demselben angeriebenen Stabe Staubfiguren erzeugt. Den entstehenden Wellenlängen sind die Schallgeschwindigkeiten proportional. Werden also dabei die Längen beobachtet l' in trockener Luft von der Temp. t' und l in dem Gase von der Temp. t, so ist für das Gas die Sch.-Geschw. bei 0^0 gegeben durch (vgl. oben)

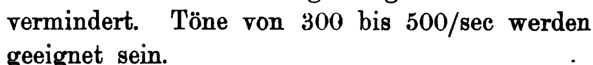
$$331 \frac{l}{l'} \sqrt{\frac{1+0{,}00367\,t'}{1+0{,}00367\,t}} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

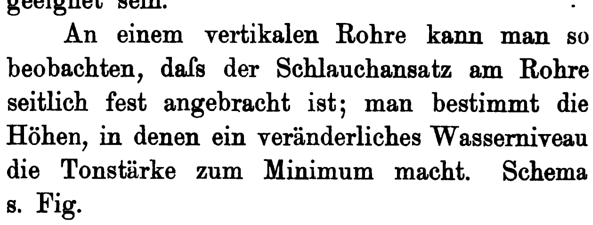
II. Akustische Bestimmung von Wellenlängen in Gasen durch Interferenz (Quincke).

In einer abgegrenzten Gasmasse entstehen durch die von einer Schallquelle von der Schwingungszahl N (Tab. 21) auf das Gas übertragenen Stöfse im allgemeinen stehende Schwingungen, z. B. in einem etwa einseitig verschlossenen Rohr wie auf S. 210 solche von der Wellenlänge u/N; der Abstand auf einander folgender Knoten ist also $= \frac{1}{2} u/N$, z. B. durch den Ton a_1, $N = 435/\mathrm{sec}$, in Luft von Zimmertemperatur $\frac{1}{2} \cdot 340/435 = 0{,}4$ m.

1. In ein hinreichend langes, hinten eben geschlossenes, weites (30 mm) Rohr, vor dem z. B. der Resonanzkasten einer angestrichenen Stimmgabel steht, ist ein offenes engeres (8 mm) Rohr eingeführt, von dessen freiem Ende der Schall dem einen Ohre durch einen in dieses eingesteckten Kautschukschlauch zugeführt wird. Das andere Ohr sei mit Watte verstopft. An einem mm-Stabe liest man die Verschiebungsgröfsen zwischen den Stellungen geringster Tonstärke ab. Das Kratzen des Hörrohrs an der Wand wird durch einige umgebundene Fäden

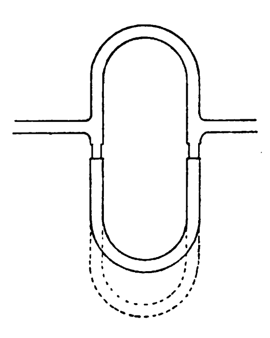



vermindert. Töne von 300 bis 500/sec werden geeignet sein.


An einem vertikalen Rohre kann man so beobachten, dafs der Schlauchansatz am Rohre seitlich fest angebracht ist; man bestimmt die Höhen, in denen ein veränderliches Wasserniveau die Tonstärke zum Minimum macht. Schema s. Fig.

Quincke, Pogg. Ann. 128, 190. 1866; Wied. Ann. 63, 66. 1897; Stevens, Diss. Heidelb. 1900.

2. Der Ton wird in das eine Ende eines verzweigten Kanals geschickt, dessen einer Zweig mittels eines Posaunenauszuges meſsbar verlängert werden kann. Das andere Ende verbindet man durch einen Kautschukschlauch mit einem Ohr, das andere Ohr wird mit Watte verstopft. Man sucht eine Stellung des Auszuges, in welcher die Tonstärke ein Minimum wird und verschiebt dann, bis dies wieder der Fall ist. Die Summe der beiderseitigen Verschiebungen gibt die Wellenlänge. Denn die beiden Wellenzüge interferiren jedesmal abschwächend, wenn ihre Weglängen sich um ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge unterscheiden.



Quincke, Pogg. Ann. 128, 179. 1866.

III. Anwendungen von Schallgeschwindigkeiten.

Bestimmung von Gasdichten. Ist $c_p/c_v = k$ bekannt, so folgt aus der Sch.-Geschw. u m/sec das spec. Gewicht bei 0^0 und 760 mm Quecks. (Formel 1, S. 211)

$$s_0 = 101{,}32 \cdot k \frac{1+\alpha t}{u^2}.$$

k ist für die haltbaren Gase mit zweiatomigem Molekül nahe $= 1{,}40$.

Bestimmung des Verhältnisses c_p/c_v. Aus dem bekannten spec. Gewicht s_0 (0^0, 760 mm) und der Sch.-Geschw. u bei t folgt

$$\frac{c_p}{c_v} = 0{,}00987 \frac{s_0 u^2}{1+\alpha t}.$$

Bestimmung der Temperatur. Als Gas werde trockene Luft angenommen. Der Sch.-Geschw. u entspricht die Temperatur

$$t = 0{,}002492\, u^2 - 273.$$

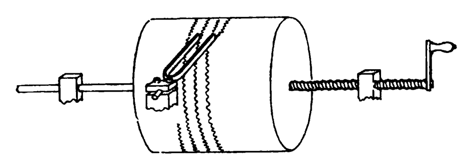
Sind die Wellenlängen eines und desselben Tones (vgl. 57) λ und λ' bei den Temperaturen t und t', so gilt

$$\frac{273+t}{273+t'} = \frac{u^2}{u'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

Über hohe Temperaturen vgl. Quincke, Wied. Ann. 63, 66. 1897.

57. Absolute Schwingungszahl eines Tones.

1. Graphisch. Man befestigt den tönenden Körper neben einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl[1]) und läfst beide mittels angeklebter leichter biegsamer Spitzen (Streifchen aus einer Federspule, geschabtes Celluloid etc.) Sinuskurven schreiben. Die neben einander liegenden Wellen werden abgezählt.



Oder man läfst neben die Kurve des Körpers in bekanntem Takte Marken zeichnen und zählt die zwischen ihnen liegenden Wellen. Die Marken werden z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung hergestellt, welche durch den Stromschlufs (Quecksilbernapf) bei jeder Schwingung eines Sekundenpendels bewegt wird. Oder dieser Stromschlufs geht durch die innere Rolle eines Induktionsapparates, während die Pole der äufseren Rolle mit der berufsten Walze bez. mit der Stimmgabel verbunden sind. Die Induktionsfunken durch die Schreibspitze geben dann die Marken ab.

Für besonders schnelle Schwingungen dient anstatt Rufs eine dünne Fettschicht; die hier geforderte rasche Fortbewegung wird durch einen Glasstreifen leichter erzielt als durch die Walze.

S. Melde, Wied. Ann. 51, 661. 1894.

2. Aus Schwebungen. Stimmgabeln oder sonstige Tonquellen von nahe gleicher oder in einfachem Zahlenverhältnis stehender Schwingungszahl lassen sich nach der Anzahl der Schwebungen vergleichen, welche sie mit einander erzeugen. Jede Schwebung bedeutet ein Vorauseilen des einen Tones um eine ganze Schwingung. Weifs man nicht, welcher von beiden Tönen der höhere ist, so kann man z. B. den einen von ihnen ganz wenig vertiefen. Werden die Schwebungen dadurch langsamer, so war dieser Ton zu hoch und umgekehrt. Ein Stimmgabelton kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch, welches dem Ende oder der Mitte näher geschoben wird, mehr oder beliebig wenig vertieft werden, der Ton einer Pfeife durch Annähern der Hand an die Öffnung.

1) Normalstimmgabeln werden von der P.-T. Reichsanstalt geprüft.

3. Mit dem Monochord. Eine gespannte weiche Saite von der Länge l m, gespannt durch ein Gewicht P, wenn 1 m der Saite das in derselben Einheit wie P ausgedrückte Gewicht p hat, besitzt eine Schwingungszahl N ihres Grundtons

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{9{,}81\,P}{p}}.$$

Durch Längen- oder Spannungsänderung kann man also zum Zweck von Vergleichungen eine beliebige, aus der Formel zu berechnende Tonhöhe hervorbringen. Die eigene Elasticität der Saite macht die Schwingungszahl etwas gröfser. Dünner Messing- oder besser noch Silberdraht ist geeignet.

4. Aus der Wellenlänge in Luft. Wenn u die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge, so ist $N = u/\lambda$. Für die Luft ist u bekannt $u = 331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}004\,t}$ m/sec (vgl. S. 210). Aus der in Luft gemessenen Wellenlänge findet sich hiernach die Tonhöhe.

Die Messung von Wellenlängen s. in **56** I u. II.

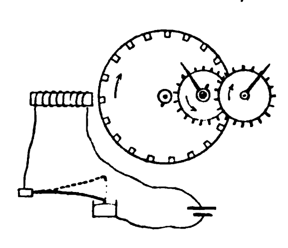
5. Stroboskopisch. Man regulirt die Umdrehungsgeschwindigkeit einer stroboskopischen, durch ein Laufwerk getriebenen Scheibe so, dafs die schwingende Stimmgabel, Saite, Feder etc., mit blofsem Auge, mit Fernrohr oder Mikroskop durch die Scheibe betrachtet, scheinbar still steht. Erblickt man mehrere ruhende Bilder des schwingenden Körpers, so mäfsigt man die Geschwindigkeit weiter, bis ein einfaches Bild erscheint, oder man dividirt das Resultat noch durch die Anzahl der Bilder, unter Beachtung, dafs mehrere sich decken können. Hat die Scheibe m Löcher und ist ihre Umdrehungszahl $= k$/sec, so ist die gesuchte Schwingungszahl $N = m \cdot k$. Die Umdrehungszahl erhält man entweder mit Hilfe eines Zählwerkes, welches man eine gemessene Zeit hindurch mitlaufen läfst, oder man beobachtet die Umdrehungszeit eines in bekanntem Verhältnis langsamer laufenden Rades im Laufwerk.

Bequemer und auch sicherer ist es, die Rotationsgeschwindigkeit nur so weit zu reguliren, dafs noch eine langsame stroboskopische Bewegung des schwingenden Körpers nachbleibt. Zählt man dann während einer Zeit von t sec s stroboskopische Schwingungen, und macht in derselben Zeit die Scheibe S Umdrehungen, so ist $N = (mS \pm s)/t$, und zwar $+$, wenn

bei vermehrter Rotationsgeschwindigkeit die stroboskopische Schwingung langsamer wird und umgekehrt.

6. Mit der Sirene. Man erhält eine Sirene mit Zählerwerk auf der Höhe des zu bestimmenden Tones und zählt die Umdrehungen während einer Anzahl von Sekunden. Durch häufige Wiederholung kann eine brauchbare Zahl entstehen.

7. Phonisches Rad (La Cour). Mit einem Zählwerk ist eine hohle Trommel verbunden, die etwas Quecksilber enthält. Durch seine Trägheit und Reibung wirkt dieses ausgleichend auf den Gang und erteilt insbesondere, wenn die Trommel während einer Rotation plötzlich stehen bleiben möchte, einen Stofs nach vorwärts.



Auf der Peripherie sind in gleichen Abständen Eisenstäbchen eingelassen. Die Trommel rotirt vor einem Elektromagnetpol. Wird dieser in einem bestimmten Takt erregt, so regulirt eine Geschwindigkeit, die man der Trommel durch einen Anstofs gegeben hat, sich von selbst so, dafs die Eisenstäbe den Pol in dem gleichen Takt oder mit einem ganzen Vielfachen dieser Geschwindigkeit passiren.

Das phonische Rad zählt also Oscillationen, die man auf bewegliche elektrische Kontakte übertragen hat, z. B. die von schwingenden Federn, Stimmgabeln etc. Da die Ordnungszahl der Schwingungen so gut wie immer bekannt ist, so wird eine besondere Untersuchung darüber, um wie viele Stäbchen sich bei jeder Schwingung die Trommel fortschiebt, selten gefordert. Andernfalls findet man sie leicht dadurch, dafs die Umdrehungszahl durch vorübergehendes Bremsen mit dem Finger auf die nächst niedrige Zahl ermäfsigt wird.

La Cour, Das phonische Rad; deutsch von Kareis, Leipzig 1880.

Kapillarität und Reibung.

58. Bestimmung einer Kapillarkonstante.

Die Kapillarkonstante einer Flüssigkeit ist das Flüssigkeitsgewicht, welches von der Längeneinheit der Berührungslinie der Oberfläche mit einer vollkommen benetzten Wand getragen wird. Dasselbe bedeutet: Wenn man nach dem Laplace'schen Gesetz den von der Krümmung einer Oberfläche herrührenden Kohäsionsdruck d durch den kleinsten und gröfsten Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 als $d = \alpha(1/\varrho_1 + 1/\varrho_2)$, für eine Kugelfläche vom Halbmesser r also $d = \alpha \cdot 2/r$, darstellt, so ist α diese Kapillarkonstante.

Praktisch pflegt man die Längen in mm, die Kräfte oder getragenen Gewichte in mg-Gewichten auszudrücken. Bei dem Übergang zum C.G.S-System kommt von mm zu cm der Faktor 10, von mg zu gr der Faktor 1/1000, endlich vom Grammgewicht zur Dyne der Faktor $g = 981$. Die Kapillarkonstante $[\alpha]$ in diesem System ist also 9,81 mal gröfser als die gewöhnlich in mg-Gew./mm angegebene α.

Die kapillare Steighöhe H in einem so engen kreiscylindrischen Rohre vom Radius r, dafs die Höhenunterschiede in dem Meniskus vernachlässigt werden können, wobei also die Oberfläche, damit sie konstanten Kapillardruck gibt, Kugelgestalt hat, beträgt, (s = sp. Gewicht) wenn die Benetzung vollkommen, d. h. der Randwinkel = 0 ist, $H = 2\alpha/(rs)$.

Beweis. Innerer Umfang $= 2r\pi$, gehobenes Gewicht $= r^2\pi Hs$, also trägt die Längeneinheit des Umfangs das Gewicht $\frac{1}{2}rHs$, welches $= \alpha$ sein mufs. — Oder: Krümmungshalbmesser der halbkugeligen Oberfläche $= r$, also der (negative) Krümmungsdruck der Oberfläche $d = \alpha \cdot 2/r$. Dieser mufs gleich dem (negativen) hydrostatischen Druck Hs sein.

Eine andere, ältere Definition nennt wohl, unter der Bezeichnung a^2, das Produkt rH Kapillarkonstante. Die beiden Definitionen stehen also im Verhältnis $s:2$.

Ist die Benetzung unvollkommen, d. h. bildet sich ein endlicher Randwinkel Θ, so beträgt die Steighöhe nur $H = 2\alpha/(rs) \cdot \cos\Theta$. Denn der Krümmungshalbmesser der Oberfläche ist (Fig.) jetzt $\varrho = r/\cos\Theta$, also $\alpha \cdot 2\cos\Theta/r = Hs$.

Kapillar-Depression (Quecksilber) tritt ein für $\Theta > 90^\circ$, wodurch $\cos\Theta$, also auch H negativ wird.

I. Aus der Steighöhe.

Ein kreiscylindrisches enges Rohr wird sorgfältig gereinigt (mit koncentrirter Schwefelsäure, Alkalilösung, Alkohol unter Nachspülung mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, alles voll-

kommen frei von Fett), so dafs es **vollkommen benetzt**, d. h. dafs der Randwinkel = Null wird. Besonders Wasser und viele wässerige Lösungen sind schwierig zu wirklicher Benetzung zu bringen; auch die Glassorte hat einen Einflufs auf die Benetzung. In Zwischenzeiten senkt man das Rohr tiefer ein, so dafs der nachherige Ort des Meniskus untergetaucht ist. Jedenfalls soll kurz vor einer Ablesung die Flüssigkeit am Meniskus durch Bewegung erneuert worden sein.

Die Höhe einer nicht bis an die obere Öffnung reichenden Flüssigkeitssäule im Kapillarrohre sei $= H$, ihr specifisches Gewicht $= s$ und r sei der innere Halbmesser in mm, dann ist die Kapillarkonstante

$$\alpha = \tfrac{1}{2} r H s \text{ mg-Gew./mm.} \qquad 1.$$

H mufs grofs sein gegen r. Man hat ev. H zu rechnen bis zu $\frac{1}{3}r$ über dem tiefsten Punkte des Meniskus.

Bei unvollkommener Benetzung mit dem Randwinkel Θ gilt $\alpha = \frac{1}{2} r H s / \cos \Theta$.

Beweise siehe vor. S.

Halbmesser. Ein Quecksilberfaden von der Länge l mm bei der Temperatur t wiege m mg, dann ist in mm (24)

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{m}{l}\frac{1+0{,}00018 \cdot t}{13{,}60}} \quad \text{oder für } 18^0 \quad r = 0{,}1533\sqrt{\frac{m}{l}}\,.$$

Mafsgebend ist der Halbmesser am oberen Ende der gehobenen Säule, so dafs man die Länge des Quecksilberfadens zu messen hat, während seine Mitte mit dieser Stelle zusammenfällt. Die kreiscylindrische Gestalt läfst sich am abgebrochenen Ende oder auch mit einiger Annäherung nach S. 96 prüfen.

II. Aus der Höhe von Luftblasen oder Flüssigkeitstropfen (Laplace, Quincke).

1. Luftblasen. Man erzeugt in der Flüssigkeit in einem Trog mit einer vertikalen Planwand eine breite Luftblase (20 mm oder mehr) unter einer eingetauchten horizontalen Platte. Wenn h der Vertikalabstand von dem flachen untersten Teil der Blase bis zu dem Punkte weitester horizontaler Ausbauchung ist, so hat man

$$\alpha = \tfrac{1}{2} s \cdot h^2. \qquad 2.$$

2. Tropfen. Eine Flüssigkeit, welche auf ebener Unterlage einen nicht benetzenden breiten Tropfen bildet, z. B. auch ein geschmolzenes Metall, dessen Tropfen auf einer erwärmten Platte erstarrt sind, läfst sich mittels dieser Tropfen genau ebenso untersuchen. h bedeutet den Vertikalabstand der Kuppe von der gröfsten horizontalen Ausbauchung.

Man mifst diese Höhen mit einem kleinen Kathetometer.

Über Ausführung und Korrektion auf unendlich grofse Blasen vgl. Quincke, Pogg. Ann. 139, 1. 1870; 160, 354. 1877; über kleinere Blasen Lohnstein, Wied. Ann. 53, 1062. 1894; Siedentopf, ib. 61, 235. 1897; Heydweiller, ib. 65, 311. 1898.

Randwinkel. Kennt man noch die ganze Höhe h' der Blase oder des Tropfens, so wird der Randwinkel Θ zwischen Flüssigkeit und Platte erhalten aus $\cos \frac{1}{2}\Theta = h'/(h\sqrt{2})$.

III. Aus der Länge von Oberflächenwellen (L. Matthiessen).

Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten werden teils durch die Schwere, teils durch die Oberflächenspannung fortbewegt. Bedeutet λ die Wellenlänge, N die Schwingungszahl, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u oder $N\lambda$ gegeben (W. Thomson) durch

$$u^2 = N^2\lambda^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{s}\frac{2\pi}{\lambda}\right). \qquad 3.$$

Bei sehr kurzen Wellen von wenigen mm Länge kann man das erste, der Schwere entsprechende Glied vernachlässigen.

Man bringe zwei leichte Stäbchen, welche an die Enden einer Stimmgabel von bekanntem N (**57**; Tonhöhe zwischen c und c_1 etwa) angeklebt sind, mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung und schlage die Stimmgabel an. Dann bilden sich zwischen den Spitzen stehende Wellen, deren λ (das Doppelte des Abstandes benachbarter Wellenberge) mit einem Cirkel und Mafsstab in mm ausgemessen wird. Es ist dann $u^2 = N^2\lambda^2 = \alpha \cdot \frac{2\pi g}{s\lambda}$, also, $g = 9810$ mm/sec^2 gesetzt,

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} s \frac{\lambda^3 N^2}{g} = \frac{1}{61600} s\lambda^3 N^2 \frac{\text{mg-Gew.}}{\text{mm}}. \qquad 4.$$

Matthiessen, Wied. Ann. 38, 118. 1889, wo $T = \alpha/s$ gesetzt ist. Ferner Grunmach, Ann. d. Phys. 3, 660. 1900.

IV. Durch Abtropfen.

Der Tropfen, welchen eine horizontale kreisförmige Fläche vom Halbmesser r mm tragen kann, wiegt (vgl. den Eingang) höchstens $2r\pi \cdot \alpha$ mg.

Man läfst die Flüssigkeit aus einer vertikal stehenden, unten eben geschliffenen und daselbst sehr gut benetzten Kapillarröhre mit dicker Wandung austropfen und wägt eine gezählte Menge von Tropfen. Beträgt das Gewicht des einzelnen Tropfens m mg und der äufsere Halbmesser der Röhre r mm, so kann man $\alpha = m/(2r\pi)$ schätzen.

Auch von geschmolzenen Metallen läfst α sich so bestimmen, indem das untere Ende eines Drahtes vom Halbmesser r mm (S. 198) in einer kleinen Flamme von möglichst niedriger Temperatur geschmolzen wird, bis der anhängende Tropfen abfällt. Das Verfahren unterliegt natürlich manchen Fehlerquellen.

Quincke, Pogg. Ann. 134, 365. 1868. Einen Apparat für die Messung s. Traube, Physik. Chem. Methoden S. 43. 1893.

Selbst die besseren Angaben der Kap.-Konst. schwanken für Wasser zwischen 7,2 und 8,3, für Quecksilber zwischen 44 und 56 mg/mm. Zusammenstellungen bei Quincke, Wied. Ann. 52, 3. 1894 und 61, 277. 1897.

59. Bestimmung des Reibungskoëfficienten einer Flüssigkeit durch Kapillarausflufs (Poiseuille, Hagenbach).

Reibungskoefficient oder Zähigkeitskonstante η heifst die Kraft, welche der Bewegung einer Flüssigkeitsschicht von der Flächeneinheit dadurch entgegenwirkt, dafs die Schicht sich mit der stationären Geschwindigkeit 1 im Abstande 1 (eigentlich mit der unendlich kleinen Geschwindigkeit u im Abstande u) vor einer ruhenden Schicht parallel vorbei bewegt. Die Längen pflegen in cm, die Kräfte praktisch in gr-Gewichten gemessen zu werden. In C.G.S-Einheiten ausgedrückt wird der Reibungskoefficient $[\eta]$ also $g = 981$ mal gröfser als bei der praktischen Definition.

Zur Messung ist angewandt worden die Dämpfung eines in der Flüssigkeit schwingenden Körpers oder meistens und einfacher der Ausflufs durch enge Röhren.

Durch ein Kreiskapillarrohr von der Länge l und dem Halbmesser r oder dem Querschnitt q (24) fliefst unter dem konstanten Drucke p in der Zeit τ ein Flüssigkeitsvolumen v aus (vgl. Hagenbach, Pogg. Ann. 109, 385 u. 402. 1860):

$$v = \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{8}\frac{r^4}{l}p\cdot\tau \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{\eta}\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{l}p\cdot\tau.$$

η nimmt mit wachsender Temperatur stark ab. Bei 18° gilt für Wasser $\eta = 0{,}00001075$ gr-Gew. sec.cm^{-2} oder $[\eta] = 0{,}01055$ cm^{-1}gr sec^{-1}. Andere Temperaturen s. Tab. 20a, andere Flüssigkeiten Tab. 20. $1/\eta$ heifst wohl Fluidität der Flüssigkeit.

1. Absolute Bestimmung.

Ein kreiscylindrisches Kapillarrohr ist mit einem Behälter verbunden, der dieselbe Flüssigkeit enthält. Um die Gegenkraft der Oberflächenspannung eines Tropfens und den durch Bewegungsenergie bedingten Druckverlust (vgl. unten) zu vermeiden, erfolgt der Austritt aus dem Rohre am besten in ein weiteres Gefäſs. Druckhöhe h ist dann die Höhendifferenz beider freien Oberflächen. Wenn h nicht konstant ist, so gilt das zeitliche Mittel während des Versuchs. Ist s das sp. Gew. der Flüssigkeit, so beträgt der Druck hs (streng $h(s-\lambda)$, wo λ das sp. Gew. der Luft). Flieſst in τ Sekunden das Volumen v aus, so ist

$$\eta = \frac{\pi}{8} \frac{r^4 hs\tau}{lv} \text{ oder } = \frac{1}{8\pi} \frac{q^2 hs\tau}{lv} \frac{\text{gr-Gew.sec}}{\text{cm}^2}. \qquad 1.$$

In [C.G.S]-Einheiten wird

$$[\eta] = \frac{981}{8\pi} \frac{q^2 hs\tau}{lv} [\text{cm}^{-1}\,\text{gr}\,\text{sec}^{-1}]. \qquad 2.$$

Die Ausführung kann in verschiedener Form geschehen. Am einfachsten ist ein vertikales Kapillarrohr mit einem oben angeblasenen, oder, wenn man genauer messen will, durch Schlauchverbindung angesetzten kleinen Behälter. Unten mündet das Rohr in ein Gefäſs, welches die Flüssigkeit enthält. Durch Aufsaugen wird der Behälter gefüllt. Man läſst zwischen zwei Marken ausflieſsen und beobachtet die Zeit.



Das Volumen zwischen den Marken wird durch Auswägen (24) bestimmt. Als Druckhöhe gilt, wenn das Gefäſs nach oben und unten symmetrisch gestaltet ist, die mittlere Höhe des Behälters über dem mittleren Stand des Niveaus im unteren Gefäſs; man markirt also am Behälter den Stand der Flüssigkeitsoberfläche bei halber Füllung durch einen Diamantstrich. — Ist die Höhe des Behälters selbst nicht klein gegen die Druckhöhe, so kommt wegen der ungleichen Zeit des Abflieſsens der oberen und unteren Hälfte eine etwas kleinere Höhe in Rechnung. Für einen cylindrischen Behälter von der Länge l, bez. eine Kugel vom Halbmesser r ziehe man von h ab $\frac{1}{12} l^2/h$ bez. $\frac{1}{20} r^2/h$.

Die Rohrweite richtet sich nach der Zähigkeit des Stoffes. 1 bis 5 min Ausflufszeit wird am besten sein. Je kleiner die Dimensionen, desto weniger Flüssigkeit genügt, aber um so vorsichtiger mufs man sich gegen feste Partikelchen in der Flüssigkeit schützen.

1^0 Temperatur beeinflufst die Zähigkeit um Procente. Die auf vor. S. gezeichnete Anordnung läfst sich in ein Bad stellen. Durch einen gut schliefsenden Kautschukstopfen tritt das Reibungsrohr und ein Rohr für Luftaustritt in das Vorratsgefäfs.

Beispiel. Volumen $v = 57{,}32$ cm³. Rohrlänge $l = 50{,}54$ cm. 45,33 cm des Rohres fafsten 7,347 gr Hg von 18°; also Querschnitt

$$q = \frac{7{,}347}{45{,}33 \cdot 13{,}596(1 - 0{,}00018 \cdot 18)} = 0{,}01196 \text{ cm}^2.$$

Wasser von 18,5°: Druckhöhe $h = 53{,}7$ cm. Ausflufszeit $\tau = 100{,}9$ sec. Also

$$\eta = \frac{1}{8\pi} \frac{0{,}01196^2 \cdot 53{,}7 \cdot 0{,}9985 \cdot 100{,}9}{50{,}54 \cdot 57{,}32}$$
$$= 0{,}00001063 \text{ gr-Gew. sec/cm}^2 = 0{,}01043 \left[\text{cm}^{-1} \text{ gr sec}^{-1}\right].$$

Korrektion wegen Bewegungsenergie.

Die Formeln 1 und 2 setzen voraus, dafs die ganze von der sinkenden Flüssigkeit gethane Arbeit in Reibungsarbeit umgesetzt wird. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Anfangs- und Endgeschwindigkeit der Flüssigkeit in den freien Oberflächen keine merkliche Energie darstellt und wenn aufserdem nicht durch Wirbel, z. B. nach dem Austritt aus dem Rohre, oder an Stellen, wo der Querschnitt sich plötzlich ändert, Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt wird. Auf eine schlanke Gestalt der Verjüngungsstellen etc. ist also zu achten.

Fliefst die Flüssigkeit unten in einem Strahle in die Luft aus, so nimmt das Volumen v, welches in der Zeit τ austritt, die Bewegungsenergie $sv^3/q^2\tau^2$ mit, d. h. von der ganzen Arbeit $ghsv$ den Bruchteil $\delta = \frac{v^2}{ghq^2\tau^2}$; um denselben Bruchteil also ist die Reibungsarbeit zu grofs berechnet worden, d. h. das oben berechnete η wäre mit $1 - \delta$ zu multipliciren.

Beweis. Ist U die mittlere und u die einzelne (an der Wand verschwindende) Geschwindigkeit in einem Ringe vom Halbmesser ϱ, so gilt (vgl. Hagenbach, l. c. S. 396) $u = 2U\frac{r^2 - \varrho^2}{r^2}$. Durch den Elementarring von der Dicke $d\varrho$ geht in der Zeit τ die Masse

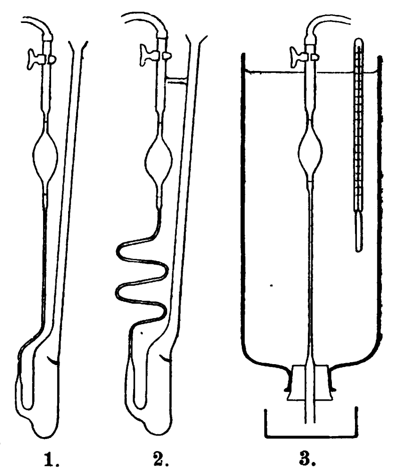
$dm = su\tau \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho = 4\pi sU\tau \cdot \frac{1}{r^2}(r^2 - \varrho^2)\varrho\, d\varrho$ mit der lebendigen Kraft $\frac{1}{2} dm \cdot u^2 = 8\pi sU^3\tau \cdot r^{-6}(r^2 - \varrho^2)^3\varrho\, d\varrho$. Da $\int_0^r (r^2 - \varrho^2)^3 \varrho\, d\varrho = \frac{1}{8} r^8$ ist, so wird die gesamte Bewegungsenergie im Querschnitt $= \pi sU^3\tau r^2$. Hierin $\pi r^2 = q$ und $U = v/q\tau$ eingesetzt, entsteht der gesuchte Wert $sv^3/q^2\tau^2$.

2. Relative Bestimmung.

Man benutzt die vorige oder eine der nachfolgenden Anordnungen; aber anstatt sie auszumessen, vergleicht man die Ausflufszeit unter gleichen Umständen mit derjenigen einer bekannten Flüssigkeit (Wasser; vgl. Tab. 20a). Sind τ und τ' die Zeiten, s und s' die specifischen Gewichte, so verhalten sich die Reibungskoefficienten

$$\eta : \eta' = s\tau : s'\tau'.$$

Um die aus einem sehr engen Rohr leicht entspringenden Versuchsfehler zu vermeiden, kann das Ausflufsrohr weiter und gekrümmt (Fig. 2) sein. Für die meisten wässrigen Salz- oder Säurelösungen empfiehlt sich dann etwa eine Gröfse der Birne $= 5\ cm^3$, eine Rohrlänge $= 1$ m, ein Rohrquerschnitt $= \frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}\ mm^2$ und eine Druckhöhe $= 150$ mm.



1. 2. 3.

Die bei dem Verfahren vorausgesetzte konstante Höhenstellung der oberen Birne zum unteren Anfangsniveau ist bei gegenseitiger Vertikalstellung am leichtesten zu verbürgen. Das Anfangsniveau kann nach einer Kreismarke am unteren Gefäfs oder noch besser nach einer eingeschmolzenen Spitze beurteilt werden. — Am leichtesten herstellbar ist die Anordnung 3 (Ostwald) mit einem unten etwas erweiterten, durch einen Kautschukstopfen gedichteten Rohr. Nr. 1 und 2 werden in ein Bad mit Thermometer gebracht.

Je enger das Rohr, um so mehr ist zu beachten, dafs nicht feste Teilchen in die Kapillare kommen. — Die Zeitbestimmungen werden genauer, wenn das Rohr um die Marken herum nicht zu eng ist, so dafs der Meniskus mehr als 1 sec braucht, um diese gleichförmige Strecke zu durchlaufen.

Hähne müssen natürlich hinreichend weit sein, dafs die Luftreibung nicht in Betracht kommt. Die angesaugte Flüssigkeit soll den Hahn nicht berühren. — Erhebliche Fehler können aus Tröpfchen entstehen, die sich bei ungleichmäfsiger Benetzung zeitweilig an den Verjüngungsstellen bilden.

Die seitlichen Einfüllrohre an Nr. 1 u. 2 (an Nr. 2 durch einen Glassteg mit dem anderen Teil verbunden) sollen so gestaltet sein, dafs man ev. ein langes Trichterrohr durchschieben kann, mit dem man das Gefäfs bis an die Marke füllt. In die Birne wird die Flüssigkeit vor jedem Versuch angesaugt, wozu oft die Wasserluftpumpe oder eine ähnliche, improvisirte Vorrichtung bequem sein wird.

Über Messungen bei hohen Temperaturen s. Heydweiller, Wied. Ann. 55, 561. 1895; 59, 193. 1896; Thorpe u. Rodger, Phil. Tr. 185 II A, 397. 1895.

Über Zähigkeitsmessungen durch die Dämpfung eines mit Flüssigkeit gefüllten schwingenden Gefäfses vgl. O. E. Meyer, Wied. Ann. 43, 1. 1891; Mützel ib. S. 15.

Gasreibung kann ebenso durch Kapillarausflufs sowie durch Dämpfung schwingender Platten bestimmt werden.

Vgl. u. A. die Arbeiten von O. E. Meyer, Maxwell, Kundt u. Warburg, Warburg u. v. Babo, Puluj, v. Obermaier, Schumann, Barus, 1866--1889. — Zusammenstellung bei O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. 1899, S. 171 ff.

Licht.[1])

59a. Lichtquellen. Spektrum.

Eingehend in Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Leipzig 1900. — Weifse starke Lichtquellen sind aufser der Sonne der Kalk- oder besser Zirkon-Brenner (Linnemann) im Sauerstoffgebläse und die Anode der elektrischen Bogenlampe. Auch Auer-Licht ist gut zu verwenden.

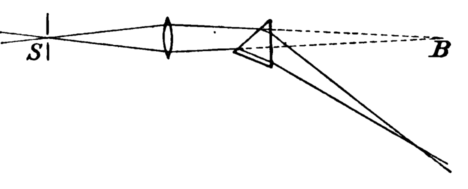
Einfarbiges Licht.

Es ist im folgenden vielfach gleichgiltig, ob die Reinigung des Lichtes durch Absorption, bez. durch spektrale Zerlegung, vor dem Eintritt oder nach dem Austritt (vor dem Auge) geschieht. Letzteres ist oft bequemer.

Farbig absorbirende Mittel („Strahlenfilter"). Kräftig rotes Kupferoxydulglas liefert ein leidlich homogenes Licht. Auch einzelne grüne Gläser oder Gelatineplatten sind brauchbar, besonders wenn man verschiedenfarbige Platten geeignet hintereinander stellt. Über farbige Flüssigkeiten vgl. Landolt, Chem. Ber. 1894, 2872.

Man prüft und definirt die resultirende Farbe mit dem Spektralapparat; **64**.

Spektrale Zerlegung. Licht passirt einen Spalt S und dann eine Linse, welche ein objektives Bild B des Spaltes entwirft. Hinter die Linse kommt ein Prisma; falls die Lichtquelle vom Spalte weiter absteht (Sonne), etwa an den Ort des Bildes, welches die Linse von der Lichtquelle entwirft. Ungefähr im Abstande des Bildes B vom Prisma entsteht dann seitlich, bei einem geradsichtigen Prisma nahe bei B, das Spektrum, aus welchem die gewünschte Farbe durch eine Blende herausgeschnitten werden kann. Gewöhnlich gibt man dem Prisma die Stellung, in welcher das Spektrum am wenigsten abgelenkt ist, doch können auch andere Stellungen, welche eine Farbe mehr zusammendrängen oder ausbreiten, Vorteile bieten. — Rutherford'sche zusammengesetzte Prismen geben eine besonders starke Dispersion. — Mehrere hintereinander gestellte Prismen bedürfen beim Übergang aus einem in einen andern Spektralbezirk im allgemeinen einer Änderung ihrer gegenseitigen Stellung; vgl. z. B. **64**, S. 256.



---

1) Über optische Konstanten s. Tab. 22 bis 26. — Eine ausführliche Zusammenstellung mit Quellenangabe in: Recueil de Données numériques, publié par la Société Française de Physique; Optique, par H. Dufet, 3 Bde., Paris 1898—1900.

Ein reines Spektrum verlangt einen engen Spalt mit scharfen Schneiden und eine gute achromatische Linse, oft auch ein Abblenden falschen Lichtes. Die Reinheit wird an dem deutlichen Auftreten der Fraunhoferschen oder Metalldampf-Linien erkannt, auch wohl nach dem Bilde von einem Querfaden im Spalt beurteilt, welches im Spektrum als Querlinie auftritt.

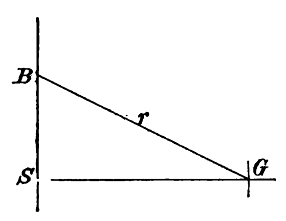
Das Spektrum des elektrischen Lichtbogens ist reicher an ultravioletten Strahlen als das Sonnenlicht. Wegen der Absorption im Glase wird für ultraviolette Strahlen Quarz oder Flufsspat genommen; der letztere absorbirt auch ultrarote Strahlen bis 7μ wenig. Von der Wellenlänge $\lambda = 0{,}25\mu$ (0,00025 mm) an abwärts absorbirt Quarz, von $\lambda = 0{,}185\mu$ an sogar die Luft selbst, so dafs schliefslich mit Flufsspatpräparaten im Vakuum oder in Wasserstoff gearbeitet werden mufs (Schumann).

Im Ultrarot sind besonders Steinsalz- und Sylvinpräparate von Bedeutung. Eingehende Angaben über Absorption besonders im ultraroten Spektrum s. in Tab. 25.

Gitterspektrum. An die Stelle des Prismas kann das Beugungsgitter treten, welches nach beiden Seiten Spektra liefert, in der Regel nach der einen Seite lichtstärker als nach der anderen. Das sichtbare Spektrum 1. Ordnung (Fig. S. 259) ist getrennt von den übrigen, die höheren Spektra greifen in einander über.

Reflexionsgitter. Dieselben pflegen in Metallflächen eingegraben zu sein. Ebene Reflexionsgitter wirken ebenso wie die durchlässigen, sobald man das Spiegelbild der Lichtquelle in der Gitterebene als Lichtquelle ansieht (Quincke, Pogg. Ann. 146, 43. 1872).

Rowland'sches Gitter. Die reflektirende Fläche ist schwach sphärisch und entwirft daher ein Spektrum ohne Linse, was wegen der Absorption von Bedeutung ist. Das deutliche Spektrum ist nicht eben. Um seine Teile nach und nach auf einer ebenen Fläche erscheinen zu lassen, dient folgende Vorrichtung. S sei der Spalt, SG und SB sind zu einander senkrechte Schienen, BG ein Arm von der Länge des Krümmungshalbmessers der Gitterfläche. Der Teil des Spektrums bei B erscheint deutlich, wenn das Gitter, welches bei der Bewegung des Arms parallel verschoben wird, sich in G befindet. — Kayser, Lehrb. d. Spektroskopie, S. 450. 1900. — Daselbst S. 482 auch der Vorschlag stufenförmiger Gitter von Michelson.



Glühende Metalldämpfe. Metallsalze, aufser Na besonders noch Li und Tl (Tab. 22. 23; Fig. S. 236), werden in den Bunsenbrenner eingeführt als Perlen an der Platin-Öse oder von Platindrahtkörbchen gehalten (Landolt'scher Brenner), in das Luft- oder Sauerstoff-Gebläse auch als gegossene Stäbchen (du Bois, ZS. f. Instr. 265. 1892). Das Chlorid oder Bromid, wegen Verknisterns vorher erhitzt, ist heller, das Carbonat aber ausdauernder, leichter anzuschmelzen und für Lithium durch Ausschütteln

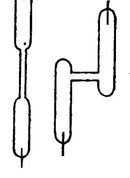
des Pulvers mit Wasser leicht zu reinigen. Auch Stäbchen aus Natronglas können dienen. Nebenlicht, z. B. aus der Gasflamme selbst, sucht man durch Absorptionsmittel, z. B. farbige Gläser, für Na-Licht auch durch Lösungen von Kaliumbichromat und Uranosulfat zu beseitigen.

Gleichmäfsig leuchtende Flammen erzielt die Verteilung einer Salzlösung in die dem Brenner zugeführte Luft durch einen Zerstäuber (Gouy, Kayser l. c. S. 149), oder das Zerspritzen mittels Gasentwicklung in einer, auf den Brenner aufgesetzten kleinen elektrolytischen Zelle aus Porzellan (Beckmann, ZS. f. physik. Ch. 34, 593; 35, 443 u. 652. 1900).

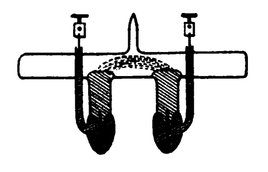
Auch in dem elektrischen Lichtbogen kann man Metalldampf-Spektra erzeugen. Ein solcher Bogen kann so lang gemacht werden, dafs die Kohlen sich abblenden lassen; die Banden des Kohledampfes, des Cyans und Eisens aber bleiben als Verunreinigungen des Lichtes. Vgl. Kayser, p. 168.

Das Funkenspektrum des Induktionsapparates wird meistens durch Nebenschaltung einer Leidener Flasche verstärkt. Es zeigt aufser den Linien der Elektrodenmetalle die aus der Atmosphäre stammenden Linien und ist infolge dessen sehr komplicirt.

Die Metalle K, Sr, Ca, Rb, Cs, Zn, Cd etc. liefern eine Summe von diskreten Farben, die durch das Prisma zerlegt werden können. Die Wellenlänge der am meisten angewandten Linien s. in Tab. 23, ihre Farbe in Fig. S. 236.



Geifsler'sche Röhren. Die gewöhnliche eingeschnürte Form und, um mehr Licht zu bekommen, eine solche mit Längsdurchsicht s. Fig. Wasserstoff-Füllung gibt die Wellenlängen C, F, eine aus der Gruppe G und h (Fig. S. 236). Quecksilber, Zink, Cadmium erwärmt man in der Röhre. Das intensivste Quecksilberlicht gibt die Arons'sche Röhre (Wied. Ann. 47, 767. 1892), in der ein Vakuum-Lichtbogen zwischen Quecksilberelektroden durch konstanten Strom erzeugt wird. Anfängliches Zusammenfliefsenlassen des Quecksilbers leitet den Strom ein. Gegen Zerspringen schützt ein Bad mit heifsem Wasser am besten. Anordnung von Lummer nebenstehend; auch die Stromzuführung wird durch Quecksilber vermittelt.

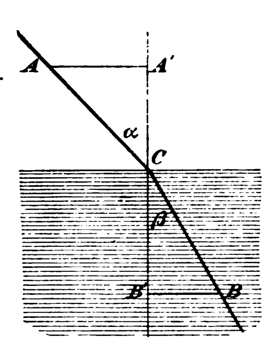


Andere Gestalten s. z. B. Kayser, l. c. S. 172 u. 232ff.

60. Lichtbrechungsverhältnis eines Prismas. Spektrometer.

Wenn bei dem Eintritt eines Lichtstrahls aus Luft in einen Körper α der Eintritts- und β der Brechungswinkel ist (Fig.), so stehen die Sinus beider Winkel in einem konstanten Verhältnis zueinander, dem Brechungs-Verhältnis (-Koefficient, -Exponent, -Index) n des Körpers; Snell'sches Gesetz, 1621. Also ist

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$



Geometrisch ist $\sin\alpha = AA'/AC$ und $\sin\beta = BB'/BC$, oder wenn $AC = BC = 1$ ist, $\sin\alpha = AA'$ und $\sin\beta = BB'$. Sinus und Logarithmen s. Tab. 53. 54.

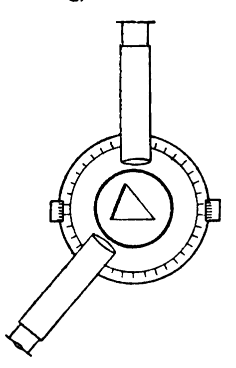
n bedeutet zugleich das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit oder, was dasselbe sagt, der Wellenlänge, in der Luft zu derjenigen im brechenden Körper. Hieraus folgt, dafs aus einem lichtbrechenden „Mittel" vom B.-V. n_1 in ein anderes vom B.-V. n_2 das B.-V. gleich n_1/n_2 ist. — Aus dem leeren Raum in gewöhnliche Luft beträgt das B.-V. $n_0 = 1{,}00029$; durch Multiplikation mit n_0 wird also ein in Luft beobachtetes B.-V. „auf den leeren Raum reduzirt". $n_0 - 1$ ist der Dichtigkeit der Luft proportional.

Wenn s die Dichtigkeit eines Körpers, so heifst $r = 1/s \cdot (n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ [früher auch wohl $(n-1)/s$ oder $(n^2-1)/s$] sein specif. Brechungs- oder Refraktionsvermögen. r ist von Temperatur, Druck und Aggregatzustand nahe unabhängig. Also nimmt das Brechungsverhältnis durch Temperaturausdehnung ab. Wenn A das chemische Molekulargewicht des Körpers, so heifst $r \cdot A$ das molekulare Brechungsvermögen.

Zur Bestimmung des B.-V. wird der Körper meist in Prismenform angewandt, ein fester Körper geschliffen, eine Flüssigkeit in ein Prisma aus ebenen Glasplatten eingefüllt. Aus dem Ablenkungswinkel des Lichtes beim Durchtritt durch das Prisma und dem gegenseitigen Winkel der brechenden Flächen (dem „brechenden Winkel") läfst das B.-V. sich berechnen.

Spektrometer. Allgemeine Regeln.

Das Spektrometer (Goniometer; Formen von Meyerstein (1856), Abbe, v. Lang) besteht aus dem Teilkreise, dem Tischchen für das Prisma, dem Spaltrohr oder Kollimator und dem Fernrohr.



Das meistens feststehende Spaltrohr ist nach aufsen durch einen in seiner Breite verstellbaren Spalt, nach dem Prisma zu durch eine Linse abgeschlossen, deren Brennpunkt in den Spalt fallen mufs, um jedes von einem Punkte des Spaltes ausgehende Lichtbündel als Parallelstrahlenbündel nach dem Prisma austreten zu lassen. Der Spalt vertritt so ein unendlich fernes leuchtendes Objekt. Das entweder mit oder über dem Teilkreis drehbare Fernrohr soll den Spalt deutlich erscheinen lassen, mufs also auf Parallelstrahlen, „auf unendlich", eingestellt sein. Für manche Methoden ist es nötig, dafs auch Drehungen des Prismas gemessen werden können, dafs also das Tischchen mit dem drehbaren Teilkreise verbunden werden und das Fernrohr dabei festgestellt werden kann.

Alle Drehaxen sollen koncentrisch sein.

1. Kreisablesung. Die Anbringung zweier gegenüberliegender Ablesepunkte an einer Kreisteilung soll nicht nur die Ablesungsfehler verringern, sondern vor allem die Excentricität der Kreisteilung gegen die Drehungsaxe eliminiren. Man beobachte also jedesmal beide Nonien, immer die Nummer des Nonius notirend. Dann nimmt man entweder das Mittel aus den Winkeln, die jeder Nonius angibt; oder bequemer, man rechnet die Gradablesung immer nach Nonius I und nimmt nur in den Bruchteilen (Minuten) die Mittel.

2. Einstellung des Fernrohrs auf unendlich. Man macht zunächst das Fadenkreuz des Fernrohrs durch Verstellen des ersten Okularglases oder des Fadenkreuzes selbst deutlich sichtbar. Dann richtet man das Rohr auf einen sehr entfernten Gegenstand und bewirkt mit dem Auszuge, dafs das Bild dieses Gegenstandes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt, d. h. dafs beide bei einer Seitenbewegung des Auges sich nicht gegen einander verschieben. Vgl. auch Nr. 4a dieses Abschnittes.

3. Einstellung des Spaltrohrs (Kollimators) auf Parallelstrahlen. Man richtet das auf unendlich eingestellte Fernrohr auf den beleuchteten Spalt und zieht das Spaltrohr so weit heraus, dafs das Bild des Spaltes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt.

4. Beleuchtetes Fadenkreuz. Die Beleuchtung geschieht durch eine geneigte zwischen (Gaufs'schem) Okular und Fadenkreuz befindliche Planglasplatte. Licht von einer seitlich aufgestellten Flamme fällt auf die Platte und wird von da durch das Fadenkreuz nach dem Objektiv geworfen. Ist das Fernrohr auf unendlich eingestellt, so treten Strahlen, welche von einem Punkt des Fadenkreuzes kommen, als Parallelstrahlen aus dem Objektiv und geben, von einer ebenen Fläche in das Fernrohr reflektirt, ein deutliches Bild des Fadenkreuzes.

Das beleuchtete Fadenkreuz dient zu folgenden Zwecken:

a) Einstellung des Fernrohrs auf unendlich. Man verschiebt den Auszug, bis das Fadenkreuz und sein an einer Ebene gespiegeltes Bild keine Parallaxe zeigen.

b) Senkrechtstellung einer spiegelnden Ebene gegen

das Fernrohr. Man orientirt so, dafs das Fadenkreuz und sein Bild zusammenfallen.

c) Senkrechtstellung der Sehlinie des Fernrohrs zu seiner Drehaxe. Auf das Tischchen des Instruments stellt man ein beiderseitig spiegelndes, etwa versilbertes (8, 6) Planparallelglas, welches selbst auf einem kleinen Fufs mit Stellschraube steht oder auch direkt mit Klebwachs befestigt wird. Dieses Glas orientirt man so, dafs im Fernrohr das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbild zusammenfällt. Dreht man nun das Fernrohr um 180°, so müssen, wenn die Sehlinie zur Drehaxe senkrecht ist, abermals die Bilder zusammenfallen. Wenn nicht, so korrigirt man die Hälfte der Abweichung durch Neigen des Spiegelglases, die andere Hälfte durch Neigen des Fernrohrs und wiederholt die Probe u. s. f.

Eine nicht ganz parallele Glasplatte schneide und stelle man so, dafs die beiden Bilder des Fadenkreuzes neben einander liegen. Dann läfst sich das Glas zu den Prüfungen verwenden.

d) Prüfung ob die Drehaxe des Tischchens oder des Kreises senkrecht zur Sehlinie des Fernrohrs steht. Nach der Einstellung des Fadenkreuzbildes dreht man das Spiegelglas um diese Axe um 180°; dann müssen die Bilder wieder zusammenfallen.

e) Hat das Spiegelglas selbst einen kleinen Fufs mit Stellschrauben, so kann man mit demselben in leicht ersichtlicher Weise prüfen, bez. mit den Regulirschrauben des Tischchens bewirken, dafs dessen Oberfläche mit der Sehlinie des Fernrohrs parallel ist.

f) Herstellung des Parallelismus einer Ebene (Prismenfläche) mit der Drehaxe. Nach *b* auszuführen, nachdem die Orientirung *c* angestellt worden ist. (Ohne beleuchtetes Fadenkreuz verfährt man mit dem als berichtigt angenommenen Fernrohr und dem Spaltrohr so: Man richtet das Fernrohr gerade auf den Spalt und markirt durch einen Querfaden die Spalthöhe, welche in das Fadenkreuz fällt. Betrachtet man dann den Spalt in der Fläche gespiegelt, so mufs, wenn diese mit der Axe des Instrumentes parallel ist, dieselbe Spalthöhe im Fadenkreuz erscheinen.)

Sind zwei Flächen desselben Körpers (Prisma) einzustellen, so stellt man letzteren so, dafs eine der Flächen auf der Verbindungslinie zweier Fufsschrauben des Tischchens senkrecht steht. Diese Fläche wird zuerst berichtigt; alsdann die andere, wobei aber die genannten beiden Schrauben nicht mehr benutzt werden.

g) Prüfung einer Platte auf Planparallelismus. Die Kennzeichen sind: 1) es mufs bei passender Stellung des Fernrohrauszuges das Spiegelbild des Fadenkreuzes deutlich und einfach erscheinen; 2) wenn das Fadenkreuz gegen sein Spiegelbild auf der einen Seite keine Parallaxe zeigt, so mufs dies ohne Verstellung des Fernrohrauszuges auch auf der anderen Seite der Fall sein. Dann ist zugleich das Fernrohr auf unendlich eingestellt.

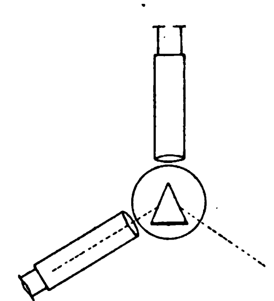
Brechungsverhältnis eines Prismas.

Es ist zu messen der Prismen- oder brechende Winkel und die Ablenkung des Lichtstrahls.

I. Messung des brechenden Winkels φ.

a) Wenn das Fernrohr feststeht und das Prisma mit dem Teilkreise drehbar ist. Das Prisma wird so auf das Tischchen gestellt, dafs nach passender Drehung des Kreises die eine brechende Fläche nahe den früheren Ort der anderen einnimmt. Nach Nr. 4*f* werden zuerst die beiden Prismenflächen mittels der Stellschrauben des Tischchens der Drehaxe parallel gestellt. Dann werden das Fernrohr und Spaltrohr unter thunlichst spitzem Winkel gegeneinander festgestellt, das Spaltrohr beleuchtet und nun der Kreis mit dem Prisma so gedreht, dafs das Fernrohr das in einer der beiden Flächen gespiegelte Spaltbild im Fadenkreuz sieht. Die Einstellung des Teilkreises wird jetzt abgelesen. Durch Drehung des Teilkreises mit dem Prisma stellt man ebenso auf die andere Prismenfläche ein und liest wieder ab. Die Differenz beider Ablesungen, selbstverständlich mit Rücksicht auf eine etwaige Überschreitung des Nullpunktes der Teilung, ergibt von 180° abgezogen den brechenden Winkel φ.

Mit beleuchtbarem Fadenkreuz braucht man keinen Spalt sondern dreht mit dem Teilkreise zuerst die eine, dann die andere Prismenfläche so, dafs das Kreuz mit seinem Spiegelbilde in der Fläche zusammenfällt.



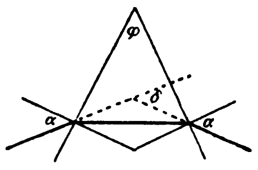
b) Wenn das Prisma feststeht, das Fernrohr mit dem Nonius oder mit dem Kreise drehbar ist. Man stellt das Prisma so auf, dafs ungefähr die rückwärts verlängerte Halbirungslinie des brechenden Winkels den Spalt trifft. Sodann wird das Fernrohr auf das Spiegelbild des Spaltes in jeder Fläche eingestellt. Der Unterschied der Ablesungen am Kreise in beiden Lagen ist der doppelte brechende Winkel. Der Spalt mufs hier nach Nr. 3 sorgfältig auf unendlich eingestellt sein.

Mit dem beleuchteten Fadenkreuz mifst man den brechenden Winkel, indem man dasselbe mit seinem Spiegelbild in jeder der beiden Flächen zur Deckung bringt. Der gemessene Drehungswinkel ergänzt φ zu 180^0.

II. Messung des Ablenkungswinkels.

Für diese Messung wird Licht von einer bestimmten Brechbarkeit (Farbe, Wellenlänge) vorausgesetzt, z. B. Natriumlicht; vgl. S. 226. 227. Die Richtung des nicht abgelenkten Lichtstrahles wird erhalten, indem man das Fernrohr direkt auf den Spalt einstellt. Durch das Einschieben des Prismas entsteht ein Ablenkungswinkel. Man hat folgende Methoden:

a) Symmetrische oder Minimumstellung (Fraunhofer). Die Gröfse der Ablenkung eines Strahles hängt von der Richtung ab, in der er das Prisma durchsetzt. Sie ist am kleinsten bei symmetrischem Durchgang (Fig.). Um diese „Minimumstellung“ zu haben, stellt man Prisma und Fernrohr so, dafs der abgelenkte Strahl im



Fernrohr erscheint (über die Stellung vgl. Fig. S. 228), dreht dann langsam das Prisma und folgt der Verschiebung des Bildes mit dem Fernrohr. In der Lage, in welcher der Lichtstrahl die möglichst kleine Ablenkung hat (wo das Bild sich nach

derselben Seite bewegt, man mag das Prisma links oder rechts drehen), fixirt man das Prisma, stellt nun das Fadenkreuz auf den Spalt ein und liest den Kreis ab. Diese Einstellung wird von der direkten Einstellung auf den Spalt abgezogen und ergibt den Ablenkungswinkel δ.

Statt auf den Spalt direkt einzustellen, kann man an Instrumenten, wo dies angängig ist, noch besser den Lichtstrahl einmal nach links, das andere Mal nach rechts durch das Prisma minimal ablenken lassen und von den beiden Einstellungen des Fernrohrs die halbe Differenz nehmen.

Das Brechungsverhältnis n ist, wenn φ den Prismenwinkel bedeutet,

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

Beweis. Ein symmetrisch durch das Prisma gehender Strahl bildet mit den beiden Normalen den gleichen Winkel $\frac{1}{2}\varphi$. Nach dem Brechungsgesetz ist (Fig.) $\sin\alpha = n \sin \frac{1}{2}\varphi$. Nun ist offenbar $\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \varphi)$, also $\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi) = n \sin \frac{1}{2}\varphi$, q. e. d.

b) Senkrechter Austritt (Meyerstein). Das Verfahren verlangt ein beleuchtbares Fadenkreuz. Man gibt dem Prisma die Stellung, bei welcher die dem Fernrohre zugewandte Fläche zur Sehlinie senkrecht ist, d. h. bei welcher das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbild zusammenfällt. Ist δ der Ablenkungswinkel, φ der brechende Winkel, so hat man (Fig.)

$$n = \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin\varphi}.$$

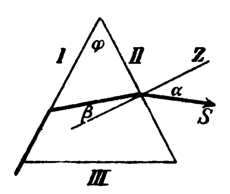
c) In sich zurückkehrender Strahl (Abbe). Vgl. die Figur zu *b*. Das Verfahren bedarf keines Spaltes, aber eines beleuchtbaren Fadenkreuzes. Das auf unendlich eingestellte Fernrohr wird zur einen Prismenfläche erstens nach Nr. 4*b* senkrecht gestellt und abgelesen. Dann stellt man vor derselben Fläche so ein, dafs die Strahlen vom Fadenkreuz, welche ins Prisma gedrungen, an der zweiten Fläche reflektirt und durch die erste wieder ausgetreten sind, wieder ins Fadenkreuz fallen (man stellt auf das Spiegelbild des Fadenkreuzes in der hinteren Prismenfläche ein). Die Drehungen können entweder mit dem Fernrohr oder mit dem Prisma geschehen. An dem Abbe'schen

Spektrometer ist die Einstellung besonders bequem gemacht. Beide Stellungen mögen den Winkel ε mit einander bilden. Dann ist

$$n = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi}.$$

Folgt aus der Figur zu *b*), indem $\varepsilon = \varphi + \delta$ ist. Dem Abbe'schen Spektrometer ist eine Vorrichtung zugefügt, um die Dispersion (S. 236) selbständig zu bestimmen. Vgl. Abbe, Apparate zur Bestimmung des Brechungsvermögens. Jena 1874.

d) Streifender Eintritt (F. K.). Die Methode ist instrumentell die einfachste, denn sie läfst sich auch mit einem beliebigen drehbaren Teilkreise und danebengestelltem Ablesefernrohr ausführen. Die eine Prismenfläche (I) werde von einem breiteren Lichtbündel streifend getroffen, etwa von einer Natronflamme beleuchtet, welche man in die Fortsetzung der Fläche gestellt hat. Durch die andere Prismenfläche sieht man das Licht dann scharf abgeschnitten. Man stellt auf diese Grenze zwischen dunkel und hell ein. Gesucht wird der Winkel α dieser Sehrichtung S mit der Normalen Z der Fläche II.



Mit beleuchtetem Fadenkreuz kann man α direkt messen, indem man nach Nr. 4*b* noch auf die Normale Z einstellt.

Ist φ klein, so verläuft der Grenzstrahl S nach der anderen Seite von Z; dann soll α negativ gerechnet werden.

Ohne beleuchtbares Fadenkreuz beobachtet man zum zweiten durch Fläche I, wobei II streifend beleuchtet wird. Man dreht hierbei das Prisma mit dem Teilkreis vor dem Fernrohr oder das Fernrohr mit dem Kreis um das Prisma, bis wieder auf die Grenze zwischen hell und dunkel eingestellt ist. Dieser Drehungswinkel, um die Fläche III herum gezählt, heifse w, dann ist $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}(w - \varphi)$.

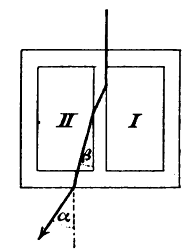
Man berechnet n aus der Formel

$$n^2 = 1 + \left(\frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^2.$$

Denn man hat (Fig.) $n = \sin\alpha/\sin\beta$ und von dem streifenden Eintritt an I noch $n = 1/\sin(\varphi - \beta)$. Die Elimination von β aus beiden Gleichungen gibt obigen Ausdruck.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 606. 1882. Ein Refraktometer für stark brechende Flüssigkeiten mit streifender Incidenz und veränderlichem brechenden Winkel s. Pulfrich ZS. f. Instr. 1899, 335.

Bestimmung kleiner Unterschiede von B.-V. flüssiger Körper mit streifendem Eintritt im Doppeltrog (Hallwachs). Die beiden Flüssigkeiten, z. B. Lösungsmittel und Lösung, sind in einem rechteckigen Glastrog durch eine Scheidewand getrennt; durch die schwächer brechende fällt Licht streifend auf die Wand. Man bestimmt den Winkel α der austretenden Lichtgrenze mit der Normalen der Austrittsfläche. Dann ist $n_2 - n_1 = \sin^2\alpha/(n_1 + n_2)$, wo $n_1 + n_2$ nur genähert bekannt zu sein braucht.



Umdrehung der Richtung und Mittelnehmen eliminirt etwaige Keilgestalt der Platten. Kleine Unterschiede lassen sich bis in die sechste Decimale bestimmen.

Beweis. Planparallele Schichten beeinflussen die schliefsliche Richtung nicht. Es ist $n_1/n_2 = \cos\beta$, also $\sin\beta = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}/n_2 = \sqrt{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1)}/n_2$. Dies setze man ein in $n_2 = \sin\alpha/\sin\beta$.

Näheres: Hallwachs, Wied. Ann. 50, 577. 1893.

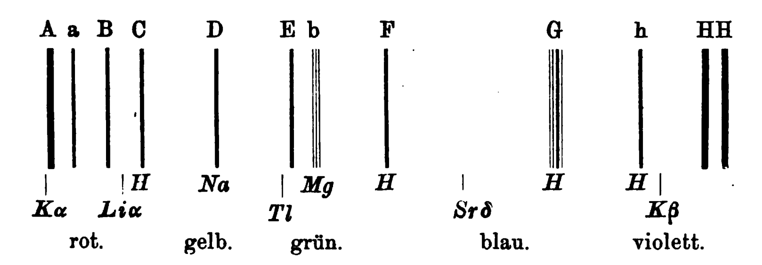
Die Refraktometer von Abbe und Pulfrich s. **63**, III u. IV.

Die Genauigkeit der Prismenmethoden wächst im allgemeinen mit dem Prismenwinkel.

II*a* und *d* sind für Glasprismen bis zu 70—80° brauchbar; gebräuchlich ist ein Winkel von etwa 60°. II*b* und *c* können höchstens auf Prismenwinkel gegen 40°, für stark brechendes Glas nur bis etwa 35° angewandt werden.

Dispersion. Wellenlänge oder Farbe.

Das B.-V. des Lichtes wächst mit abnehmender Wellenlänge oder zunehmender Schwingungszahl und mufs sich deswegen auf einfarbiges Licht von einer bestimmten Wellenlänge beziehen. Im Sonnenlicht, welches man mit dem Heliostat horizontal auf den Spalt wirft, benutzt man die Fraunhoferschen Linien (1814). Die Figur enthält die wichtigsten derselben im sichtbaren Teil des Spektrums nach ihrer ungefähren Lage im prismatischen Spektrum. Für das Gedächtnis merke man sich, dafs ADFGH ungefähr gleichen Abstand von ein ander haben. Die Wellenlängen s. in Tab. 23.



Um A und a zu sehen, stellt man den Spalt nicht zu eng und hält ein rotes Glas vor. D zeigt sich bei engem Spalte und starker Vergröſserung als eine feine Doppellinie.

Andere Lichtquellen s. in **59a.**

Zur Sichtbarmachung des ultravioletten Lichtes dient ein „fluorescirendes Okular", welches am Ort des Fadenkreuzes eine fluorescirende Platte aus Gelatine oder Uranglas trägt. Von Glas wird ultraviolettes Licht teilweise erheblich absorbirt, so daſs man auf Prismen etc. aus Quarz oder noch besser Fluſsspat angewiesen ist. Vgl. S. 226.

Der Unterschied der Brechungsverhältnisse für zwei bestimmte Farben (gewöhnlich für C und F Fraunhofer) wird Dispersionsvermögen genannt. Relative Dispersion heiſst das Verhältnis $(n_F - n_C) : (n_D - 1)$.

Vgl. Tab. 22, 23 und 24.

Als Funktion der Wellenlänge λ (65) stellt man das Brechungsverhältnis n dar durch die Reihe $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4 \cdots$; nach Lommel und Wüllner $n^2 - 1 = \dfrac{A + B\lambda^2}{1 - C/\lambda^2}$; nach Ketteler-Helmholtz durch

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2 - P} - \frac{C}{\lambda^2 - Q}.$$

Über mikrometrische Bestimmung der Dispersion s. Pulfrich, ZS. f. Instr. 1893, 267. — Spektrometer neuerer Form s. z. B. bei Lummer in Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl. Bd. II 1, S. 222, 231. 1897.

Anomale Dispersion. Christiansen; Kundt; 1870. In der Nachbarschaft eines intensiven Absorptionsstreifens, (z. B. in Cyanin- oder Fuchsinlösungen) wird der gewöhnliche regelmäſsige Gang von n mit λ unterbrochen. Von der roten Seite des Spektrums kommend wächst n mit abnehmender Wellenlänge vor dem Absorptionsgebiet unter Umständen sehr stark und setzt in dem Gebiet der wiederauftretenden Durchlässigkeit mit sehr kleinen Werten wieder ein, die dann aber mit weiter abnehmendem λ rasch wachsen.

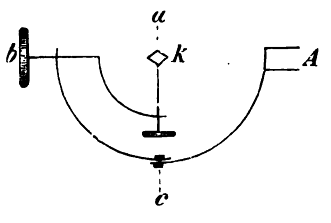
61. Messung eines Flächenwinkels mit dem Wollaston'schen Reflexionsgoniometer.

Um die Flächenwinkel sehr kleiner Körper zu messen bedarf es einer besonderen Orientirvorrichtung, die allerdings an manchen Spektrometern vorhanden ist. Manche Krystallflächen sind aber so unvollkommen, dafs ihre Bilder besser mit blofsem Auge als mit dem Fernrohr beobachtet werden.

Die Drehaxe soll einer entfernten oberen Horizontalmarke O (Fenstersprosse, Dachfirst) parallel stehen; die zu messende Krystallkante sei der Axe bereits (s. unten) parallel gemacht. Man hält nun das Auge dicht vor den Krystall, dreht an der Axe, bis das in einer Krystallfläche gesehene Bild der genannten Marke O mit einer direkt gesehenen tiefer gelegenen ebenfalls horizontalen Marke U (Rand des Fufsbodens; Spiegelbild der oberen Marke in einem hinter dem Goniometer befestigten Spiegel) zusammenfällt, und liest den Stand der Kreisteilung ab. Dann dreht man den Kreis mit dem Krystall, bis das Spiegelbild von O in der anderen Krystallfläche mit U zusammenfällt, und liest wiederum ab. Der Winkel, um welchen man gedreht hat, ergänzt den gesuchten Winkel der zwei Flächen zu 180°.

Eine etwaige zweite, koncentrische Drehaxe ist zur „Repetition" der Winkelmessung bestimmt.

Einstellung der Kante parallel der Axe. Zur systematischen Orientirung dient ein nach drei Richtungen drehbarer Halter. A ist die Axe des Kreises, a, b, c sind die Orientirungsaxen, k der mit etwas Wachs befestigte Krystall.



1. Man stelle durch Drehung um c die Vorrichtung so, dafs b die Fortsetzung von A bildet, d. h. beim Drehen von A ruhig läuft. Nun wird durch Drehen um a die Krystallfläche I zu A, also auch zu b parallel gestellt. Vgl. darüber unten.

2. Man verdrehe c um etwa 60 bis 90°, so wird sich im allgemeinen die Stellung von Fläche I geändert haben. Durch Drehung um b stellt man I wieder parallel zu A, so dafs I jetzt

parallel zu A und zu b, also senkrecht auf c steht. Drehen um c ändert also die Lage von Fläche I nicht mehr.

3. Durch Drehung um c stellt man die Fläche II parallel zu A.

Bei jeder folgenden Einstellung einer Axe dürfen die vorher orientirten nicht mehr gedreht werden!

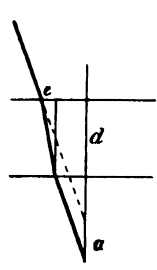
Den Parallelismus einer Fläche mit der Axe A erkennt man mittels zweier in der Ebene des Teilkreises liegender entfernter, zur Drehaxe senkrechter Marken (vertikale Fensterleiste und ein darunter gezogener Strich auf dem Fufsboden; oder Schornstein, Blitzableiter etc. und sein Bild in dem festen Spiegel des Goniometers). Die Fläche ist der Axe parallel, sobald bei passender Drehung um A das Spiegelbild der oberen Marke in der Fläche mit der unteren Marke zusammenfällt.

Feinere Mefsapparate von Fuefs s. Liebisch, physik. Krystallogr. S. 379. Leipz. 1891; auch Czapski, ZS. f. Instr. 1893, 1 u. 242.

62. Lichtbrechungsverhältnis einer Planplatte unter dem Mikroskop.

Die Platte habe die Dicke d und das gesuchte B.-V. n.

Durch die Platte gesehen erscheint ein Objekt um $a = d(n-1)/n$ näher. Denn wenn man in den beiden, in Wirklichkeit sehr spitzen, rechtwinkligen Dreiecken, welche e als kleine Kathete haben (Fig.), die Hypotenusen den gröfseren Katheten d bez. $d-a$ merklich gleich annimmt, so stellt $e/(d-a)$ bez. e/d den Sinus des Einfalls- bez. Brechungswinkels des Strahles vor. Also hat man $n = d/(d-a)$, oder $a = d(n-1)/n$.



1. Ein Mikroskop sei auf ein Objekt scharf eingestellt. Bringt man zwischen das letztere und das Objektiv die Planplatte, so wird man den Abstand um eine Strecke a vergröfsern müssen, um wieder deutlich zu sehen. Das B.-V. der Platte ist dann $n = d/(d-a)$.

2. Auf der Vorder- und der Hinterseite der Platte befinde sich je ein gut sichtbarer Punkt. Um von dem einen auf den anderen einzustellen, sei eine Verschiebung um die Strecke h notwendig. Dann ist, wie man aus obigem leicht ableitet, $n = d/h$.

3. Auf der Vorderfläche der Planplatte wird ein gut sichtbarer Punkt mit weifser Farbe angebracht. Man stellt das

Mikroskop auf denselben ein. Um sodann das von der Rückseite der Platte zurückgeworfene Spiegelbild des Punktes zu sehen, wird man den Abstand zwischen Mikroskop und Platte um eine Strecke h verkleinern müssen. Das B.-V. der Platte ist $n = 2d/h$.

Bei dem 3. Verfahren beleuchtet man mit auffallendem Licht und verdunkelt den Hintergrund oder noch besser, man versilbert die Platte auf der Rückseite (**8**, 6).

Um die Gröfse der notwendigen Verschiebungsstrecken des Mikroskopes genau zu bestimmen, kann die Schraubenverstellung des Mikroskopes dienen, wenn die Höhe des Schraubenganges (**21**, 2 u. 3) bekannt ist und wenn der Schraubenkopf eine Kreisteilung besitzt.

Die genaue Einstellung wird am besten mit einem Fadenkreuz im Okulare danach beurteilt, dafs dieses keine Parallaxe gegen das Bild zeigt. Am geeignetsten ist ein Objektiv von kurzer Brennweite und nicht zu grofsem Durchmesser. Dann kann bei dickeren guten Platten die dritte Decimale des B.-V. noch brauchbar werden.

Über die Bestimmung des Brechungsverhältnisses einer Flüssigkeit aus dem Axenwinkel eines Krystalles s. **70a** am Schlufs.

63. Lichtbrechungsverhältnis aus dem Winkel der totalen Reflexion (Wollaston; 1802).

Der gröfste Brechungswinkel Φ, mit dem ein Strahl aus einem Mittel in ein stärker brechendes zweites eintreten kann, entspricht streifendem Eintritt, d. h. es gilt für ihn die Bedingung $\sin 90^0/\sin\Phi$ oder $1/\sin\Phi$ ist gleich dem B.-V. aus dem ersten in das zweite Mittel d. h. gleich N/n, wenn n und N die B.-V. beider Mittel gegen Luft sind. Dieselbe Beziehung gilt für den Grenzwinkel der totalen Reflexion, wenn ein in dem Mittel N verlaufender Strahl das Mittel n trifft. Die Beobachtung des Grenzwinkels Φ liefert also die Beziehung

$$\frac{n}{N} = \sin\Phi,$$

woraus, wenn das B.-V. von einem der Mittel bekannt ist, dasjenige des anderen berechnet werden kann.

Diese Bestimmungsweise erfordert im allgemeinen einfachere Hilfsmittel, als die von **60**, und besitzt den Vorzug, auf unvollkommen durchsichtige Körper anwendbar zu sein.

Eine genaue Bestimmung mufs auch hier sich auf Licht von einer bestimmten Farbe beziehen (S. 235).

I. Mit dem Prisma (F. K.).

1. Brechungsverhältnis des Prismas. Man beleuchtet die eine Fläche I eines Prismas, während das Spektrometerfernrohr auf die Fläche II gerichtet ist, von innen d. h. durch die dritte Fläche hindurch, mit diffusem homogenem Licht (**59a**). Die Grenze der totalen Reflexion an I erscheint als eine scharfe Grenzlinie zwischen hell und weniger hell. Auf diese Linie wird eingestellt. Die Richtung des Fernrohrs ist dieselbe wie die Richtung S der Figur S. 234, d und genau so wie dort, auch nach derselben Formel, erhält man das B.-V. des Prismas.

2. Brechungsverhältnis eines anderen Körpers. Man klebt diesen Körper mit einer stark brechenden Flüssigkeitsschicht (Cassia-Öl, Arsenbromür) auf die Prismenfläche I und verfährt nun wie oben. Falsches Licht wird durch Schwärzen der störenden Flächen abgeblendet. Sowohl das Prisma wie die Flüssigkeit müssen stärker brechen als der Körper.

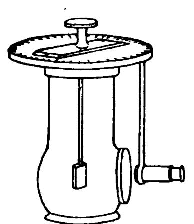
Ist N das B.-V. des Prismas, φ der Prismenwinkel, α der Winkel der Sehrichtung nach der Grenze der totalen Reflexion mit der Normalen auf der anvisirten Prismenfläche (Fig. S. 234, d), so wird das B.-V. des angeklebten Körpers

$$n = \sin\varphi \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha} - \cos\varphi \sin\alpha.$$

Denn es ist $N = n/\sin(\varphi - \beta) = \sin\alpha/\sin\beta$, woraus der Ausdruck folgt. Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 607. 1882. — Drehapparate für angedrückte Krystalle von Fuefs-Liebisch s. ZS. f. Instr. 1884, 185; 1885, 13.

II. Totalreflektometer (F. K.).

Unten an der Drehaxe wird, nach Entfernung des Fläschchens, der Körper mit Kork etc. so befestigt, dafs seine spiegelnde Fläche central und der Axe parallel ist. Ersteres wird mittels einer Schneide, letzteres an einem der Drehaxe parallelen festen Spiegel erkannt, in dem das Auge oder ein Flämmchen in gleicher Höhe erscheinen mufs, wie in der zu orientirenden Fläche. Rückseite und Umgebung des Körpers seien mit Tusche geschwärzt.



Das kleine Fernrohr soll der Kreisebene parallel und auf unendlich eingestellt sein. (Um dies zu prüfen oder zu bewirken kann man das Instrument in seinem Stativ um 90° umlegen.) Die richtige Stellung des Fernrohrs wird daran erkannt, dafs ein damit anvisirter entfernter Punkt in der Kreisebene liegt. Ohne Umlegen orientirt man (Dorn) mit zwei Papierstreifen von einer Länge gleich dem Abstand der Fernrohraxe von der Teilung, vertikal so an zwei Fenster geklebt, dafs

die Oberkanten in der Kreisebene liegen. Das Spiegelbild der einen Unterkante in der schräg gestellten Fläche mufs dem dicht herangehaltenen Auge in der Höhe der anderen Unterkante erscheinen. Im richtig stehenden Fernrohr müssen dann die Spiegelbilder in der Visirhöhe auftreten. Je kleiner oder unvollkommener die spiegelnde Fläche, desto genauer mufs centrirt werden.

Nun stülpt man das mit einer stärker als der Körper brechenden Flüssigkeit (Schwefelkohlenstoff 1,63, α-Monobromnaphtalin 1,66, Methylenjodid 1,74) gefüllte Fläschchen von unten über den Körper, umgibt das Fläschchen mit gut durchscheinendem, nötigenfalls mit Petroleum bepinseltem Seidenpapier und beleuchtet auf einer Seite mit der Sodaflamme. Bei passender, durch Probiren zu findender Stellung der spiegelnden Fläche und der Lampe wird dann das auf grofse Entfernung akkommodirte Auge oder Fernrohr das Gesichtsfeld der Fläche in eine helle und in eine weniger helle Hälfte geteilt sehen, auf deren Grenzlinie man einstellt.

Unvollkommen plane Flächen, z. B. natürliche Krystallflächen, beobachtet man am besten ohne vergröfserndes Fernrohr. Geeignet ist das Diopter mit halber Linse, durch welche der Faden deutlich gesehen wird, während die andere Hälfte der Pupille an der Linse vorbei ein nicht vergröfsertes Gesichtsfeld hat. Oder man gebraucht das Fernrohr umgekehrt.

Durch Drehen der Alhidade stellt man auf die Grenzlinie ein und liest den Teilkreis ab. Dann dreht man Fläche und Lampe nach der anderen Seite und stellt wieder ein. Der halbe Winkel zwischen beiden Stellungen ist der Grenzwinkel Φ der totalen Reflexion zwischen der Flüssigkeit und dem Körper, also $n = N \sin \Phi$, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit bedeutet.

Das B.-V. des reinen Schwefelkohlenstoffs beträgt für Natriumlicht bei 20° 1,6277 und nimmt auf +1° um 0,00080 ab. Die Temperatur mufs also sorgfältig beobachtet werden. Ein Schirm, welcher zugleich den Hintergrund dunkel erhält, mit einer durch eine starke Glasplatte bedeckten Öffnung vor der Flamme vermindert die Erwärmung.

Krystalle. Doppelbrechende Objekte geben im allgemeinen zwei Brechungsverhältnisse, also zwei Grenzen; an deren innerem sowie äufserem Paar führt man die beschriebene Messung aus. Ein einaxiger Krystall wird am bequemsten in einer zur Hauptaxe senkrechten Fläche (siehe **70**) untersucht. Der horizontal polarisirte (d. h. im Nicol'schen Prisma bei vertikaler Stellung der gröfseren Diagonale verschwindende) Strahl ist der ordentliche, der andere der aufserordentliche.

Ist die Krystallfläche der optischen Axe parallel, so bekommt man beide Hauptbrechungsverhältnisse, wenn die optische Axe der Drehaxe parallel liegt. Horizontal polarisirt ist der aufserordentliche Strahl.

Eine beliebig gelegene Krystallfläche liefert stets den ordentlichen Strahl; sie enthält aber auch eine zur optischen Axe senkrechte Richtung (Halbirungslinie des seitlichen Winkels in der Spaltfläche eines Rhomboeders; Grundlinie des Dreiecks in der Quarzpyramidenfläche). Diese Richtung horizontal gestellt liefert die beiden Hauptbrechungsverhältnisse.

Ein optisch zweiaxiger Krystall mit einem Schliff parallel einem Hauptschnitt (70) gibt zwei Hauptbrechungsverhältnisse, wenn eine optische Elasticitätsaxe horizontal gestellt ist. Drehung um 90° liefert das dritte Hauptverhältnis und eins der obigen noch einmal.

Flüssigkeiten. *a*) Brechungsverhältnis N der Flüssigkeit im Fläschchen. Um dieses mit dem Totalreflektometer selbst zu messen, nimmt man eine kleine Planplatte von bekanntem B.-V. n (z. B. Bergkrystall mit den Brechungsverhältnissen 1,5442 und 1,5533 für Na) oder eine Luftschicht hinter einer Planplatte. Man hat dann

$$N = \frac{n}{\sin \Phi} \quad \text{oder bei Luft} \quad N = \frac{1}{\sin \Phi}.$$

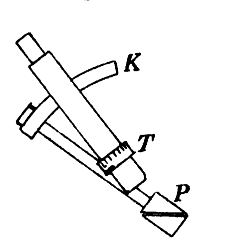
b) Ein Flüssigkeitstropfen hinter einer Planplatte kann ebenso untersucht werden wie ein fester Körper.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 4, 1. 1878; über Krystallmessung W. Kohlrausch, ib. 6, 86. 1879; besondere Einrichtungen zu diesem Zweck auch bei Klein, neu. Jahrb. f. Mineral. 1879. Über die Anwendbarkeit des Totalreflektometers auf weifses Licht mit Hilfe eines Spektroskops vgl. Pulfrich, ib. 30, 487. 1887; ZS. f. Instr. 1887, 55. Über die Anwendung einer gläsernen Halbkugel anstatt der Flüssigkeit (Krystallrefraktometer nach Abbe), wodurch Grenzkurven bequemer sichtbar werden, s. Czapski, ZS. f. Instr. 1890, 246 u. 269 und Pulfrich, ib. 1899, 9. — Über objektive Darstellung und Photographie der Kurven und ein kombinirtes Totalreflektometer und Goniometer s. Leiss, ib. 1899, 220; ZS. f. Kryst. u. Miner. 30, 357. 1898.

III. Refraktometer von Abbe.

Dasselbe dient besonders für Flüssigkeiten. Es genügt ein Tropfen, den man zwischen die Trennungsflächen des Doppelprismas P aus stark

brechendem (leicht verletzlichem!) Glase bringt. Man legt hierzu das Instrument um, schiebt das eine Prisma vorsichtig ab, und nach Aufbringen der Flüssigkeit wieder auf. Das Instrument benutzt den, dem Grenzwinkel totaler Reflexion gleichen Grenzwinkel des Eindringens. Strahlen, die der Beleuchtungsspiegel *S* in die Flüssigkeit wirft, dringen in das obere Prisma nur innerhalb dieses Winkels ein, so dafs man bei richtiger Neigung der Prismen in dem auf Parallelstrahlen eingestellten Fernrohr das Gesichtsfeld in homogenem Licht scharf abgegrenzt sieht.



Man macht mittels des Okularauszuges das Fadenkreuz deutlich sichtbar. Bei Anwendung von Natriumlicht hat man alsdann das Prisma mit dem Zeiger nur so zu drehen, dafs die Lichtgrenze auf das Fadenkreuz fällt, dann gibt die Teilung auf dem Kreisbogen *K* direkt das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit für Natriumlicht an.

Unter Anwendung gewöhnlichen weifsen Lichtes erhält man folgendermafsen zugleich die Dispersion der Flüssigkeit. Das Gesichtsfeld ist jetzt im allgemeinen gefärbt. Man stellt den Kompensator, d. h. die Trommelteilung *T* (mit welcher zwei geradsichtige Prismen sich entgegengesetzt drehen) so, dafs die Färbung einer scharfen Grenze Platz macht. Nun bringt man die Grenze auf das Fadenkreuz und liest Alhidade und Trommelteilung ab. Dann sucht man eine zweite Stellung der Trommel mit scharfer Grenze, stellt wieder ein und liest ab.

Das Mittel der beiden Alhidadenstellungen gibt das Brechungsverhältnis für Natriumlicht; die Dispersion wird nach einer, jedem Instrument beigegebenen Tabelle berechnet.

Ein fester Körper wird mit einem Tropfen einer stark brechenden Flüssigkeit (Cassiaöl, Arsenbromür) unter das obere der beiden Prismen geklebt. Durchsichtige Körper werden mittels des Beleuchtungsspiegels durch Tageslicht oder Lampenlicht durchfallend beleuchtet. Andere erleuchtet man auffallend von der Seite. Einiges Probiren wird die Grenze deutlich sichtbar liefern.

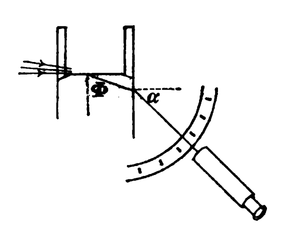
Als Probe für die Richtigkeit, event. für die Korrektion der Teilungen dienen bekannte Flüssigkeiten (Tab. 24), insbesondere das Wasser, oder eine bekannte Glas- oder Bergkrystallplatte (vor. S.). Die Alhidade mufs mit den Prismen sehr fest

verbunden sein. Eine Unsicherheit liegt für manche Flüssigkeiten in der Temperatur.

Vgl. Abbe, Apparate z. Best. des Brechungsvermögens, Jena 1874 und Sitz.-Ber. d. Jen. Ges. f. Med. u. Nat. 1879, Febr. 21.

IV. Refraktometer von Pulfrich.

Das Instrument benutzt nicht totale Reflexion, sondern den umgekehrten Vorgang, nämlich streifenden Eintritt, der aber auf dasselbe hinausführt. Die Flüssigkeit wird auf die Oberfläche eines Glaswürfels gebracht, über welchen zu diesem Zweck ein Glascylinder gekittet ist. In $^3/_4$ bis 1^m Entfernung, ein wenig höher als die obere Glasfläche, stellt man eine Natriumflamme auf und vereinigt ihre Strahlen mit einer Sammellinse auf dem unteren Rand des Cylinders. Auf die Grenze zwischen hell und dunkel richtet man von unten das vertikal drehbare, auf unendlich eingestellte Fernrohr, dessen Teilkreis den Grenzwinkel α des Austritts mit der Normalen auf der Austritts-Glasfläche gibt.



Hat das Glas das B.-V. N, so hat die Flüssigkeit

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}.$$

Es ist $N/n = 1/\sin\Phi$, andrerseits $N = \sin\alpha/\sin(90 - \Phi) = \sin\alpha/\cos\Phi = \sin\alpha/\sqrt{1 - n^2/N^2}$, also $N^2 - n^2 = \sin^2\alpha$ und $n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}$.

Es mufs $n < N$ sein. Würfel mit $N = 1{,}615$ bez. 1,78 sind gebräuchlich. Eine Tabelle für n wird beigegeben. Die richtige Orientirung der Teilung kann mit Wasser $n_{15^0} = 1{,}3336$, $n_{20^0} = 1{,}3332$ geprüft werden.

Mit einer Heizvorrichtung kann in höherer Temperatur beobachtet werden. Eine Tabelle korrigirt die gleichzeitige Änderung der Brechung im Glase.

Mittels einer Trennungsfläche aus schwarzem Glase können mehrere Flüssigkeiten gleichzeitig, also bei derselben Temperatur beobachtet werden.

Feste ebene Körper lassen sich durch Vermittelung eines stärker brechenden Flüssigkeitstropfens auf die Glasfläche bringen und ebenso untersuchen. Gepulverte feste Körper können untersucht werden, indem man sie auf der Glasfläche mit einem Flüssigkeitsgemisch (Alkohol, Äther, Aceton, Benzol, Toluol, Bromnaphtalin) übergiefst, welches man durch Ausprobiren abändert, bis die dem festen Körper entsprechende Lichtgrenze scharf erscheint (Le Blanc).

Pulfrich, ZS. f. Instr.: die einfache Form (Wolz in Bonn) 1888, 47; die vollkommenere (Zeiſs, Jena) 1895, 389. Auch Pulfrich, das Totalreflektometer etc. Leipz. 1890. Le Blanc, ZS. f. phys. Ch. 10, 433. 1892. Vgl. auch Traube, Physikalisch chemische Methoden S. 164.

V. Mit dem Spektrometer.

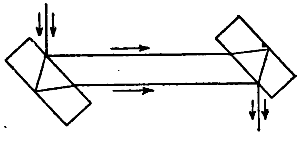
a) Durch eine sehr dünne gröſsere planparallele Platte in einem Flüssigkeitstrog mit zwei parallelen ebenen Wänden fällt paralleles Licht vom Spalt (**60**), den man mit dem Fernrohr durch die Platte anvisirt. Die beiden schrägen Stellungen der Platte, in denen das Spaltbild (bei Anwendung homogenen Lichtes) plötzlich verschwindet, liegen um 2Φ auseinander. Bringt man zwischen den Trog und das Fernrohr ein geradsichtiges Prisma, und beleuchtet mit Sonnenlicht, so erscheint ein Fraunhofer'sches Spektrum (S. 236). Durch Drehung der Objektplatte kann man die Grenze der totalen Reflexion auf irgend eine Linie einstellen. — Das B.-V. der Flüssigkeit selbst gibt ebenso eine dünne Luftschicht in einem Glaskästchen mit planparallelen Wänden. Für die Rechnung gelten die Formeln aus II.

E. Wiedemann, Pogg. Ann. 158, 375. 1876; Terquem und Trannin, ib. 157, 302. 1876.

b) Das Verfahren II läſst sich mit dem Spektrometer (**60**) ausführen, wenn man einen Flüssigkeitstrog mit Planwand fest aufstellt, in dem die Objektplatte mit dem Teilkreise drehbar ist.

63a. Bestimmung kleiner Änderungen des Brechungsverhältnisses mit dem Interferenzrefraktor (Jamin 1856).

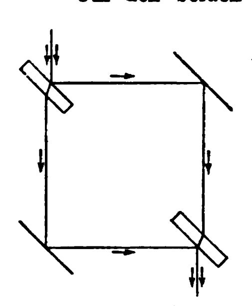
Zwei gleiche, dicke (z. B. 3 cm), planparallele, am besten rückseitig versilberte Glasplatten stehen sich parallel gegenüber, mit der Verbindungslinie ihrer Mitten einen Winkel von 45—50° bildend. Ein auf I fallender Lichtstrahl liefert durch Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche zwei Strahlen. Durch Reflexion an II liefert jeder Strahl wieder zwei Strahlen, von denen die beiden gezeichneten mit einander austreten und, sobald die Platten etwas verdreht werden, ein System von Interferenzstreifen erzeugen. Die übrigen Reflexe, z. B. der des oberen Strahles an der zweiten Platte, seien durch Schirmchen vom Auge abgeblendet.



In den Weg der beiden Strahlen zwischen den Platten mögen zwei optisch gleiche Körper geschoben sein. Nimmt man nun an dem Wege

des einen Strahles Änderungen vor, etwa bezüglich Temperatur, Druck, Koncentration, Füllung mit einem Gase etc., während man die Streifen im Auge behält, so wandern diese. Aus ihrer Verschiebung, der Länge der eingeschalteten Körper und der Wellenlänge des Lichtes läfst sich die der Zustandsänderung entsprechende Änderung des Brechungsexponenten bestimmen (II).

Um den beiden Teilstrahlen einen, für die meisten Anwendungen bequemeren, gröfseren Abstand von einander zu geben, ist die Anordnung mit zwei Platten, die in derselben Ebene liegen, und mit zwei Hilfsspiegeln zweckmäfsig (Mach, Zehnder). Auch hier sind die übrigen Reflexe, welche die abzublendenden Seitenbilder veranlassen, nicht gezeichnet.



Endlich kann der Zweck, Flächen zu bekommen, die einen Teil des Lichtes reflektiren und einen anderen Teil durchlassen, auch durch ganz dünne Luftschichten zwischen Prismen erreicht werden; dadurch, dafs dann die Abblendung von Seitenbildern fortfällt, wird ein gröfseres Gesichtsfeld erzielt (Mach).

Der Gebrauch zu den Messungen unterscheidet sich bei den verschiedenen Anordnungen nicht wesentlich.

Vgl. Zehnder, ZS. f. Instr. 1891, 275; Mach, ib. 1892, 89. Eine zusammenfassende Beschreibung von Lummer in der ZS. Der Mechaniker 8. Jahrg. 1900, S. 25 ff. — Abbildungen und Beschreibungen auch in dem Katalog der Zeifs'schen Werkstätte in Jena.

Temperaturmessung. Wenn in einem Mittel die Änderung der Wellenlänge durch die Temperatur bekannt ist, so kann der Int.-R. als Thermometer dienen. In den Grenzen, innerhalb deren in einem Gase, gegen das Vakuum gemessen, $n-1$ der Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, gilt zwischen der Wellenlänge Λ im leeren Raum und λ im Gase von der abs. Temperatur T, wenn bei 0° C. das Br.-V. $= n_0$ ist, die Beziehung $\Lambda = \lambda[1+(n_0-1)273/T] = \text{Const.}$ Auf einer Strecke, die im Vakuum P Wellenlängen enthält, liegt dann bei T eine um $p = P(n_0-1)273/T$ gröfsere Anzahl. Die Änderung von p mit der Temperatur läfst sich messen und T läfst sich daraus berechnen.

Über einen Vorschlag, dies auszuführen, s. D. Berthelot, C. R. 120, 831. 1895; 126, 412. 1898. — Die Empfindlichkeit der Methode: $dp/dT = -P(n_0-1)273/T^2$ nimmt mit steigendem T rasch ab.

I. Aufstellung des Apparates.

Die beiden Platten sind gegenseitig sehr fest aufgestellt, entweder gemeinsam auf schwerem Stativ montirt (z. B. die Ausführung der Zeifsschen Werkstätte), oder, um gröfseren Raum zu bieten, getrennt auf besonderen Pfeilern.

Wird eine Natriumflamme, am besten in schwarzem Cylinder mit

Fenster, etwa 50 cm vor der ersten Platte aufgestellt, so erblickt man, ungefähr auf unendlich akkommodirend, durch die zweite Platte die Streifen sofort oder nach kleinen Drehungen der Platte um eine Vertikal- und eine Horizontalaxe. Man dreht, bis die Streifen scharf, parallel und gerade erscheinen; auf ihre Richtung kommt es häufig nicht an. Meist wird man jedoch die vertikale oder horizontale (cf. unten u. S. 248) Richtung vorziehen.

Zum Beobachten dient am besten ein festes Fernrohr mit einer spaltförmigen Blende vor dem Objektiv, die Spaltrichtung senkrecht zu den Streifen. Sollen Bruchteile der Streifenbreiten gemessen werden (es kann dazu auch ein Kompensator dienen, siehe am Schlufs), so ist ein Okularmikrometer zweckmäfsig. Zu viele Streifen im Gesichtsfeld veranlassen leicht Irrtümer beim Zählen; eventuell blende man einige ab.

Nach Einführung der Versuchsröhren etc. zwischen die Platten und eventuell Abblenden der beiden äufseren Bilder werden Streifenrichtung, Streifenabstand und Fernrohr endgiltig eingestellt.

Ist Beobachtung mit weifsem Licht nötig (III), so bewirkt man zunächst mit Natriumlicht horizontale (S. 248) Streifen von beträchtlichem Abstand. Mit weifsem Licht (durch Schliefsen des Zuges am Brenner) wird man dann durch sehr langsames Drehen der zweiten Platte um ihre Vertikalaxe farbige Streifen in das Gesichtsfeld bringen. Der in ihrer Mitte liegende farblose Streifen wird mitten ins Gesichtsfeld gebracht und das Fernrohr dann auf gröfste Deutlichkeit eingestellt.

Unter Umständen wird eine Anordnung mit parallelem weifsem Licht (Sonne) vorzuziehen sein (Quincke, Pogg. Ann. 132, 50. 1867). Die unvermeidlichen Erwärmungen des Apparates und die Temperaturschwankungen des Beobachtungsraums bewirken aber leicht ein störendes Wandern der Streifen.

Ein Trog mit Alaunlösung vor der Lichtquelle und Abkürzung der Beleuchtungszeit ist auch bei schwachen Lichtquellen anzuraten.

II. Messung bei stetiger Zustandsänderung.

Läfst sich die Änderung eines Körpers so kontinuirlich und überall gleichmäfsig vornehmen, dafs man dabei den Gang der Streifen verfolgen kann, wie z. B. bei Druckänderung in einer Flüssigkeit, der Verdünnung eines Gases u. dgl.: so zählt man einfach, um wieviele Streifenbreiten und Bruchteile derselben sich das mit homogenem Licht (Na) erzeugte Streifensystem im Fernrohre verschiebt. Ist dann

L die Länge der durchstrahlten Schicht,

λ die Wellenlänge des Lichtes nach Tab. 23,

s die Anzahl der durchgewanderten Streifenbreiten,

n_1 und n_0 der Brechungsexponent nach und vor der Änderung,

so ist
$$n_1 - n_0 = s\lambda/L.$$

Denn wenn $\lambda_0 = \lambda/n_0$ und $\lambda_1 = \lambda/n_1$ die Wellenlängen in dem ursprünglichen und dem abgeänderten Mittel, so ist offenbar

$$s = L/\lambda_1 - L/\lambda_0 = (n_1 - n_0) L/\lambda.$$

III. Messung bei unstetiger Zustandsänderung.

Die Verschiebung der Streifen kann nicht immer zählend verfolgt werden (z. B. beim Auflösen eines Salzes bez. Ersetzen einer Lösung durch eine andere). Dann schlägt man folgenden Weg ein.

Man nimmt weifses Licht. Die (horizontalen) farbigen Streifen liefern durch ihr verschiedenes Aussehen das Mittel, den im Natriumlicht nicht unterscheidbaren Streifen eine Numerirung von einer dem farblosen Streifen (I) benachbarten schwarzen Franse an zu geben. Die durch die Zustandsänderung eingetretene Verschiebung dieses Nullpunktes wird gefunden, indem man bei einfarbigem Licht die zweite Platte um ihre Vertikalaxe, die Streifenverschiebung abzählend, so weit dreht, bis wieder im weifsen Licht der Nullpunktsstreifen einsteht. Dies gibt bis auf eine Korrektion die Anzahl der infolge der Änderung des Körpers gewanderten einfarbigen Streifen, aus welcher die Änderung des Brechungsexponenten wie unter II bestimmt wird.

Nur horizontale Streifen können im weifsen Licht erscheinen. Der Gangunterschied φ zweier interferirender Strahlen im Refraktor ist nämlich (Verdet-Exner l. c. am Schlufs) $\varphi = 2nd(\cos b - \cos b')$, wo d und n Dicke und Brechungsexponent der Platten, b und b' die Brechungswinkel der Strahlen in der ersten und zweiten Platte sind. Damit $\varphi = 0$, mufs $b = b'$ sein, was nur bei vertikaler gegenseitiger Neigung der Platten eintritt.

Die erwähnte Korrektion besteht in der Abänderung der im Vorigen beobachteten Streifenzahl um eine ganze Zahl; sie entspringt aus der Dispersion.

Die Messung findet, wie wir sahen, mittels Kompensation zweier sich entgegenwirkender Gangunterschiede statt, welche nicht für alle Farben gleichzeitig möglich ist, da die beiden entgegenwirkenden „Apparate" (Refraktor und eingeschalteter Körper) die Phasenunterschiede für verschiedene Farben nicht in demselben Verhältnis einführen. Einen farblosen Streif bekommt man für denjenigen aus dem Gegeneinanderwirken der beiden Apparate resultirenden Gangunterschied, der für alle Farben dieselbe Gröfse behält.

Führt z. B. der eine Apparat die Gangunterschiede für Rot und Blau im Verhältnis 7:9,8 ein, der andere im Verhältnis 7:10, so wird bei

Einführung von 7,5 bez. 10,5 Wellenlängen mit dem ersten und — 7 bez. — 10 mit dem zweiten Apparat der resultirende Gangunterschied für Rot und Blau = + 0,5 sein. Für die übrigen Farben tritt dann im allgemeinen nahe derselbe Gangunterschied 0,5 auf, so daſs wir einen diesem entsprechenden schwarzen Streif bekommen.

Jener der Achromasie entsprechende Gangunterschied ändert sich mit dem Wachsen des kompensirten Gangunterschiedes. Die farblose Linie wandert also gleichsam auf dem mit Na-Licht erhaltenen kompensirten Streifensystem und durchläuft dabei verschiedene Helligkeiten von Schwarz zu Weiſs, die der Helligkeit ihres Ortes im monochromatischen System entsprechen. Fällt sie auf einen dunkelen Streifen, so ist das farbige Streifensystem um eine schwarze Linie symmetrisch gruppirt, und wenn sie auf die Mitte eines hellen Streifens fällt, um eine weiſse Linie. Der Nullpunkt unserer Streifennumerirung wandert also langsam auf dem System fort.

Vgl. Sirks, Pogg. Ann. 140, 621; 141, 393. 1870. Die Beobachtung dieser Wanderung liefert auch die Dispersionsänderung; s. Hallwachs, Wied. Ann. 47, 396. 1892.

Um die Korrektion zu ermitteln, wird bei einem Hilfsversuch der zu untersuchende Körper in genügend kleinen Intervallen abgeändert, bis die achromatische Linie schwarz erscheint. Dann ändert man weiter ab, bis die farblose Linie das nächste Mal wieder schwarz erscheint. Daraus ergibt sich die Gröſse der Zustandsänderung, bez. der entsprechenden Streifenverschiebung, für welche sich die farblose Linie um eine Streifenbreite in zu beobachtender Richtung verschiebt. Man kann dann, sobald bei einem Versuch die ganze Streifenverschiebung ermittelt ist, immer sagen, welche Nummer einer der dunkelen Nachbarstreifen der achromatischen Linie ursprünglich hatte, d. h. wie weit er vom einmal gewählten Nullpunkt absteht.

Bei einer Lösung ist die einer bestimmten Koncentrationsänderung entsprechende Wanderung der farblosen Linie von der vorausgehenden Koncentration ziemlich unabhängig.

Je nachdem sich der Nullpunkt im Sinne der Streifenwanderung verschiebt oder entgegengesetzt, ist die Nummeränderung des zur Einstellung gewählten dunkelen Nachbarstreifs der achromatischen Linie von der gesamten Streifenverschiebung abzuziehen oder zu ihr zu addiren.

Da die Bruchteile der Streifen direkt mit dem Okularmikrometer gemessen werden, so dienen die Beobachtungen mit den Streifen im weiſsen Licht nur zur Ermittelung der ganzen

Anzahl Verschiebungen; die Korrektion beträgt also eine ganze Anzahl Wellenlängen.

Vgl. Siertsema, De Jamin'sche Interferentialrefractor, Proefschrift, Groningen 1890; Hallwachs l. c.

Jamin'scher Kompensator, bestehend aus zwei neben einander stehenden gleich dicken, schwach gegeneinander geneigten Glasplatten, die um eine ihrer Schnittlinie parallele Axe gedreht werden können. Dieser läſst sich zur Kompensirung der Gangunterschiede statt der Drehung der zweiten Platte oft vorteilhaft benutzen (s. Quincke l. c. S. 204). Für weiſses Licht ist bei der empirischen Graduirung zu beachten, was oben über die Wanderung der farblosen Linie gesagt wurde.

Vgl. noch über die allg. Theorie des Int.-Refraktors: Verdet-Exner, Wellentheorie d. Lichtes I, 94. 1881; Ketteler, Farbenzerstreuung d. Gase S. 29. 1865; Zehnder, Wied. Ann. 34, 91. 1888; über die Anordnung eines Interferenzrefraktors auch für Dispersion: Borgesius, Wied. Ann. 54, 221. 1895.

Über Vergleichung des B.-V. zweier Gase vor 2 Spalten mittels Beugungsfransen s. Lord Rayleigh, Proc. R. Soc. 59, 198; ZS. f. phys. Ch. 19, 364. 1896.

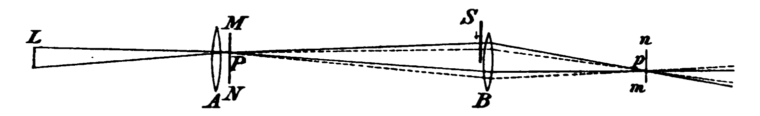
63b. Untersuchung optischer Inhomogenität nach der Schlierenmethode (Toepler).

Man bringt vor eine breite Flamme oder in das konvergirende Strahlenbündel des durch eine Linse gegangenen Sonnenlichtes eine kleine, geradlinig begrenzte Öffnung, entwirft von ihr mittels einer guten Linse A in nicht zu kleiner Entfernung (über 1 m) ein scharfes reelles Bild und bringt dicht hinter diesem das Objektiv eines auf den Ort, wo die Schlieren gesucht werden, akkommodirten Fernrohrs an. Und zwar soll dieser Ort nicht weit von der Linse A entfernt sein.

Nun werde mit einer Schneide, die einer der Begrenzungskanten der zuerst genannten Öffnung parallel ist, durch allmähliches Vorschieben der Ort des reellen Bildes vor dem Fernrohr verdeckt. In der geeigneten Stellung treten alsdann Ungleichheiten der Raumerfüllung, welche eine wenn auch nur kleine Änderung der Lichtbrechung bedingen, als erhellte oder verdunkelte Teile („Schlieren") des Gesichtsfeldes hervor. Um nichts zu übersehen, benutzt man nach einander verschieden gerichtete Kanten jener Öffnung.

Die Empfindlichkeit wächst mit dem Abstande. Für manche Zwecke sieht man die Schlieren auch mit dem bloſsen, an den Ort des reellen Bildes gehaltenen Auge.

Das Wesen der Erscheinung besteht in folgendem. *mn* sei das durch Objektiv *B* im Fernrohr entworfene Bild der Fläche *MN*, die sich in der Nähe der von *L* aus erleuchteten Linse *A* befindet; in *MN* werden die Schlieren gesucht. Die Stelle *P* bildet sich in *p* ab. Durch Vorschieben des Schirmes *S* wird *p* allmählich dunkler und verschwindet, wenn das ganze von *L* auf *p* fallende Lichtbündel abgeblendet ist.



Befindet sich nun in *P* eine prismatisch begrenzte Stelle anderer Lichtbrechung als die Umgebung, so wird das Lichtbündel verschoben (sein Konvergenzpunkt *p* bleibt dabei an seinem Orte), und je nachdem der Schirm von der einen oder der anderen Seite vorgeschoben wird, verschwindet das Bild *p* später oder früher als die Umgebung: es tritt in der Nähe der Grenze bei *p* eine Erhellung oder Verdunkelung gegen die Umgebung auf. Prismatische Wirkung aber wird ein abgegrenzter Raum anderer Brechbarkeit der Natur der Sache nach haben müssen.

Anordnung nach Abbe am Spektrometer. Der Spalt wird durch eine kleine kreisrunde Öffnung ersetzt, das Okular des Fernrohrs durch eine schwarze Kreisscheibe von solcher Gröſse, daſs sie, an den Ort des vom Objektiv entworfenen reellen Bildes der Öffnung gebracht, dieses gerade eben verdeckt, was mit einer vorgehaltenen Lupe zu prüfen ist. Man entfernt nun die Lupe, bringt das zu prüfende Objekt zwischen die beiden Objektive und beobachtet es mit dem vor die Kreisscheibe gehaltenen, bloſsen oder so bewaffneten Auge, daſs man das Objekt deutlich sieht. Die Schlieren werden dann vermöge der durch sie über den Rand der Scheibe abgelenkten Strahlen als Erhellungen etc. sichtbar.

Auch in den mit dem Interferenzrefraktor (**63a**) erzeugten Streifen lassen Schlieren eines durchstrahlten Mittels sich beobachten.

Näheres, auch über die Anwendungen, bei Toepler, Pogg. Ann. 131, 33 u. 180. 1867; Über die Anordnung von Abbe s. Czapski, ZS. f. Instr. 1885, 117. — Über Aufnahmen von Luftschlieren um Geschosse Mach, Wien. Sitz.-Ber. 92, 625. 1885; 95, 764. 1887; 89, 1310. 1889; 105, 605. 1896. Eine zusammenfassende Darstellung von Lummer in der ZS. Der Mechaniker, 8. Jahrg. S. 61. 1900.

64. Spektralanalyse (Bunsen und Kirchhoff, 1860).

Licht wird analysirt mittels seiner Zerlegung in ein Spektrum entweder durch Brechung im Prisma oder durch Beugung bei dem Durchgang oder bei der Reflexion am Gitter.

Aus der Zusammensetzung des Lichtes kann auf seinen Ursprung geschlossen werden. Glühende feste und flüssige Körper geben ein zusammenhängendes Spektrum, Gase und Dämpfe liefern einzelne, wesentlich durch die chemische Natur der Körper bestimmte Farben.

Auch die Absorption des Lichtes in einem Körper läſst häufig auf dessen chemische Beschaffenheit schlieſsen. Gase oder Dämpfe absorbiren dieselben einzelnen Farben, welche sie bei der gleichen Temperatur selbstleuchtend ausstrahlen.

Der Spektralapparat (Spektroskop) definirt eine Farbe geometrisch durch eine Skale, auf welcher ihre Bestandteile erscheinen.

Gradsichtige Spektroskope haben vor einem Spalt ein oder mehrere gradsichtige Prismensysteme und eine Linse oder ein Linsensystem, um den Spalt deutlich erscheinen zu lassen. Die Skale sitzt im Okular. Die brechende Kante der Prismen muſs senkrecht zur Skale und parallel dem Spalte verlaufen.

Der gewöhnliche Spektralapparat besitzt, wie das Spektrometer, Fernrohr F und Spaltrohr S, auſserdem ein Rohr R mit einer Mikrometerskale. Das Bild der Skale wird in der dem Fernrohre zugewandten Prismenfläche gespiegelt.

I. Einstellung des Spektralapparates.

Es ist die angegebene Reihenfolge der Operationen einzuhalten.

Der Spalt soll einem fernen Objekt entsprechen und deutlich erscheinen. Wenn die richtige Auszugsstellung des Spaltrohrs gegeben ist, so hat man nur das Fernrohr auf Deutlichkeit des Spaltbildes einzustellen; sonst stelle man erst das Fernrohr auf ein fernes Objekt ein, richte es dann auf den Spalt und verschiebe diesen so, daſs er deutlich erscheint.

Das Prisma soll die Minimumstellung erhalten. Man beleuchtet den Spalt mit der Sodaflamme, stellt das Prisma in nahezu richtiger Stellung vor die Spaltlinse, orientirt sich mit bloſsem Auge ungefähr über die Richtung des aus-

tretenden Strahles und sucht mit dem Fernrohr das Bild des Spaltes. Nun dreht man das Prisma (indem man wenn nötig mit dem Fernrohre folgt), bis das Spaltbild im Fernrohr umkehrt, und stellt in dieser Lage das Prisma fest.

Das reflektirte Bild der Skale soll deutlich erscheinen. Die Skale wird durch eine nicht zu nahe (20 cm) aufgestellte schmale, kleine Flamme erleuchtet. Nachdem durch Drehen des Skalenrohres das Skalenbild im Fernrohr gefunden ist, zieht man das Skalenrohr heraus, bis ihr deutliches Bild sich bei dem Bewegen des Auges vor dem Okulare nicht gegen das Spaltbild verschiebt.

Ein bestimmter Skalenteil, bei den den Zeichnungen von Bunsen und Kirchhoff angepafsten Skalen der Teil 50, soll mit der Natriumlinie zusammenfallen. Man dreht das Skalenrohr, bis diese Stellung erreicht ist, und stellt es fest.

II. Auswertung der Skale.

Um zu wissen, welchen Punkten der Skale die den einzelnen chemischen Elementen angehörenden Linien entsprechen, kann man die Spektra der Stoffe einzeln beobachten und die Skalenteile der Linien (nebst Angabe ihrer ungefähren Helligkeit, Breite, Farbe und ihrer Schärfe) notiren. Bequemer ist die Anwendung der nach Bunsen-Kirchhoff's Skale veröffentlichten Abbildungen oder der auf dieselbe Skale bezogenen Tab. 22, auf welche man den Apparat folgendermafsen reducirt.

Man beobachtet auf der Skale einige bekannte Linien an den Enden und in der Mitte des Spektrums (Sonne a, D, F, G, H; oder Kα, Liα, Na, Srδ, Kβ; Fig. S. 236), trägt auf karrirtes Papier die beobachteten Skalenteile als Abscissen, die entsprechenden der B.-K.'schen Skale als Ordinaten auf und verbindet die entstandenen Punkte durch eine Kurve. Selten wird diese erheblich von einer Geraden abweichen. Aus der Zeichnung findet sich dann zu einem beliebigen beobachteten Skalenteil der entsprechende der B.-K.'schen Skale als Ordinate. — Wenn die Skale des Apparates der B.-K.'schen nahe kommt, was oft der Fall ist, so stellt man Na auf den Strich 50 ein und macht ebenfalls einen Satz von vergleichenden Beobachtungen. Dann zeichnet man eine Kurve für die Korrektionen, indem man die Unter-

schiede gegen die B.-K.'sche Skale als Ordinaten zu der Skale selbst als Abscisse graphisch aufträgt.

Mit Hilfe von Tab. 23 läfst sich auch eine Kurve zeichnen, welche die Skalenteile auf Wellenlängen reducirt.

Die Dämpfe erzeugt man mit einer Salzperle am Platindraht im Bunsenbrenner. Das Anschmelzen von Perlen ist meist leichter, wenn man das Erhitzen des Drahtes von hinten vorschreiten läfst. Die Öse des Drahtes soll geschlossen sein.

Man reinigt den Draht am wirksamsten dadurch, dafs man ihn wiederholt in Salzsäure und reines Wasser taucht und dann jedesmal in der Spitze der Bunsenflamme oder vor dem Lötrohr oder in der Gebläseflamme ausglüht.

Präparate. Angenehmer als das leicht verknisternde oder rasch verdampfende Kochsalz ist geglühte Soda. Reines Lithiumpräparat erhält man leicht aus Li_2CO_3, welches man wegen seiner geringen Löslichkeit mit Wasser ausschütteln kann. KNO_3 ist sehr rein im Handel. Strontium- und Bariumchlorid werden durch das Ausglühen selbst rein. NaCl und KCl werden, um das Zerknistern zu vermeiden, vor dem Spektralgebrauch erhitzt.

III. Analyse.

Die Körper werden aus dem Zusammenfallen ihrer Spektrallinien mit den Linien bekannter Stoffe erkannt (vgl. II). Dabei notirt man nicht nur die Lage, sondern auch die ungefähre Stärke, Breite und Schärfe der beobachteten Linien. Z. B. fallen Srβ und Liα der Lage nach zusammen; Srβ aber ist verwaschen, Liα ganz scharf. Graphisch kann man die Streifen übersichtlich darstellen, indem man überall die Lichtstärke an irgend einem Punkt der Skale als Ordinate über diesem Punkte auffafst und so die Kurven für die Spektra zeichnet.

Bezüglich der Unterscheidung der alkalischen Erden beachte man vorzugsweise die (lichtschwachen) charakteristischen blauen Linien von Strontium und Calcium.

Immer wird die Perle in den Saum der Flamme gebracht, der glühende feste Teil so tief, dafs er kein störendes kontinuirliches Spektrum gibt. Es ist anzuraten, dafs man einmal mit engem Spalte beobachte, um dicht neben einander liegende Linien zu unterscheiden, und dann mit weiterem Spalte zur

Auffindung lichtschwacher Linien; desgleichen einmal mit kleiner Gasflamme für die leicht flüchtigen Stoffe (K, Li), das andere Mal mit grofser Flamme für schwer flüchtige (Sr, Ba, Ca). Die Spektra der letzteren treten oft erst nach längerer Zeit deutlich hervor. — Das Schwächerwerden eines Spektrums bei längerer Dauer des Versuchs hat häufig seinen Grund darin, dafs flüchtigere Verbindungen durch das Glühen in die schwerer flüchtigen Oxyde verwandelt werden. Dann läfst sich die Lichtstärke momentan steigern durch Anfeuchten der Perle am Platindraht mit reiner Salzsäure. Verbindungen wie etwa die Sulfate der alkalischen Erden, die an sich kaum flüchtig, durch Salzsäure nicht verwandelt werden, glüht man vor dem Befeuchten mit Salzsäure in dem unteren, reducirenden Teil der Flamme.

Falsches Licht blendet man ab: durch einen schwarzen Schirm hinter der Gasflamme, durch eine Kapsel über dem Prisma, welche den Weg nach den drei Rohren frei läfst, endlich durch eine auf das Fernrohr gehängte Blende aus dunklem Papier, welche zugleich das Schliefsen des anderen Auges überflüssig macht. Die Skale selbst wird nicht stärker beleuchtet, als zum Erkennen von Teilung und Ziffern notwendig ist! Im Interesse sehr lichtschwacher Linien kann man die Skale vorübergehend ganz abblenden.

Die Bunsen'sche Gasflamme selbst gibt eine Anzahl schwacher, besonders grüner und blauer Linien. Um Irrtümer zu vermeiden, mag man sie vorher beobachten und die stärksten notiren. Den unteren Teil der Flamme, wo sie besonders stark auftreten, benutze man überhaupt nicht zur Beobachtung. Die Natriumlinie sieht man in den meisten Präparaten; die Luft enthält häufig so viel Natrium, dafs die Reaktion schon in der freien Flamme hervortritt.

Ultraviolettes Spektrum. Dieses untersucht man mit dem fluorescirenden Okular (S. 236) oder durch Projektion auf einen fluorescirenden Schirm oder durch Photographie. Soll kein Licht absorbirt werden, so sind Quarz- oder Flufsspatanstatt Glas-Präparate anzuwenden. S. auch Reflexionsgitter.

Ultrarotes Spektrum. Die Beobachtung geschieht *a*) durch Wärmewirkung vgl. **72a**. *b*) Durch Photographie mittels Leuchtfarbe (Draper, Lommel). Eine zuvor zu schwachem Leuchten

gebrachte mit Balmain'scher Leuchtfarbe bestrichene ebene Platte wird der Strahlung ausgesetzt. Die Strahlen im sichtbaren Spektrum bis zu F und mehr noch ultrarote Strahlen löschen das Leuchten mehr oder weniger aus. Legt man die exponirte Platte nachher gut schliefsend auf eine photographische Negativplatte, so gibt sie daselbst ein negatives Bild, welches auf gewöhnlichem Wege positiv kopiert werden kann.

Vgl. Lommel, Wied. Ann. 40, 681 u. 687. 1890.

Absorptionsspektra. Von Bedeutung kann auch die Spektralanalyse weifsen Lichtes sein, welches durch farbige Körper, insbesondere Lösungen, hindurchgegangen ist. Scharfe Linien treten hier selten auf. Über die Messung der Lichtstärke im Spektrum siehe 72.

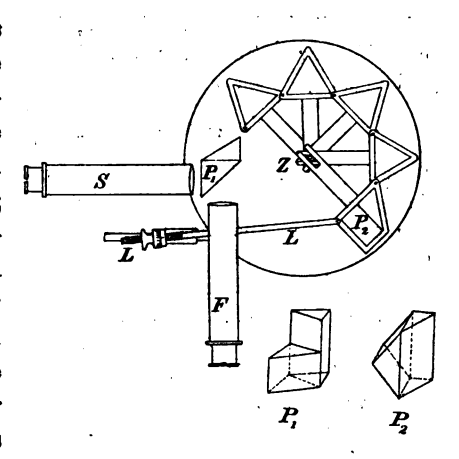
Vergleichung zweier Spektra. Mit einem Reflexionsprisma, welches den halben Spalt bedeckt, kann man zwei Spektra über einander entwerfen. Die eine Lichtquelle wird in der Richtung des Spaltrohres aufgestellt, so dafs ihr Licht die unbedeckte Hälfte durchsetzt, die andere stellt man schräg so, dafs ihr Licht vom Prisma in den Spalt reflektirt wird. Auch kann man die Spektra abwechselnd erzeugen und die gegenseitige Lage der Linien mit einem Fadenmikrometer im Okular bestimmen. Sonnen- und Eisenspektrum, letzteres gewöhnlich als Funkenspektrum (S. 227) sind als Normale geeignet.

Genau untersucht von Kayser u. Runge, Abh. d. Berl. Akad. 1890; Rowland, Astronomy and Astrophysics 12, 231. 1893.

Mehrere Prismen (Kirchhoff, Angström, Rutherford). Man dreht die Prismen, mit dem ersten anfangend, jedes in die Stellung der Minimalablenkung (S. 232) und achtet darauf, dafs kein Licht vorbei geht. Das Fernrohr, welches gleichzeitig hier nur einen Teil des Spektrums umfafst, mufs gedreht werden. Trotzdem geben feststehende stark zerstreuende Prismengruppen auch so nicht das ganze Spektrum.

Neuere Spektroskope verbinden die Prismen mit dem Fernrohr durch einen Mechanismus, der für jeden Strahl die Minimalablenkung festhält und so das ganze Spektrum sichtbar macht, z. B. in der Weise der Figur. Das Fernrohr F blickt in die obere Hälfte, das Spaltrohr S in die untere Hälfte der Prismen. Das totalreflektirende Prisma P_1 bedeckt die untere Hälfte

des ersten 30°-Prismas. Das durch die Prismen gegangene Licht wird in P_2 total reflektirt und passirt die Prismen rückwärts nach dem Fernrohr. Dieses steht fest; der durch Gelenke zusammengehaltene Prismenkreis wird mittels der Stange L und der Führung seiner Radien um den Zapfen Z auf die Krümmung gebracht, die der jeweiligen Brechbarkeit des Lichtes angemessen ist. Zu Messungen kann dabei der Faden im Fernrohr in Verbindung mit der Trommelteilung dienen.



Das Entwerfen objektiver Spektra betr. vgl. S. 226.

Beugungsgitter. Ein durchsichtiges Gitter stellt man dem Spaltrohr einfach senkrecht gegenüber (65). — Auch Reflexionsgitter von hinreichender Dispersion lassen sich auf dem Tisch des Spektrometers gebrauchen; die schwache Krümmung eines Hohlgitters bedingt nur einen geänderten Auszug des Spalt- oder Fernrohrs. — Das objektive, von der Hohlfläche selbst entworfene Spektrum (S. 225) wird mit der Lupe beobachtet oder photographirt. Über Wellenlängen vgl. **65.**

Photographie des Spektrums. Über empfindliche Platten für die verschiedenen Farben vgl. Vogel, die Photogr. farbiger Gegenstände, Berlin 1888. Aufnahmen im äufsersten Ultraviolett verlangen luftfreie Spektralapparate und Platten ohne Gelatine; Schumann, Wien. Ber. 102, 415 u. 625. 1893; Beibl. 1894, 187. Über Photographiren mit dem Rowland-schen Gitter s. Kayser, Spektralanalyse in Winkelmann's Handbuch und Handbuch der Spektroskopie S. 603.

65. Wellenlänge eines Lichtstrahles.

I. Beugungsgitter (Fraunhofer).

Durch die Öffnungen eines engen Gitters geht Licht erstens geradlinig hindurch, zweitens entstehen auf beiden Seiten von der Mittelrichtung Helligkeitsmaxima „erster, zweiter etc. Ordnung", die bei einer sehr grofsen Zahl gleicher und gleich weit von einander abstehender Gitteröffnungen für homogenes Licht scharf begrenzt sind. Fällt das Licht senkrecht auf das Gitter, so bilden die Richtungen dieser Maxima

mit der Mittelrichtung Winkel $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \cdots$, welche, wenn l den Abstand benachbarter Öffnungen und λ die Wellenlänge bedeutet, durch die Beziehungen gegeben sind

$$\sin\delta_1 = \frac{\lambda}{l}, \quad \sin\delta_2 = \frac{2\lambda}{l}, \quad \sin\delta_3 = \frac{3\lambda}{l} \text{ etc.}$$

Denn in jeder von diesen Richtungen unterscheiden sich die Weglängen von den einzelnen Gitteröffnungen aus um ganze Vielfache einer Wellenlänge von einander. Die Lichterschütterungen, welche von den verschiedenen Öffnungen ausgehend einen entfernten Schirm (oder ein auf Parallelstrahlen eingestelltes Fernrohr) treffen, sind also in gleichem Schwingungszustande und summiren sich. Jede andere Richtung enthält gebeugtes Licht in unregelmäſsigen Abständen von den Öffnungen und deswegen in den verschiedensten Schwingungszuständen, die sich bei der Vereinigung gegenseitig vernichten. — Zusammengesetztes Licht erzeugt also nach beiden Seiten des Gitters reine Spektra.

Die Gitterplatte kommt auf den Tisch des Spektrometers (**60**), die Platte senkrecht zum Spaltrohr, die geteilte Fläche dem Fernrohr zugewandt, die Teilstriche der Drehaxe parallel. Letzteres wird daran erkannt, daſs die Spaltbilder oder Spektra bei dem Anvisiren mit dem nach beiden Seiten gedrehten Fernrohr in konstanter Höhe erscheinen, was mittels einer Marke auf dem Spalt leicht kontrolirt wird. Fernrohr und Spaltrohr werden zuvor auf unendlich eingestellt (**60**, 2). Unter Anwendung homogenen Lichtes wird dann auſser dem mittleren hellen Bild des Spaltes ein erstes, zweites u. s. w. abgelenktes Bild auf jeder Seite beobachtet. Bedeuten $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3 \cdots$ die Ablenkungswinkel der Bilder gegen das mittelste Bild, so ist für die Wellenlänge der Lichtsorte

$$\lambda = l \sin\delta_1 = \tfrac{1}{2} l \sin\delta_2 = \tfrac{1}{3} l \sin\delta_3 \text{ u. s. w.} \qquad 1.$$

Die genau senkrechte Stellung der Gitterplatte ist dadurch charakterisirt, daſs zusammengehörige Seitenbilder bei dieser Stellung den kleinsten Abstand haben. — Genauer visirt man den Spalt mit dem Fernrohr an, fixirt dieses, bedeckt den Kollimator mit dunkelem Papier und stellt das Gitter mittels Spiegelung senkrecht. Vgl. beleuchtetes Fadenkreuz, **60**, 4.

Als Längeneinheit für Lichtwellen nimmt man meist das Mikron (μ), d. h. $\mu = 10^{-3}$ mm oder $\mu\mu = 10^{-6}$ mm oder auch 10^{-7} mm („Angström-Einheit").

Beugungsspektrum. Nicht homogenes Licht wird durch das Gitter in Spektra zerlegt, in denen nach obigen Formeln

das Licht von gröfserer Wellenlänge (rot) am stärksten abgelenkt erscheint. Bei Sonnenlicht, in welchem zur Definition und Einstellung der Farbe die Fraunhofer'schen Linien geeignet sind, ist das erste Spektrum und der gröfste Teil des zweiten rein; von da an greifen die Spektra übereinander.

A a B C D E b F G h H

Im Beugungs- oder „Normalspektrum" (Fig.) ist das Licht anders verteilt als im Dispersionsspektrum (S. 236), in welchem der brechbarere Teil relativ breiter erscheint.

II. Zurückführung einer Wellenlänge auf eine andere mittels Koincidenz. Gitterspektra verschiedener Ordnung.

Sind in den Spektren $m$ter bez. $n$ter Ordnung die Wellenlängen λ_m bez. λ_n gleich abgelenkt, so ist nach den Gleichungen 1. $m \cdot \lambda_m = n \cdot \lambda_n$ also

$$\lambda_m : \lambda_n = n : m.$$

Die Ordnungszahlen m und n sind ganze Zahlen, lassen sich also, falls sie nicht bekannt sind, aus einer genäherten Kenntnis von λ_m und λ_n ableiten, die meist gegeben oder nötigenfalls leicht zu beschaffen ist.

So kann man durch verschiedene Kombinationen die Wellenlängen, auch im Ultraviolett und Ultrarot (S. 226, 255), auf wenige genau gemessene (Tab. 23) zurückführen. Kleine Unterschiede in den Ablenkungen werden mikrometrisch subjektiv oder in photographischen Aufnahmen gemessen.

Langley, Wied. Ann. 22, 598. 1884.

III. Durch Talbot'sche Streifen im Spektrum.

Die Pupille wird vor einem Spektralapparat von der Seite des Violett her zur Hälfte mit einem dünnen Blättchen von der Dicke d (0,2 mm etwa) bedeckt. Dadurch entstehen Streifen, deren gröfste Dunkelheit an den Orten liegt, wo der Gangunterschied der durch die Luft und das Blättchen gegangenen Wellen ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt.

Dicke und Brechungsverhältnis der Platte für eine Farbe

(z. B. Fraunhofer'sche Linie) von der Wellenlänge λ seien d und n. Dann ist die Wellenlänge in der Platte $= \lambda/n$ und der obige Gangunterschied $=(n-1)d/\lambda$. Für eine kleinere Wellenlänge λ' gelte n', also der Gangunterschied $(n'-1)d/\lambda'$. Die Anzahl p der Streifenbreiten zwischen den beiden Farben ist gleich der Differenz der beiderseitigen Gangunterschiede $p=d[(n'-1)/\lambda'-(n-1)/\lambda]$. Sind d, λ, n und n' (63) bekannt, so kommt hieraus

$$\lambda' = \frac{n'-1}{p/d+(n-1)/\lambda}.$$

Umgekehrt läfst sich, wenn λ, n, λ' und n' bekannt sind (Tab. 23), die Dicke d ermitteln. Ist dies z. B. im sichtbaren Spektrum geschehen, so lassen sich nachher Wellenlängen im Ultrarot oder Ultraviolett bestimmen.

Esselbach, Pogg. Ann. 98, 513. 1856, nach Helmholtz.

IV. Methode von A. Michelson (1881).

Ring-Interferenz geneigten Lichtes zwischen parallelen Platten (Haidinger). Gegeben sei eine durch parallele Ebenen P und P_1 begrenzte Schicht. Auf P falle homogenes Licht, werde zum Teil reflektirt und zum Teil durchgelassen. Letzterer Teil erfahre an P_1 eine Reflexion und interferire nach seinem Wieder-Durchgang durch P mit dem an P direkt reflektirten Teile. Die Durchlässigkeit sei ev. (durch Versilbern etc.) so regulirt, dafs beide Teile schliefslich eine ungefähr gleiche Intensität haben, so dafs entgegengesetzte zusammentreffende Schwingungszustände sich aufheben. Je nach dem Gangunterschiede tritt dann Verdunkelung oder Erhellung ein; der Gangunterschied aber ist durch die Neigung des Strahles gegen die Schicht bestimmt. Ein auf unendlich akkommodirtes Auge oder Fernrohr, bei dem also parallele Strahlen zur Interferenz kommen, beobachtet dann Kreisfransen, die um die senkrechte Durchsichtsrichtung centrirt verlaufen und deren Auftreten beweist, dafs die Schicht sehr vollkommen planparallel ist. Vgl. 66, V.

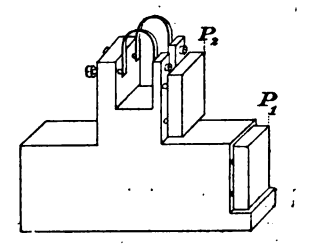
Nähert man die Flächen einander langsam, so wandert das Kreissystem nach aussen, unter abwechselnder Erhellung und Verdunkelung der Mitte und dem Entstehen neuer Kreise von hier aus, indem hier jedesmal ein voriger früherer Interferenzzustand sich wiederholt, wenn der Gangunterschied um eine, der Plattenabstand also um eine halbe Wellenlänge geändert worden ist. Man zähle diese Perioden, bis die Flächen in Berührung sind; die Hälfte der Zahl drückt den ursprünglichen Abstand in Wellenlängen aus.

Vgl. Mascart, Ann. d. ch. 23, 116. 1871; Lummer, Wied. Ann. 23, 49. 1884. S. auch die Anwendung zum Prüfen des Parallelismus von Platten S. 267.

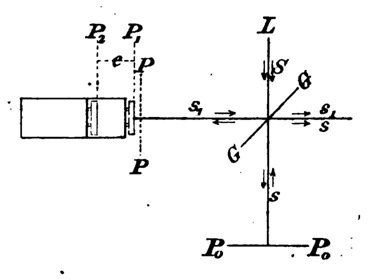
Erkannt wird die Berührung daran, dafs die Interferenz, welche bei kleinem Abstand auch in weifsem Licht sichtbar wird, mit dem letzteren den farblosen Zustand zeigt, der eben der Berührung entspricht; (der z. B. wenn P und P_1 Hinter- und Vorderflächen desselben durchsichtigen Mittels sind, dunkel, bei reflektirenden Silberschichten hell ist).

Wir gehen hier nicht darauf ein, dafs in Wirklichkeit dieser Zustand selbst nicht mehr scharf zu beobachten ist und dafs deswegen die Anordnung bei Michelson vermöge einer schwachen Neigung ein wenig verändert ist. Hierdurch treten nämlich in kleinem Abstande der Flächen wandernde Fizeau-Newton'sche Streifen auf, deren farblose Mittelfranse zur Beobachtung benutzt wird.

Bei Michelson ist die in Wellenlängen auszumessende Länge der senkrechte Abstand e der beiden vollkommen ebenen Oberflächen P_1 und P_2, die durch die versilberten Vorderflächen zweier Glasplatten gebildet werden, welche an einem Bronze-Barren justirbar befestigt und vollkommen parallel gemacht worden sind. Zu der letzten feinen Justirung dient der schwache regulirbare Druck der Federn auf die Stützen der Platten. — Diese nebeneinander liegenden Ebenen lassen sich nicht direkt auf einander beziehen, sie werden deswegen einzeln auf eine konstant liegende Vergleichsebene P bezogen, die aber nicht wirklich, sondern als das Bild einer wirklichen (spiegelnden) Ebene P_0 in dem unter 45° geneigten Spiegel G vorhanden ist.



Stellen wir uns G zunächst als einen unendlich dünnen, teilweise reflektirenden und teilweise durchlassenden Spiegel vor, so ist das Schema der Anordnung im Grundrifs durch die Figur gegeben. Ein von der Lichtquelle L kommender Strahl S zerlegt sich an G. Der durchgehende Teil s wird an P_0 in sich zurückgeworfen und hat nach seiner Reflexion an G dieselben Eigenschaften, wie wenn er von dem Spiegelbilde P der Fläche P_0 in G zurückgeworfen wäre

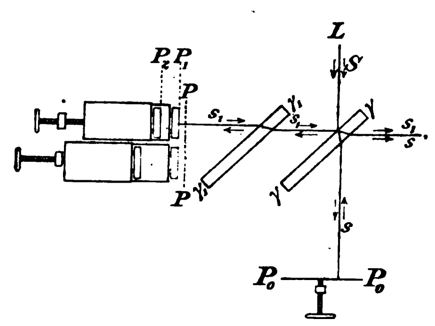


Der an G reflektirte Teil s_1 von S treffe etwa auf P_1, er wird daselbst reflektirt und interferirt nach seinem Durchtritt durch G mit s. Der Gangunterschied von s und s_1 entspricht dem Doppelten des Abstandes zwischen den Ebenen P und P_1.

Werden andere Strahlenrichtungen hinzugenommen, so entsprechen nun die Interferenzen zwischen s und s_1 genau dem oben unterstellten Falle und die Kreisfransen werden, wenn P_1 jetzt allmählich vorgeschoben wird, ihre Wanderung ausführen und schliefslich zeigen, dafs P_1 genau in P hineinfällt.

Nachdem dies erreicht ist, beobachtet man nun an P_2, schiebt es vor und zählt die Perioden, bis P_2 in P fällt. Die halbe Anzahl mifst den Abstand $P_1 P_2$ in Wellenlängen.

An die Stelle des oben angenommenen unmefsbar dünnen Spiegels G tritt wirklich eine vorn schwach versilberte Glasplatte γ. Die Symmetrie des Strahlenganges von s und s_1 wird wiederhergestellt durch Einschalten einer unversilberten gleichen Platte γ_1 in s_1. Benutzt werden die gezeichneten Strahlen, von denen ein jeder die Glasdicke dreimal durchsetzt hat. Andere Reflexionen etc. werden abgeblendet. γ_1 erleichtert durch seine Drehbarkeit zugleich das Herstellen der Ausgangs-Koincidenz von P_1 mit P (vgl. oben).



Zu scharfer Interferenz sind die rote, grüne oder blaue Cd-Linie sogar bei Gangunterschieden von ca. 500 000 Wellenlängen (über 1 dm) noch fähig. Auszählen einer solchen Gröfse ist freilich nicht mehr möglich. Direkt gezählt wurden deswegen von Michelson nur die 1200—1600 Wellen eines Etalons von 2^{-8} dm $= 0{,}3906$ mm. Auf diesen wurden acht ebenso angeordnete Stücke von 2^{-7}, $2^{-6} \ldots$ bis 1 dm ohne Zählen zurückgeführt. Kombinirte Beobachtungen mit den drei Cd-Farben lassen nämlich die von vorn herein nahe bekannten ganzen Anzahlen der Wellen sicher ableiten; die Bruchteile werden durch Beobachtung ermittelt. Das ganze Decimeter wird schliefslich komparatorisch auf das Originalmeter zurückgeführt.

Die Resultate, für Luft von 15° und 760 mm, $\lambda_r = 0{,}6438472$, $\lambda_{gr} = 0{,}5085824$, $\lambda_{bl} = 0{,}4799911 \cdot 10^{-3}$ mm haben nach Michelson einen wahrscheinlichen Fehler von einigen Einheiten der letzten Stelle.

Michelson, Trav. et Mém. du Bur. Internat. Bd. XI, 1895.

V. Newton'sche Ringe (1676).

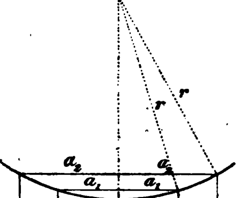
Wird Licht an zwei hintereinander liegenden Flächen reflektirt, so verstärken oder schwächen sich die beiden Wellenzüge je nach ihrem Gangunterschiede. Derselbe Zustand wiederholt sich immer nach einer

Zunahme des Gangunterschiedes um λ, also des Abstandes der Flächen um $\frac{1}{2}\lambda$. Hieraus leitet sich die folgende Regel ab.

Eine auf einer Planplatte liegende Kugelfläche von sehr grofsem Krümmungsradius r (66) werde mit homogenem Licht beleuchtet. Zwei nach ihrer Ordnungszahl um k unterschiedene Ringe mögen bei senkrechter Ansicht die Halbmesser a_1 und a_2 zeigen. Dann hat das Licht die Wellenlänge

$$\lambda = (a_2^2 - a_1^2)/(kr).$$

Mittels der Formel kann man auch mit Licht von bekanntem λ (Na 0,000589 mm) einen unbekannten Radius r bestimmen.



Beweis. Zu einem Ringe vom Halbmesser a gehört (Fig.) eine Höhe unter dem Kugelmittelpunkt $= \sqrt{r^2 - a^2}$ oder, wenn a/r sehr klein ist, nach Formel 3, S. 9 $r - \frac{1}{2}a^2/r$. Der Höhenunterschied beträgt demnach in unserem Falle $\frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)/r$ und dies ist gleich $\frac{1}{2}k\lambda$.

66. Messung eines Krümmungshalbmessers.

I. Mit dem Sphärometer.

Das Sphärometer (21, 7) wird zuerst auf einer als eben bekannten (vgl. V) Fläche und dann auf der zu messenden Fläche eingestellt. Die Stellungen der mittelsten Spitze bei beiden Versuchen unterscheiden sich von einander um eine Höhe h. Nennt man l die Seite des gleichseitigen Dreiecks, welches die drei festen Spitzen als Eckpunkte hat, so ist der gesuchte Krümmungshalbmesser

$$R = \tfrac{1}{6}l^2/h + \tfrac{1}{2}h.$$

Denn wenn H die Höhe in dem von den Seiten l gebildeten Dreiecke, so ist $R^2 = (R-h)^2 + (\frac{2}{3}H)^2$ oder $2Rh = \frac{4}{9}H^2 + h^2$. Da ferner $H^2 = \frac{3}{4}l^2$, so folgt obiger Ausdruck.

Man mifst l am einfachsten, nachdem man die Sphärometerspitzen auf Papier abgedrückt hat. Unterscheiden die drei Seiten sich um ein weniges, so darf man den Mittelwert einsetzen.

Neuere Sphärometer haben anstatt der Mefsschraube einen Mafsstab, an welchem die Verschiebungen der Spitze abgelesen werden; aufserdem anstatt der drei Basisspitzen einen Kreis mit scharfer Kante vom Radius r. Dann ist $R = \frac{1}{2}(r^2/h + h)$.

Bamberg, ZS. f. Instr. 1887, 297; Abbe, ib. 1892, 307.

Im Handel sind für optische Zwecke bequeme Sphärometer mit Zeigerübertragung, die, auf die Fläche aufgedrückt, den Krümmungshalbmesser oder seinen reciproken Wert ohne weiteres ablesen lassen. Auf ihre Richtigkeit müssen sie geprüft werden.

II. Durch Spiegelung (R. Kohlrausch).

Eine spiegelnde Kugelfläche entwirft von einem leuchtenden Punkte ein Bild, entweder ein virtuelles aufrechtes (hinten), oder ein reelles verkehrtes (vorn), letzteres aber nur in dem Falle, dafs der Punkt aufserhalb der Brennweite eines **konkaven** Spiegels liegt. Die Brennweite ist $f=\frac{1}{2}r$. Bedeutet A den Abstand des leuchtenden Punktes vom Spiegel, so ist die Bildweite a gegeben durch die Beziehung $\frac{1}{A}+\frac{1}{a}=\frac{1}{f}$; den Abstand eines virtuellen Bildes oder die Brennweite eines Konkavspiegels hat man hier negativ zu rechnen. Die Bildgröfse λ verhält sich zur Gegenstandsgröfse L $\lambda:L=a:A$.

Die Methode ist anwendbar auf spiegelnde, nicht zu schwach gekrümmte, wenn auch kleine Flächen. Zwei schmale Lichter werden in nicht zu kleiner Entfernung A vor dem Mittelpunkt der aufrecht stehenden Fläche im gegenseitigen Abstande L angebracht und mitten zwischen denselben ein Fernrohr, welches auf die Fläche eingestellt wird. Dicht vor der Fläche, parallel mit der Verbindungslinie der Lichter wird ein kleiner, am besten auf Glas geteilter Mafsstab angebracht. Die Lichter geben zwei in der Fläche reflektirte Bilder, deren Abstand l auf dem kleinen Mafsstabe mit dem Fernrohr beobachtet wird. Der Krümmungshalbmesser ist

bei einer konvexen,	bei einer konkaven Fläche
$r=\frac{2Al}{L-2l}$	$r=\frac{2Al}{L+2l}$.

Beweis für eine konkave Fläche. L stellt hier die Gegenstandsgröfse dar, die Bildgröfse sei λ. Das objektive Bild liege um a vor der Kugelfläche, dann gilt $\lambda:L=a:A$. Man sieht aber λ auf den Mafsstab projicirt in der Länge l. Offenbar ist $l:\lambda=A:(A-a)$, also $l:L=a:(A-a)$ oder $l:(L+l)=a:A$, also $1/a=(L+l)/Al$. Setzt man dies in die Gleichung $1/A+1/a=2/r$, so kommt $2/r=(L+2l)/Al$ oder $r=2Al/(L+2l)$.

Bei der konvexen Fläche liegen Krümmungsmittelpunkt und Bild hinten. Man hat im Beweise die Vorzeichen von r und a umzukehren.

Je geringer die Krümmung ist, desto gröſser muſs die Entfernung A im Verhältnis zu L genommen werden, erstens, damit diese Formeln giltig sind, dann aber auch, weil in kleiner Entfernung die Bilder nicht mit dem Maſsstab gleichzeitig scharf gesehen werden. Durch Verkleinerung der Öffnung des Fernrohrobjektives kann man sie übrigens verschärfen.

Bei der Messung einer Hohlfläche kann man den Maſsstab auch an dem Ort der Bilder aufstellen, d. h. da, wo er mit diesen dem Fernrohr deutlich erscheint. Dabei miſst man λ, und wenn die Skale jetzt von der Verbindungslinie der Flammen um B absteht, so ist in den Formeln für l einzusetzen $\lambda \cdot A/B$. — Mit einem Theodoliten braucht man keinen Maſsstab; man miſst den Winkel φ der Bilder und berechnet, da $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} l/A$ ist, $r = 4A^2/(L \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varphi \pm 4A)$.

Genauer und bequemer ist anstatt Maſsstab und Fernrohr das Helmholtz'sche Ophthalmometer (**22a**).

Als Lichter sind Benzinflämmchen zweckmäſsig. Auch die Ränder eines Fensters kann man gebrauchen, wenn das Fernrohr dicht vor ihm aufgestellt wird.

An Linsen entstehen auch Bilder von der Hinterfläche. Bei Bikonkav- oder Bikonvexlinsen sieht man an der aufrechten oder verkehrten Lage der Bilder, welche die richtigen sind. Durch Schwärzen der Hinterfläche fallen die anderen fort.

III. Aus der Brennweite.

Mit geringen Abänderungen läſst sich nach **67**, 1, 3 oder 5 die Brennweite eines konkaven, nach **67**, 11 diejenige eines Konvexspiegels ermitteln. Der Krümmungshalbmesser ist gleich der doppelten Brennweite.

IV. Schwach gekrümmte Flächen.

Ein Fernrohr wird so eingestellt, daſs ein Gegenstand (etwa eine Teilung), der sich im Abstande A vor dem Objektiv befindet, deutlich erscheint. Mit dem so eingestellten Fernrohr werde in dem zu untersuchenden Spiegel das Bild eines Objektes deutlich gesehen, wenn der Abstand des letzteren vom Spiegel $= a$, derjenige des Objektives vom Spiegel $= e$ ist. Dann findet man den Krümmungshalbmesser

$$r = 2a \frac{A-e}{A-e-a}.$$

e mag etwa $= \frac{1}{2}A$ gewählt werden.

Positives r bedeutet Hohlspiegel, negatives r Konvexspiegel.

Zur Erkennung des Deutlichsehens dient die Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs.

Vgl. auch die Methode **65** V mit Newton'schen Ringen.

V. Prüfung von Planflächen.

a) Vgl. das Verfahren S. 231.

b) Man betrachtet in einem auf sehr grofse Entfernung eingestellten Fernrohr das Spiegelbild eines ebenso weiten Objektes in der Fläche, wenn diese nahe vor das Objektiv gehalten wird. Das Bild darf keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigen. Ein geübtes Auge kann diese Untersuchung auch unbewaffnet mit ziemlicher Schärfe ausführen.

c) Einen kleinen Planspiegel prüft man am einfachsten, indem man mit ihm ein Spiegelbild der Sonne auf eine ferne Wand wirft. Das Bild mufs rund sein und den scheinbaren Durchmesser der Sonne zeigen. Die Prüfung ist sehr empfindlich. Gibt eine Platte zwei solche Bilder, so sind die Oberflächen wohl eben, aber nicht parallel. Solche Platten sind als Deckgläser oder vorn versilberte Spiegel ohne weiteres verwendbar; hinten spiegelnde richte man für Skalenablesungen so, dafs ihre Prismenkante senkrecht auf den Teilstrichen steht.

Prüfung durch Lichtinterferenz. *d*) Eine anderweitig als plan bekannte Fläche wird mit der zu prüfenden in Berührung gebracht. Die dann durch Beleuchtung mit Natriumlicht auftretenden Streifen müssen geradlinig und parallel verlaufen.

Prüfung einer planparallelen Platte in sich. *e*) Das feinste Reagens auf Parallelismus liefern die durch Reflexion homogenen Lichtes an der Vorder- und Hinterfläche auftretenden Interferenzkurven, nämlich erstens die Kurven, welche man an dünnen Platten nicht konstanter Dicke bei Akkommodation auf die Platte beobachtet (**65**, V) und deren Verlauf, analog den Höhenkurven einer Landkarte, den Stellen gleicher Dicke entspricht, die also z. B. an keilförmigen Planplatten geradlinig verlaufen.

f) An sehr vollkommen parallelen Platten, wo jene Kurven für die Beobachtung zu weit auseinanderliegen, treten, und zwar auch bei grofser Dicke, bei Akkommodation auf grofse Entfernung vermöge der verschiedenen Neigung der die Platte durchsetzenden Strahlen Ringe um die Richtung des senkrechten Durchtritts herum auf (Haidinger). Eine Abweichung vom Parallelismus macht sich durch Abweichung der Kurven von der Kreisform bemerklich oder auch dadurch, dafs bei Parallelverschiebung der Platte im Centrum des Systems ein Wechsel von hell und dunkel eintritt, so oft die Plattendicke sich um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge des Lichtes ändert. Vgl. 65, IV.

Siehe über die Theorie dieser Kurven und ihre Verwendung zum Prüfen Lummer, Wied. Ann. 23, 49. 1884; auch Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl. II, 920. 1897, und über einen Abbe'schen Prüfungsapparat Czapski, ZS. f. Instr. 1885, 149.

67. Brennweite.

Brennpunkt F eines brechenden (oder reflektirenden) Systems von Flächen, welches homocentrisches Licht wieder in einen Punkt vereinigt, z. B. einer sphärischen Linse, ist der Punkt, in welchem zur Axe des Systems parallel einfallende Strahlen sich nach dem Durchgang (oder der Reflexion) schneiden.

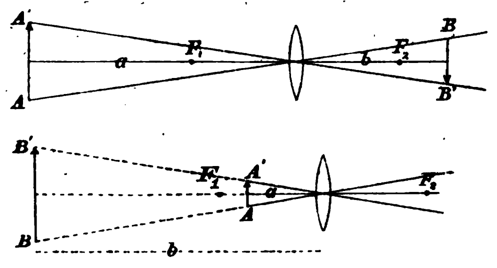
Der Abstand des Brennpunktes von einer Linse, streng genommen von der zugehörigen Hauptebene der Linse (s. unten), ist ihre Brennweite. Diese ist, wenn, wie wir annehmen, die Strahlen in dasselbe Mittel austreten, aus dem sie eingefallen sind, auf beiden Seiten gleich grofs. Bei Zerstreuungslinsen gibt man der Brennweite das negative Vorzeichen. Nummer einer Brille nennt man ihre Brennweite, in der Regel in Pariser Zollen ausgedrückt.

Die Stärke einer Linse wird durch die reciproke Brennweite bestimmt; von einer Linse oder einer Linsenkombination, welche die Brennweite f Meter besitzt, sagt man, sie habe eine Stärke von $1/f$ Dioptrien. Die Stärke eines Systems von hintereinander gesetzten Linsen ist gleich der Summe (Vorzeichen!) der einzelnen Stärken, wenn die Dicke des Systems klein ist gegen die Brennweiten.

Aus den beiden Krümmungshalbmessern r und r' und dem Brechungsverhältnis n einer Linse erhält man ihre Brennweite f oder ihre Stärke $1/f$

$$f = \frac{1}{n-1}\frac{rr'}{r+r'}; \quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Wenn $n = 1{,}5$ (schwach brechendes Glas), so wird also $\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$, d. h. die reciproke Brennweite ist gleich dem Mittel aus den reciproken Krümmungsradien. Ist eine Linsenfläche konkav, so wird ihr Krümmungshalbmesser mit negativem Vorzeichen eingesetzt.



Von einem leuchtenden Gegenstande AA' entwirft die Linse ein Bild BB'; die Sammellinse, je nachdem er aufserhalb oder innerhalb der Brennweite liegt (Figg.), ein reelles verkehrtes oder ein virtuelles, vergröfsertes aufrechtes Bild; die Zerstreuungslinse gibt nur virtuelle, verkleinerte Bilder.

Gegenstandsweite a und Bildweite b sind mit einander und mit der Brennweite f durch die Beziehung verbunden:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}; \quad b=\frac{af}{a-f}. \qquad 1.$$

Die Bildgröfse BB' verhält sich zur Gegenstandsgröfse AA' stets wie die Bildweite zur Gegenstandsweite

$$BB':AA'=b:a. \qquad 2.$$

Die Abstände und Gröfsen virtueller Bilder, sowie Brennweiten von Zerstreuungslinsen sind mit negativen Vorzeichen einzusetzen.

Andere übersichtliche Beziehungen entstehen, wenn man jeden der beiden Abstände von dem zugehörigen Brennpunkte aus rechnet. Sie mögen p für den Gegenstand, q für sein Bild heifsen, so dafs $a=p+f$, $b=q+f$ ist. Diese Werte in Gl. 1 u. 2 eingesetzt erhält man leicht

$$pq=f^2 \quad \text{und} \quad BB':AA'=q:f \quad \text{oder} \quad =f:p.$$

Da die Brennweite vom Brechungsverhältnis abhängt, so ist sie für verschiedene Farben verschieden, mufs daher streng genommen für eine bestimmte Farbe (Natriumflamme, Lithiumflamme, rotes Glas) bestimmt werden. Ferner haben bei sphärischen Linsen, deren Durchmesser nicht sehr klein gegen die Brennweite ist, die äufseren Ringe kleinere Brennweiten als die inneren Teile. Aus dem ersteren Umstande entstehen die farbigen Säume (chromatische Abweichung), aus dem letzteren Undeutlichkeiten der Bilder (sphärische Abweichung).

Centrirung. Es ist wichtig, dafs die Linsenaxe (die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte) in die Richtung vom Objekt nach dem Bilde gebracht wird, weil andernfalls der Bildabstand zu klein bestimmt wird. Die Axenrichtung findet man z. B. mit einer kleinen Flamme in geeignetem Abstande vor der Linse: liegen die beiden, in der Vorder- und Rückfläche gesehenen Spiegelbilder stets in der durch Auge, Flamme und Linsenmittelpunkt gehenden Ebene, so steht die Flamme in der Axe.

Brennweite einer Sammellinse.

1. Mit der Sonne. Man erzeugt mit der Linse ein Sonnenbild auf einem Stückchen Glas und stellt letzteres so, dafs das Bild scharf begrenzt ist. Der Abstand des Glases von der Linse ist die Br.-W.

2. Mit dem Fernrohr. Ein Fernrohr wird auf Deutlichsehen eines sehr entfernten Gegenstandes eingestellt. Man visirt darauf mit dem Fernrohr durch die vor sein Objektiv gebrachte Linse nach einem ebenen Objekt (z. B. Papier mit Schrift). Der Abstand von der Linse, in dem das Objekt deutlich erscheint, gibt die Br.-W.

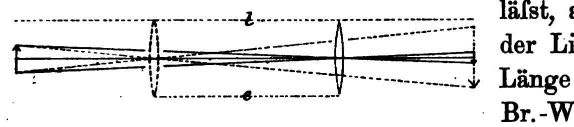
Mit weitsichtigen Augen kann man die Bestimmung genähert auch ohne Fernrohr ausführen. Man zwingt sich, auf grofse Entfernung zu akkommodiren dadurch, dafs man mit dem einen Auge an der Linse vorüber nach einem fernen Gegenstande sieht und blickt mit dem anderen durch die Linse nach einem verschiebbaren Gegenstande (Bleistiftspitze). Erscheint der Gegenstand deutlich, so ist sein Abstand von der Linse die Br.-W.

3. Aus Gegenstands- und Bildweite. Im Abstande a von der Linse stellt man ein Licht auf, oder besser einen Blechschirm mit einem Loch und einem Drahtkreuz darin vor einer Flamme, auf der anderen Seite der Linse einen weifsen Schirm in einem solchen Abstande b, dafs ein deutliches Bild des Lichtes oder des Kreuzes entsteht (Fig. 1, vor. S.). Über Centrirung des Lichtes siehe oben. Wenn f die Br.-W., so ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{oder} \quad f = \frac{ab}{a+b}.$$

Ist Abstand des Objekts und des Bildes gleich, so gibt also seine Hälfte die Br.-W. Eine dünne Linse kann man z. B. dicht vor einen Spiegel bringen und einen Schirm mit erleuchteter kleiner Öffnung so stellen, dafs dicht neben dieser ihr deutliches Bild auf dem Schirm erscheint.

4. Durch Verschiebung (Bessel). Befindet sich ein Gegenstand in einem konstanten gröfseren Abstande l von einem Schirm, so gibt es zwei Stellungen einer Linse zwischen beiden, in denen dieselbe ein deutliches Bild entwirft. Die Verschiebung zwischen diesen beiden Stellungen, welche sich genauer messen



läfst, als Abstände von der Linse, betrage die Länge e. Dann ist die Br.-W. der Linse

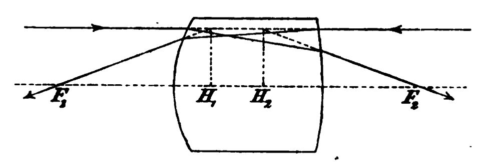
$$f = \frac{1}{4}(l - e^2/l).$$

Als Gegenstand kann ein Fadenkreuz dienen und anstatt des Schirmes ein eben solches mit Lupe, wobei das Zusammenfallen von Objekt und Bild aus der Abwesenheit der Parallaxe beurteilt wird.

Beweis. Die Abstände des Objektes und des Bildes von der Linse sind bei diesen Versuchen offenbar $\frac{1}{2}(l+e)$ und $\frac{1}{2}(l-e)$. Hieraus folgt $1/f = 2/(l+e) + 2/(l-e) = 4l/(l^2 - e^2)$, q. e. d.

5. Aus der Gleichheit von Objekt und Bild. Wenn die Gröfse des Bildes gleich der des Gegenstandes ist, so ist ihr gegenseitiger Abstand gleich der vierfachen Br.-W.

Hauptpunkte. Kann man nicht, wie bis hierher angenommen wurde, die Dicke einer Linse oder eines Systems gegen die Brennweite und die Bildweiten vernachlässigen, so sind alle Abstände von zwei Punkten H_1 und H_2 aus zu rechnen, die man die Hauptpunkte nennt, welche, wenn das Eintritts- und das Austritts-Mittel dasselbe ist, stets zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 symmetrisch liegen. In der Figur gehört H_1 zur linken, H_2 zur rechten Seite. Der Abstand H_1F_1 oder H_2F_2 stellt die Brennweite f vor.



Die Konstruktion von Hauptpunkten s. unten.

In Glaslinsen (genau für $n = 1{,}5$) von nicht zu grofser Dicke ist H_1H_2 gleich $\frac{1}{3}$ der Dicke, also sind bei beiderseitig gleicher Krümmung die Hauptpunkte je um $\frac{1}{3}$ der Linsendicke von den beiden Oberflächen entfernt. Eine plankonvexe oder plankonkave Linse hat ihren einen Hauptpunkt in der gekrümmten Fläche, der andere liegt von da um $\frac{1}{3}d$ nach innen.

Hauptebene heifst die zur Axe senkrechte Ebene durch einen H.-P. Es gelten u. A. die Sätze, nach denen man H_1 und H_2 auch konstruiren kann:

1) Ein parallel der Axe links einfallender Strahl geht nachher durch F_2 so, wie wenn er geradlinig vom Schnittpunkte des einfallenden Strahles mit der H.-E. H_2 käme (Fig.).

2) Ein von links in der Richtung nach dem H.-P. H_1 einfallender Strahl geht nach dem Durchtritt durch die Linse parallel zu sich selbst weiter, wie wenn er geradlinig vom Punkte H_2 käme.

Die Linse wirkt so, als ob die Strecke H_1H_2 nicht vorhanden wäre.

Auch ein Linsensystem hat zwei Brennpunkte und zwei Hauptpunkte, die, mit der Mafsgabe, dafs sie zu einander symmetrisch liegen, so dafs

eine einzige Brennweite resultirt, einzeln beliebig innerhalb oder aufserhalb verteilt sein können.

Die folgenden Methoden geben die richtigen Brennweiten von Linsen oder von Systemen, ohne dafs man die Lage der Hauptpunkte zu kennen braucht.

6. Aus der Gröfse stark vergröfserter oder verkleinerter Bilder. a) Man stelle um ein Weniges aufserhalb des Brennpunktes einen hell beleuchteten Mafsstab auf, am besten von Glas mit durchfallendem Licht. Gegenüber, auf der anderen Seite der Linse, wird ein weifser Schirm in einem solchen Abstande von der Linse aufgestellt, dafs auf ihm das stark vergröfserte Bild der Teilung deutlich erscheint. Ist l die Länge eines Skalenteiles, L die Länge seines Bildes, A der Abstand des Schirmes von der Linse, so ist

$$f = A \frac{l}{L+l}.$$

b) Oder man stellt umgekehrt einen scharf begrenzten Gegenstand in gröfserer Entfernung von der Linse auf und mifst sein auf der anderen Seite der Linse entworfenes, nun stark verkleinertes Bild. Zu diesem Zwecke dient ein Mikrometer auf Glas mit vorgesetzter Lupe, welches so gestellt wird, dafs Mikrometerteilung und Bild des Gegenstandes durch die Lupe deutlich gesehen werden. In obiger Formel ist dann l die Länge des Bildes, L die des Gegenstandes, A des letzteren Abstand von der Linse.

Beweis. Die Abstände A und a des Bildes und des Gegenstandes von den zugehörigen Hauptebenen der Linse hängen durch die Formel $1/A + 1/a = 1/f$ zusammen. Die Gröfsen beider verhalten sich $L:l = A:a$. Durch Einsetzen von $1/a = L/(Al)$ in die erste Gleichung entsteht obiger Ausdruck. Da A gegen die Dicke der Linse grofs ist, so kann man anstatt des Abstandes von der Hauptebene merklich den gemessenen Abstand von der Linse setzen.

7. Verfahren von Meyerstein.

a) Linsen gröfserer Brennweite. Man fixire auf einer Holzschiene zwei in mm geteilte kleine Glasskalen, die Teilungen einander zugewandt, in einer gegenseitigen Entfernung e, die merklich gröfser ist als die vierfache Brennweite. Man verschiebe die Linse zwischen den Skalen, bis das (verkleinerte) Bild der ersten gegen die zweite keine Parallaxe zeigt, und

bestimme mit einer Lupe das Gröfsenverhältnis Bild : Objekt $= v$; zugleich messe man den Abstand l_1 eines mit der Linse fest verbundenen Punktes — z. B. am Rande der Fassung — von dem Objekte. Nach Umkehrung der Linse wiederhole man die Operationen; aus den beiden v, die sich nur durch Versuchsfehler unterscheiden, wird das Mittel genommen. Der Abstand des mit der Linse fest verbundenen Punktes vom Objekt sei nun l_2, so ist

$$f = \frac{l_1 + l_2 - e}{1/v - v}.$$

Beweis. Vom Mittelpunkt beider Hauptpunkte (S. 270) hat das Objekt den Abstand $A = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, das Bild also $B = e - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. Sind a und b die Abstände des Objekts und des Bildes von den Hauptpunkten selbst, so ist offenbar $a - b = A - B = l_1 + l_2 - e$. Nun gilt $v = b/a$, also $1/v - v = a/b - b/a$, wofür man schreiben kann $(a - b)(1/a + 1/b)$ oder $(l_1 + l_2 - e) \cdot 1/f$, q. e. d.

b) Bei Fernrohr- und Mikroskop-Okularen, sowie bei Mikroskop-Objektiven ist das Bild zu klein, um wie oben gemessen zu werden; zudem liegt es oft im Innern des Systems.

Man benutzt daher mit Vorteil ein horizontal gelagertes Mikroskop von langer Sehweite mit Okularmikrometer und als Objekt, in etwa $1/2$ m Entfernung, rechteckige Klötze geeigneter Gröfse oder farbige Papierscheiben auf weifsem Hintergrund. v folgt sofort aus der Breite des Objektes, der Gröfse des Bildes und dem Werte eines Skalenteiles. l_1 und l_2 lassen sich leicht direkt abmessen. Um auch e zu erhalten, bringe man nach Entfernung der Linse eine Nadelspitze in die deutliche Sehweite des Mikroskopes und messe ihre Entfernung vom Objekt.

Vgl. Meyerstein, Wied. Ann. 1, 315. 1877.

8. Verfahren von Abbe. Man bestimme für eine Lage des Objektes die Vergröfserung v (Bildgröfse/Objektgröfse), verschiebe das Objekt um eine gemessene Strecke Δ, und finde nun die Vergröfserung v'. Dann ist

$$f = \frac{\Delta}{1/v' - 1/v}.$$

Aus $v = b/a$ und $1/f = 1/a + 1/b$ folgt $a = f(1 + 1/v)$. Ebenso folgt $a + \Delta = f(1 + 1/v')$. Also ist $\Delta = f(1/v' - 1/v)$, q. e. d.

Die Hilfsmittel sind die gleichen wie unter 7. Die Methode

besitzt den Vorteil, dafs eine Bestimmung des Bildortes nicht nötig ist.

Über Abbe's Focometer vgl. Czapski, ZS. f. Instr. 1892, 185; Müller-Pouillet Physik, 9. Aufl., Bd. III (Lummer) S. 875. 1897.

9. Lage des Brennpunkts eines starken Linsensystems. Die Aufgabe liegt besonders an Okularen oder Mikroskop-Objektiven vor. Wir wollen den Abstand der Brennebene von dem Rande der Fassung messen (vgl. 68, III 2). Man klebt auf das Ende der Fassung eine Glasplatte mit einer Zeichnung, Teilung oder dgl., die Zeichnung nach innen, und legt das Ganze zwischen einerseits einen gut sichtbaren Gegenstand, Fensterrahmen, Flamme, dessen Abstand gegen die Brennweite als unendlich grofs angesehen werden darf, und andrerseits ein horizontales, mefsbar verschiebbares Mikroskop von mäfsiger Vergröfserung, die Glasplatte dem letzteren zugekehrt. Die Verschiebung des Mikroskops zwischen dem Deutlichsehen der Zeichnung auf der Glasplatte und des durch das System entworfenen Bildchens des Objekts, etwa nach dem Ausbleiben der Parallaxe gegen ein Fadenkreuz des Mikroskops beurteilt, gibt direkt die gesuchte Gröfse (Dorn).

Zerstreuungslinsen.

10. Diese geben kein objektives Bild. Man verbindet sie mit einer stärkeren Sammellinse von bekannter Br.-W. F' und mifst nun die gemeinschaftliche Br.-W. F beider zusammen nach einer der vorhin angegebenen Methoden. Dann findet sich die negative Br.-W. f der Konkavlinse allein aus

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{1}{F'} \qquad f=\frac{F\cdot F'}{F'-F}.$$

11. Man mifst die Gröfse des Zerstreuungsbildes, welches die Linse von der Sonne auf einem Schirm in gegebenem Abstande entwirft. Bedeutet d den Durchmesser der Linsenöffnung, D den Durchmesser des Zerstreuungsbildes, A den Abstand des Schirmes von der Linse, so ist

$$f=\frac{Ad}{d-D+0{,}0094\cdot A};$$

0,0094 ist die doppelte Tangente des scheinbaren Halbmessers der Sonne. Bei schärferen, nicht zu kleinen Linsen kann man

$0{,}0094 \cdot A$ vernachlässigen und hat die einfache Regel: derjenige Abstand des Schirmes, bei welchem das Zerstreuungsbild den doppelten Durchmesser der Linse hat, ist die Br.-W.

12. Brennweite schwacher Linsen. (Vgl. **66** III.) Ein Fernrohr sei auf ein Objekt im Abstande A vom Objektive deutlich eingestellt. Man bringt die Linse dicht vor das Objektiv und regulirt den gemeinsamen Abstand vom Objekte so, daſs letzteres wieder deutlich erscheint. Dies möge für den Abstand A' der Fall sein. Dann ist

$$f = \frac{AA'}{A - A'}.$$

Negative Br.-W. bezeichnet eine Zerstreuungslinse.

Das Deutlichsehen wird an der Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz erkannt.

13. Astigmatische Linsen haben zwei „Brennweiten“ für die beiden auf einander senkrechten Hauptkrümmungen. Man erkennt jedes „Bild“ eines leuchtenden Punktes daran, daſs die Abbildung sich zu einer Geraden zusammenzieht, deren Richtung zugleich die eine Hauptkrümmungs-Richtung gibt. — Eine schief gehaltene sphärische Linse wirkt wie eine astigmatische, deren eine Br.-W. kürzer ist, als die der sphärischen.

68. Vergröſserungszahl etc. eines optischen Instrumentes.

I. Lupe.

Vergröſserungszahl einer Lupe nennt man die Gröſse, in welcher eine Länge durch die Lupe gesehen erscheint, geteilt durch die Gröſse, in welcher sie dem freien Auge in der kleinsten deutlichen Sehweite erscheint. Diese Vergröſserung ist also für verschiedene Augen ungleich.

Die Vergröſserungszahl m wird aus der Brennweite berechnet. Wird nämlich durch f die Brennweite, durch A die kleinste deutliche Sehweite des unbewaffneten Auges bezeichnet, so ist

$$m = 1 + A/f.$$

Für das mittlere Auge wird A gleich 25 cm gesetzt.

Beweis. Wird ein kleiner Gegenstand von der Länge l in einem Abstande a unter die Lupe gelegt, so daſs sein (virtuelles) Bild im Abstande A erscheint, so ist $1/a = 1/A + 1/f$. Das Bild habe die Länge L, so ist die Vergröſserung $L/l = A/a = 1 + A/f$.

II. Fernrohr.

Vergröſserungszahl heiſst das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein **ferner** Gegenstand im Fernrohre erscheint, zu dem Winkel, unter welchem er mit bloſsem Auge gesehen wird.

1. Allgemein anwendbar ist folgendes Verfahren. Das Fernrohr wird in einem gegen die eigene Länge groſsen Abstande vor einem Maſsstabe (Papierskale, Ziegeldach, Tapetenmuster) aufgestellt, auf welchem zwei Punkte hinreichend markirt sind, um mit bloſsem Auge gesehen zu werden. Das eine Auge sieht nach dem Maſsstabe durch das Fernrohr hindurch, das andere sieht nach ihm neben dem Fernrohr vorbei, so daſs die mit beiden Augen gesehenen Bilder sich decken. Wenn so die direkt gesehene Länge zwischen den Marken n Teile des im Fernrohr gesehenen Maſsstabes bedeckt, während die wirkliche Länge N Teile beträgt, so ist die Vergröſserungszahl $m = N/n$.

Die Beobachtung wird erleichtert dadurch, daſs man das Fernrohr durch Ausziehen des Okulars so stellt, daſs die beiden Bilder bei einer Drehung der Augenaxen sich thunlichst wenig gegen einander verschieben. Kurzsichtige Augen müssen natürlich mit der Brille bewaffnet sein.

2. Innerhalb kürzerer Abstände verfährt man so (v. Waltenhofen): Man stellt das Fernrohr auf groſse Entfernung ein, befestigt dann vor seinem Objektiv eine ganz schwache dünne Konvexlinse (Brillenglas von etwa 2 m Brennweite) und stellt das so vorgerichtete Fernrohr vor einem Maſsstabe derart auf, daſs dessen Teile deutlich erscheinen. Man beobachtet wie unter Nr. 1 mit beiden Augen. Decken n im Fernrohr gesehene Teile N mit bloſsem Auge gesehene Teile, beträgt der Abstand des Maſsstabes vom Objektiv a, vom Auge A, so ist die Fernrohrvergröſserung gleich

$$\frac{N}{n}\frac{a}{A}.$$

3. Bei Fernrohren mit konvexem Okular läſst sich fast immer folgendes Verfahren anwenden. Nach Einstellung auf unendlich ersetzt man das Objektiv durch eine rechteckige Blende. Durch die noch übrigen Linsen wird dann ein objektives Bild der Blende entworfen, dessen Gröſse auf einem Glas-

maßsstäbchen vor dem Okular mit der Lupe gemessen wird. Die wirkliche Größe dividirt durch diese Bildgröße gibt die Vergrößerung.

Die Objektivöffnung selbst kann statt der Blende benutzt werden, wenn ihre Randstrahlen nicht etwa durch Diaphragmen abgehalten werden, was häufig der Fall ist. Eine Blende von eckiger Gestalt läßt dies erkennen.

Beweis für das Kepler'sche Fernrohr. Bei der Einstellung auf unendlich ist der Abstand des Objektivs vom Okular gleich der Summe der Brennweiten $F+f$. Die Blende gibt demnach ein Bild im Abstande $b=(F+f)f/F$ vor dem Okular (S. 268, Gl. 1). Also ist $L/l=(F+f)/b=F/f$. F/f aber gibt bekanntlich die Vergrößerung.

4. Genauer ist das folgende Verfahren (Gauß). Ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr ergibt bei umgekehrtem Strahlengange eine Verkleinerung gleich der Vergrößerung bei gewöhnlichem Gange. Man mißt mit einem Theodolit die Winkelgröße eines sehr entfernten Objektes: erstens direkt, zweitens durch das verkehrt vor den Theodoliten gestellte Fernrohr hindurch. Der Quotient der beiden Winkel ergibt die astronomische Vergrößerung.

Für einen beschränkten Raum läßt sich die Methode folgendermaßen abändern. Dem Okular des auf unendlich eingestellten Fernrohres gegenüber bringe man in wenigstens 1 m Entfernung einen horizontalen Stab mit zwei (besser mehreren) zur Mitte symmetrischen Marken an. Deren gegenseitiger Abstand sei $=a$. In dem vor das Objektiv gesetzten Theodolit mögen diese Marken unter dem Winkel ω erscheinen. Der zugehörige Eintrittswinkel φ ergibt sich daraus, daß die Strahlen von den Marken durch die Okularblende des Fernrohrs (genauer den Okularkreis) gehen müssen. Ist A der Abstand des Stabes von der letzteren, so hat man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi=\frac{1}{2}a/A$ und die Fernrohrvergrößerung $=\varphi/\omega$.

Statt eines Theodoliten kann auch ein Spektrometerfernrohr dienen; noch vorteilhafter ein mikrometrisch bewegliches Ablesefernrohr mit aufgeklebtem Spiegel, auf den man ein Hilfsfernrohr mit Skale richtet.

5. Aus den Brennweiten und Abständen der Gläser läßt die Vergrößerung sich berechnen. Z. B. ist dieselbe für das

Kepler'sche und Galilei'sche Fernrohr gleich dem Verhältnis der Objektiv- zur Okularbrennweite. Bei der Br.-W.-Bestimmung zusammengesetzter Okulare werden meistens die Methoden **67**, 7b oder 8 zur Anwendung kommen müssen.

Gröſse des Gesichtsfeldes.

Ist l der wirkliche Abstand zweier an den Enden eines Durchmessers des Gesichtsfeldes gesehener Punkte von einander, a ihre Entfernung vom Fernrohr, so ist die Gröſse des Gesichtsfeldes in Bogengraden ausgedrückt $= 57{,}3^0 \cdot l/a$.

Zur Messung kann ein entfernter Maſsstab dienen. Wenn man nicht über eine groſse Entfernung verfügt, so setzt man wie bei 2. dem auf unendlich eingestellten Fernrohr eine schwache Sammellinse vor und rückt den Maſsstab in die jetzige deutliche Sehweite. a ist dann der Abstand des Maſsstabes von der Linse.

III. Mikroskop.

Vergröſserungszahl nennt man hier das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein kleiner Gegenstand im Mikroskop gesehen wird, zu demjenigen, unter welchem er in der Sehweite 25 cm erscheint.

1. Die Bestimmung der Vergröſserung entspricht der unter II, 1 angegebenen. Unter das Mikroskop wird ein Objekt von bekannter Länge (Mikrometerteilung) gebracht. 25 cm unter der Okularhöhe legt man einen mm-Maſsstab neben das Mikroskop. Während das eine Auge durch das Mikroskop nach dem Objekt sieht, blickt das andere nach dem Maſsstab, und nun muſs, wie bei II 1, die Projektion des im Mikroskop gesehenen Bildes auf den Maſsstab gemessen werden. Bedeckt das Bild N Teile, während der Gegenstand wirklich die Länge von n Teilen hat, so ist N/n die Vergröſserungszahl.

Besser noch bringt man über dem Okular einen kleinen unter 45° geneigten Spiegel an, dessen Belegung in der Mitte weggenommen ist, und stellt den Maſsstab 25 cm entfernt seitlich von demselben vertikal auf, so daſs mit demselben Auge durch das Spiegelglas hindurch das Bild des Objektes im Mikroskop, und im Spiegel reflektirt das Bild des Maſsstabes gesehen wird.

Anstatt mit dem Maſsstabe zu vergleichen, kann man das Bild auch auf eine Fläche in 25 cm Abstand vom Auge abzeichnen (projiciren) und nachher ausmessen.

2. Bei sehr starker Vergrößerung, wenn das Verfahren 1. versagt, kann man die Formel benutzen: Vergrößerung $= S \cdot T/(f_1 f_2)$. S ist die deutliche Sehweite (25 cm), f_1 und f_2 sind die Brennweiten (**67**, 6 bis 8) des Objektivs und Okulars. T ist die reducirte Tubuslänge, d. h. der Abstand des unteren Brennpunkts des Okulars vom oberen des Objektivs. Sie wird aus dem gegenseitigen Abstande der Okular- und Objektivfassung im Rohr, unter Rücksichtnahme auf die Abstände der beiden Brennebenen von den Enden der Fassungen erhalten; vgl. **67**, 9.

3. Über Längenmessungen mit dem Mikroskop vgl. **21**, 4.

4. Öffnungswinkel und numerische Apertur eines Mikroskop-Objektives.

Der Öffnungswinkel ($2u$) ist der Winkel zwischen den äußersten Strahlen, welche von einem deutlich gesehenen Axenpunkt aus durch das Mikroskop treten können. Die Begrenzung des Strahlenkegels erfolgt in der Regel an der Unterfläche des Objektivs.

Es bezeichne n den Brechungskoefficienten des Mediums, aus welchem die Strahlen in das Objektiv übergehen, dann heißt

$$a = n \sin u$$

die numerische Apertur des Objektivs. Bei Trockensystemen ist $n = 1$, also $a < 1$. Bei Immersionssystemen gilt n für die Flüssigkeit (Wasser, Cedernholzöl, Monobromnaphthalin) und hier kann $a > 1$ werden.

Von der numerischen Apertur hängt die s. g. auflösende Kraft des Mikroskopes ab, d. h. die Größe der kleinsten durch dasselbe unterscheidbaren Objekte.

Die Striche eines Gitters vom Abstande ε werden bei centraler Beleuchtung noch unterschieden, wenn $\varepsilon \geqq \lambda/a$, bei günstiger schiefer Beleuchtung, wenn $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}\lambda/a$, wo λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft ist (Abbe).

Nach Lister kann man die numerische Apertur eines Trockensystems bestimmen, indem man vor dem horizontal (im Dunkeln) aufgestellten Mikroskop eine Kerze verschiebt, bis eine Hälfte des Gesichtsfeldes hell erscheint, und in derselben zur Axe senkrechten Ebene eine zweite Kerze so aufstellt, daß auch die andere Hälfte gerade erhellt wird. Ist der Abstand der Kerzen e, und die Ebene derselben um A vom deutlich gesehenen Punkte entfernt, so hat man $\operatorname{tg} u = e/2A$.

Aperturen über 1 mißt das stets anwendbare Apertometer von Abbe. Einem flachen Halbcylinder aus Glas (9 cm Durchmesser, 1,2 cm Höhe) ist in der Richtung des Durchmessers

ein Reflexionsprisma von 45⁰ angeschliffen, während der Mittelpunkt durch eine kleine Öffnung in einem aufgekitteten versilberten Deckgläschen markirt ist.

Die obere Fläche trägt 2 Teilungen, dem Öffnungswinkel und der Apertur entsprechend; als Indices dienen 2 rechtwinklig gebogene geschwärzte Messingplättchen.

Das Apertometer wird auf den Tisch des Mikroskopes gesetzt und dieses (ev. nach Einfügung der Immersions-Flüssigkeit) zunächst auf Deutlichsehen der kleinen Öffnung eingestellt. Blickt man nach Herausnehmen des Okulars in das Rohr, so sieht man bei schwächeren Objektiven das vom Objektiv entworfene Bildchen der beiden Indices, deren Spitzen man auf den Rand des Gesichtsfeldes einstellt, worauf man an der Teilung abliest.

Bei stärkeren Objektiven wird das Bildchen für Beobachtung mit dem unbewaffneten Auge zu klein. Man benutzt dann ein Hilfsmikroskop, das man bei den Instrumenten von Zeifs durch Einschrauben eines besonderen schwachen Objektives in das untere Ende des Tubusauszugs und Einsetzen eines Okulares herstellt. Bei andern Instrumenten wird man ein geeignetes Objektiv mit einem Kork im Tubus-Auszug anbringen können.

69. Polarisationswinkel eines Körpers.

Polarisirt (Malus, 1808) heifst das Licht, wenn es nicht wie das gewöhnliche ungeordnet allseitig gleich weit schwingt; Polarisationsrichtung nennt man nach Fresnel die Richtung der kleinsten Schwingungskomponente. Fehlt eine Komponente ganz, d. h. schwingt das Licht nur in einer Ebene, so heifst es vollständig oder geradlinig polarisirt. Den einfachsten Zustand unvollständiger Polarisation gibt das elliptisch polarisirte Licht, bei dem die Ätherteilchen Ellipsen beschreiben. Sind die Ätherbahnen Kreise, so heifst das Licht cirkular polarisirt.

Durch Reflexion an durchsichtigen Körpern (vgl. **71a**, II und ebendort auch Metallreflexion) wird das gewöhnliche Licht im allgemeinen in teilweise polarisirtes verwandelt, indem vorwiegend die der spiegelnden Fläche parallele Komponente reflektirt wird. Das eindringende Licht ist also senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, aber niemals vollständig. Das zurückgeworfene Licht ist bei demjenigen Einfalls- oder Reflexionswinkel vollständig polarisirt, für welchen der eindringende und der zurückgeworfene Strahl auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt,

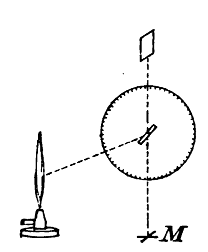
wenn ω diesen „Polarisationswinkel" und n das Lichtbrechungsverhältnis des Spiegels bedeutet,

$$n = \operatorname{tg} \omega.$$

Ist n bekannt, so kann ω hiernach berechnet werden; für Glas vom B.-V. 1,5 ist $\omega = 56°$. Umgekehrt ergibt sich n, wenn ω gemessen ist; grofse Genauigkeit ist dabei aber nicht zu erwarten.

Um die Erscheinung zu sehen, beleuchtet man den Spiegel mit einer in der Einfallsebene hinreichend ausgedehnten Lichtquelle, etwa durchscheinendem Papier vor einer Flamme oder, wenn die Einfallsebene vertikal steht, mit einer langen Gasflamme aus einem Spitzbrenner und beobachtet das reflektirte Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsrichtung (gröfsere Diagonale) senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes liegt. Bei richtiger Stellung erscheint im Gesichtsfeld ein verwaschener dunkeler Streifen; die der Mitte des letzteren entsprechende Visirrichtung bildet mit der Spiegelnormalen den Polarisationswinkel.

An einem festen Körper kann man ω messen, indem man ihn an der Drehaxe eines Goniometers (**60, 61**) oder des Totalreflektometers (**63**, II) befestigt, die spiegelnde Fläche mit der Axe zusammenfallend. Durch einen feststehenden Nicol, dessen gröfsere Diagonale der Drehaxe parallel ist, visirt man die Fläche mit dem Fernrohr an oder auch mit blofsem Auge, dessen Sehrichtung durch eine Marke *M* hinter dem (durchsichtigen) Körper fixirt ist, und dreht die Fläche so, dafs der dunkele Fleck in die Visirrichtung kommt. Nachdem die Teilung abgelesen ist, stellt man die Lichtquelle symmetrisch auf die andere Seite, dreht die Fläche ebendahin, sucht wieder den dunkelen Fleck und dreht, bis er abermals in der Visirrichtung liegt. Die Drehung zwischen den beiden Stellungen beträgt 2ω. Die Anordnung mit einem Vertikal-Goniometer s. Fig. Bei der zweiten Einstellung kommt die Flamme rechts zu stehen.



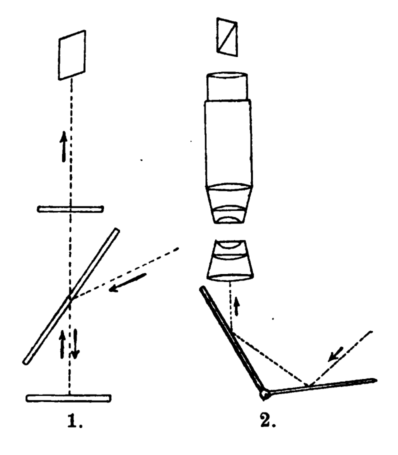
Flüssigkeitsoberflächen kann man so nicht behandeln. Sie müssen mit einer vertikal drehbaren Visirvorrichtung mit Nicol angesehen werden. ω ist der Neigungswinkel der Richtung, in welcher die verdunkelte Stelle erscheint, gegen die Vertikale. Behufs genauer Messung kann man die Flüssigkeit und die Lichtquelle einmal links, das andere Mal rechts stellen und so 2ω bestimmen.

70. Polarisationsapparat. Untersuchung doppelbrechender Körper.

Polarisationsapparat.

So heifst eine Verbindung von zwei das Licht polarisirenden Vorrichtungen. Die dem Auge zugewandte Polarisationsvorrichtung heifst Analysator, die andere wohl Polarisator schlechtweg. Polarisatoren sind Nicol'sche Prismen (deren Polarisationsrichtung mit ihrer gröfseren Diagonale zusammenfällt), oder unbelegte Glasplatten oder Sätze aus solchen, auch wohl schwarze Glasplatten, an denen man das Licht unter dem Polarisationswinkel (von etwa 56°) spiegeln läfst, oder Sätze von aufeinandergelegten Glasplatten, durch welche das Licht unter dem genannten Neigungswinkel hindurchgeht, oder Turmalinplatten, die vorzugsweise eine Schwingungskomponente absorbiren. Die beiden letztgenannten Mittel polarisiren unvollständig. — Doppelbrechende Prismen (Kalkspat, Quarz) zerlegen das Licht in zwei senkrecht zu einander schwingende Strahlen; die gleichzeitige Farbenzerstreuung kann durch ein angekittetes Glasprisma aufgehoben sein.

Der gewöhnliche, durch sein breites Gesichtsfeld angenehme Nörrenberg-sche Pol.-Apparat (Fig. 1) benutzt als Polarisator eine durchsichtige Glasplatte, die um 56° gegen die Horizontale geneigt ist. Schräg einfallendes Tageslicht wird polarisirt nach unten auf einen horizontalen Spiegel reflektirt, der es nach oben zurückwirft und nach einem, allerdings mit einer Schwächung verbundenen Durchgang durch die schräge Glasplatte dem Analysator zuführt, in der Figur einem Nicol'schen Prisma. Auf die horizontale Glasplatte kommt der Krystall etc.



Für manche Zwecke bedarf man Lichtes von mannichfaltiger Richtung im Krystall (eines „grofsen Gesichtsfeldes"). Dann werden zwischen den Krystall und die Polarisatoren Konvexlinsen eingeschaltet (Nörrenberg'sches Polarisationsmikroskop, Fig. 2). Der äufsere Spiegel mit Metallbelegung dient nur zur Beleuchtung und wird dem Orte der Lichtquelle entsprechend gestellt. Der andere, ein Satz unbelegter Glasplatten, mufs die vorgeschriebene Neigung haben. Statt dessen kann auch unten ein Nicol vorhanden sein. — Zur Beobachtung kleiner Körper im polarisirten Lichte unter dem gewöhnlichen Mikroskop bringt man zwischen Beleuchtungsspiegel und Körper ein Nicol'sches Prisma und legt ein zweites auf das Okular des Mikroskops.

Vgl. hierzu Klein, Berl. Sitz. Ber. 1893, 221. — Über Polarisationsinstrumente überhaupt z. B. Groth oder Liebisch, Krystallographie. Eingehende Regeln zur Unterscheidung der Krystalle unter dem Mikroskop s. Lehmann, Molekularphysik I 295. 1888.

Meistens gebraucht man den Polarisationsapparat mit „gekreuzten Polarisationsvorrichtungen", wobei das Gesichtsfeld dunkel erscheint. Die beiden, in diesem Falle auf einander senkrechten Polarisationsebenen der Vorrichtungen sollen „Hauptebenen" des Apparates heifsen.

I. Untersuchung doppelbrechender Körper.

Ein Körper bricht das Licht einfach, wenn er amorph oder regulär krystallisirt ist; doppelt, wenn er einem nicht regulären Krystallsysteme angehört oder aus anderen Ursachen, wie Druck, Zug, rasche Kühlung, nach verschiedenen Richtungen ungleich beschaffen ist. Das Licht zerlegt sich hierbei in zwei Wellenzüge, welche senkrecht zu einander polarisirt sind. Aus der ungleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Schwingungen entsteht sowohl die Doppelbrechung, wie im Polarisationsapparat, sobald die Schwingungen sich nach dem Austritt aus einer Krystallplatte wieder zu einer Welle vereinigt haben, die Interferenz. Denn diese Welle hat im allgemeinen einen anderen Polarisationszustand, als vor dem Eintritt in den Krystall, so dafs durch dessen Einbringen in den Apparat das Gesichtsfeld verändert wird. Vgl. **71a**, I.

Es gibt in jedem Körper mindestens eine Richtung, in der eine Lichtwelle unzerlegt fortgepflanzt wird; sie heifst optische Axe. Im amorphen Körper oder einem Krystall des regulären Systems ist in diesem Sinne jede Richtung eine optische Axe. Die anderen Körper haben entweder eine oder zwei optische Axen.

Über Schleifen und Poliren von Krystallplatten s. 8, 17.

Ob ein durchsichtiger Körper einfach oder doppelt bricht, erkennt man mit gekreuzten Polarisatoren. Ein einfach brechender Körper läfst das Gesichtsfeld dunkel mit Ausnahme der, meistens flüssigen Körper, welche das Licht drehen (71) ohne doppelt zu brechen. Ein doppelbrechender Körper erhellt, bez. färbt im allgemeinen das Gesichtsfeld.

Aufsuchen der Schwingungsrichtungen des Lichtes in einer Platte aus einer doppelbrechenden Substanz. Man bringt die Platte zwischen die gekreuzten Polarisationsvorrichtungen. Wenn die Mitte immer dunkel bleibt, so zeigt dies an, dafs die Platte senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist. Sonst hat sie stets zwei um 90^0 verschiedene Lagen, bei denen das Gesichtsfeld bez. die Mitte des Feldes dunkel bleibt. In diesen Stellungen fallen die Schwingungsrichtungen der beiden die Platte

durchsetzenden Wellenzüge in die Hauptebenen des Apparates. — Vgl. **71a**, I.

Herstellung von Komplementärfarben. In jeder anderen Stellung ist das Gesichtsfeld mehr oder weniger erhellt, bez. es treten in hinreichend dünnen Platten (Gypsblättchen) Farben auf, die von der Dicke abhängen und dadurch entstehen, daſs die verschiedenen im weiſsen Licht enthaltenen Farben wegen ihrer ungleichen Wellenlängen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ungleich stark auftreten. Am intensivsten ist die Färbung in der gegen die Dunkelstellung um 45° gedrehten Lage der Platte. Stellt man nun durch Drehen einer der Polarisationsvorrichtungen um 90° auf helles Gesichtsfeld ein, so wird die ganze Erscheinung, also auch die Farbe an jeder Stelle genau komplementär. — Ein doppelbrechendes Prisma (S. 281) als Analysator zeigt die komplementären Erscheinungen gleichzeitig neben einander.

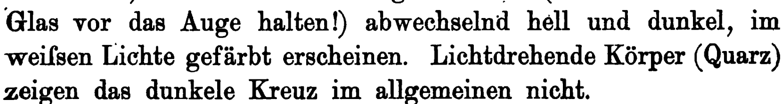
II. Einaxige Krystalle.

Zu diesen gehören die Krystalle des hexagonalen und des quadratischen Systems. Die Richtung der optischen Axe fällt mit der krystallographischen Hauptaxe zusammen. Eine Ebene, welche die optische Axenrichtung enthält, heiſst ein Hauptschnitt. Beispiele sind Kalkspat, Natronsalpeter, Turmalin, Blutlaugensalz, Eis, Quarz. Über letzteren vgl. aber **71**.

Von den beiden Schwingungen, in welche das einen einaxigen Krystall durchsetzende Licht zerfällt, folgt die eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetz (ordentlicher Strahl); sie findet stets zur optischen Axe, also zu dem durch den ord. Strahl gelegten Hauptschnitt senkrecht statt. Eine der oben festgestellten Schwingungsebenen enthält also die optische Axe des Krystalls. Die andere Schwingung fällt in einen Hauptschnitt.

Ringfiguren.

Eine zur Axe senkrecht geschnittene Platte werde zwischen die gekreuzten Polarisationsvorrichtungen gebracht. Die Mitte bleibt stets dunkel. In einem Apparat mit gröſserem Gesichtsfelde — Turmalinzange, Polarisations-Mikroskop — erstreckt sich diese Dunkelheit von der Mitte in die beiden Hauptebenen des Apparates (dunkeles Kreuz); die vier Quadranten sind von Ringen durchsetzt, welche im einfarbigen Lichte (rotes Glas vor das Auge halten!) abwechselnd hell und dunkel, im weiſsen Lichte gefärbt erscheinen. Lichtdrehende Körper (Quarz) zeigen das dunkele Kreuz im allgemeinen nicht.



Je enger die Ringe beisammenliegen, desto gröſser ist bei

gleich dicken Platten die „Doppelbrechung“, d. i. der Unterschied der Lichtgeschwindigkeiten des ordentlichen und des aufserordentlichen Strahles.

Durch Drehung des Analysators um 90° entsteht an jedem Punkte der komplementäre Zustand; das Kreuz wird hell, rote Ringe werden grün, blaue gelb etc.

Unterscheidung positiver und negativer Krystalle.

Ein Krystall, welcher den aufserordentlichen Strahl stärker bricht (langsamer fortpflanzt) als den ordentlichen, heifst positiv und umgekehrt.

Man erkennt das Vorzeichen mit einer sog. Viertelwellen-Glimmerplatte, d. h. einer so dicken Platte, dafs die beiden Schwingungen einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge erfahren (**71 a**, I). Die Glimmerplatte legt oder hält man zwischen die Krystallplatte und den Analysator und zwar so, dafs die, in der Regel durch einen Pfeil bezeichnete Ebene der optischen Axen der Glimmerplatte um 45° gegen die Hauptebenen des Apparates gedreht ist. Dann zeigt die zu untersuchende Krystallplatte nicht mehr das schwarze Kreuz mit den gleichen Ringquadranten, sondern die Ringstücke sind in benachbarten Quadranten gegen einander verschoben, und in der Nähe des nunmehr hellen Mittelpunktes sind zwei dunkele Flecke entstanden. Liegen diese Flecke in der optischen Axenebene der Glimmerplatte, so ist der Krystall negativ und umgekehrt.

Das Glimmerplättchen läfst sich leicht in erforderlicher Dicke abspalten. Man erkennt seine Brauchbarkeit und die Richtung seiner optischen Axenebene am einfachsten dadurch, dafs man dasselbe einmal auf einen bekannten Krystall (Kalkspat, negativ) anwendet. Die Axenebene des Glimmers läfst sich auch aus seiner Lemniskatenfigur (S. 286) bestimmen.

Die Erscheinung erklärt sich unter Zugrundelegung der Fresnel'schen Hypothese in folgender Weise: Angenommen, die Krystallplatte sei negativ, also von den den Krystall schräg durchsetzenden Strahlen pflanzen sich die aufserordentlichen, d. i. die im Apparate radial schwingenden rascher fort als die ordentlichen, peripherisch schwingenden Strahlen. In einer gewissen geneigten Richtung, d. h. in der Krystallfigur in einer gewissen Entfernung vom Mittelpunkte, welche innerhalb des ersten dunkelen Ringes liegen mufs, wird der radial schwingende Strahl dem anderen im Krystall

um $\frac{1}{4}\lambda$ vorauseilen; denn dem ersten dunkelen Ringe entspricht ja ein Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$.

Nun pflanzt eine Glimmerplatte einen sie durchsetzenden Strahl, wenn er in der Axenebene schwingt, am langsamsten fort; unsere Viertelwellenplatte verzögert also die in ihrer Axenebene schwingende Lichtkomponente gegen die andere um $\frac{1}{4}\lambda$. Faſst man nun von den oben genannten Strahlen, deren radiale Komponente im Krystall um $\frac{1}{4}\lambda$ vorausgeeilt war, diejenigen ins Auge, welche in der Axenebene der Glimmerplatte liegen, so sieht man, daſs hier der Gangunterschied im Krystall durch die Glimmerplatte aufgehoben wird, das Gesichtsfeld also seine natürliche Beschaffenheit d. h. Dunkelheit haben muſs. Daher entstehen die beiden dunkelen Flecke in der Axenebene der Glimmerplatte.

Daſs ein positiver Krystall sich umgekehrt verhalten muſs, folgt von selbst. — Zugleich übersieht man leicht, daſs die Durchmesser der Ringe in zwei Quadranten um $\frac{1}{4}$ Ringabstand vergröſsert, in den anderen beiden Quadranten um ebensoviel verkleinert sein müssen.

Über die Messung von Lichtbrechungsverhältnissen der Krystalle vgl. 63.

III. Zweiaxige Krystalle. Optischer Axenwinkel.

Ein Krystall aus dem rhombischen oder einem schiefaxigen System hat zwei optische Axen, deren gegenseitige Neigung der innere optische Axenwinkel α_0 heiſst. Der Krystall besitzt drei, der Elasticität des Äthers in den drei optischen Elasticitätsaxen (die im rhombischen System natürlich mit den krystallographischen Axen zusammenfallen) entsprechende Hauptbrechungsverhältnisse, die nach ihrer Gröſse geordnet n_1, n_2, n_3 heiſsen mögen. Die optischen Axen liegen in der durch die Axen der gröſsten und der kleinsten Elasticität gehenden Ebene. Sie bilden im Krystall mit der Axe der gröſsten Elasticität je den Winkel $\frac{1}{2}\alpha_0$, gegeben durch die Beziehung

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_0 = \frac{n_1^2}{n_2^2}\,\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2} \text{ oder } = \frac{1-(n_3/n_2)^2}{1-(n_3/n_1)^2}.$$

Wenn $\alpha_0 < 90^0$, so heiſst der Krystall positiv und umgekehrt.

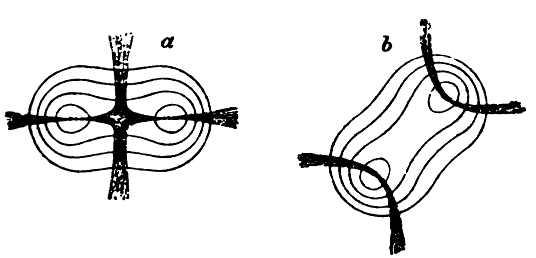
Der äuſsere Axenwinkel α, d. h. der Winkel der Strahlen, deren Schwingungen im Krystall sich nach den Richtungen der beiden optischen Axen fortgepflanzt haben, ist gegeben durch $\sin\frac{1}{2}\alpha = n_2 \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha_0$; s. Figur.

Beispiele: Kalisalpeter, Arragonit, Topas, Glimmer, Gyps, Baryt, Kupfervitriol.

Ringfiguren.

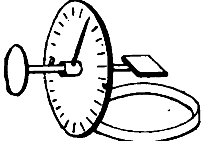
Aus einem optisch zweiaxigen Krystall sei eine zur Mittellinie der beiden Axen senkrechte Platte geschliffen. Im ge-

kreuzten Polarisationsapparat liefert die Platte, wenn das Gesichtsfeld hinreichend grofs ist, eine Figur, im homogenen Licht (gefärbte Gläser vorhalten!) aus hellen und dunkelen, im weifsen Licht aus gefärbten Lemniskaten, welche von einem dunkelen Kreuz oder von hyperbolischen dunkelen Ästen durchzogen sind.



Die beiden Punkte in den dunkelen Ästen, um welche sich die Lemniskaten zusammenziehen, bezeichnen die optischen Axen des Krystalles. Fällt die Verbindungslinie der beiden Axenbilder mit einer Hauptebene des Apparates zusammen, so erscheint das dunkele Kreuz (*a*). Dreht man die Krystallplatte von hier aus um 45°, so erscheinen hyperbolische Äste symmetrisch gegen die Lemniskaten (*b*).

Optischer Axenwinkel.



Eine kleine Mefsvorrichtung, bestehend aus einem geteilten Kreis, an dessen Drehungsaxe die Krystallplatte mit Wachs oder mit einem Kork befestigt wird und die mit einem Ring auf den unteren Teil des Nörrenberg-schen Apparates aufgesetzt wird, ist leicht herzustellen. Einen besonderen Axenwinkelapparat nach Groth führt die Fuefs'sche Werkstätte aus.

Man markirt an der Krystallplatte die zur Verbindungslinie der optischen Axenbilder senkrechte Richtung und befestigt die Platte dann an der Drehaxe des Teilkreises, so dafs diese Richtung in der Drehaxe liegt.

Zur Einstellung der Axenrichtungen ist Fig. *b* am geeignetsten; man hat die beiden gekreuzten Hauptebenen des Polarisationsapparates also symmetrisch um 45° geneigt gegen die Drehaxe zu machen. Nun stellt man eins von den optischen Axenbildern (Scheitelpunkt der Hyperbel) in die Visirrichtung des Apparates (Fadenkreuz) ein und liest die Kreisteilung ab. Der Winkel α, um welchen man alsdann drehen mufs, damit der andere Scheitelpunkt in die Visirlinie des Apparates fällt, ist der scheinbare oder äussere optische Axenwinkel, d. h. der

Winkel der Lichtstrahlen, deren Wellen den Krystall in der Richtung der Axen durchlaufen haben, nach ihrem Austritt in die Luft.

Den wirklichen Winkel α_0 im Krystall erhält man (vgl. Fig. S. 285) aus dem scheinbaren α und dem mittleren Hauptbrechungsverhältnis n_2 mittels der Beziehung $\sin\frac{1}{2}\alpha_0 = \sin\frac{1}{2}\alpha : n_2$.

Bei weiter auseinanderstehenden Axen erscheint natürlich nur eine Axe zur Zeit im Gesichtsfeld. Wenn der Winkel noch gröſser ist, so kann es vorkommen, daſs wegen der Brechung und der totalen Reflexion überhaupt kein Licht, welches die Platte in der Richtung der Axen durchlaufen hat, in die Luft austritt. In diesem Falle kann man die Messung innerhalb einer Flüssigkeit ausführen, welche von zwei ebenen, zur Sehlinie senkrechten Glasflächen begrenzt wird. Das Verfahren ist im übrigen das nämliche wie vorhin. Der hier beobachtete Axenwinkel sei α', so findet man α, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit ist, aus der Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = N \sin\tfrac{1}{2}\alpha'.$$

Da der Axenwinkel von der Farbe abhängt, so verlangt die genaue Messung eine bestimmte Lichtsorte, z. B. das Licht der Natriumflamme oder auch des roten Kupferglases, welches man vor das Auge hält. Der Unterschied der Axenwinkel in verschiedenen Farben heiſst Axendispersion für diese Farben.

Brechungsverhältnis N einer Flüssigkeit. Eins der einfachsten Mittel, dieses zu bestimmen, ist die Messung eines und desselben Axenwinkels (z. B. Baryt) in der Luft α und in einer Flüssigkeit α'. Es gilt dann die vorige Gleichung.

71. Optisches Drehvermögen; Saccharimetrie (Arago und Biot, 1811—1819).

Wird das dunkele Gesichtsfeld eines Polarisationsapparates (70) hell durch das Einschieben eines durchsichtigen Körpers, so ist dieser entweder doppelbrechend oder er dreht die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes. Ein Körper letzterer Art heiſst „optisch aktiv“; man nennt ihn „rechts drehend“, wenn die Schwingungsebene des Lichtes sich im umgekehrten Sinne des Korkziehers verschiebt, d. h. wenn dieselbe dem empfangenden Auge in der Richtung des Uhrzeigers gedreht erscheint.

Specifische Drehung nennt man bei festen Körpern (Krystallen) den Drehungswinkel für die Längeneinheit des durchstrahlten Körpers. Bei

drehenden Flüssigkeiten und Lösungen aktiver Körper in einem inaktiven Lösungsmittel bezieht man die Drehung auf die Masseneinheit des drehenden Körpers. Enthält die Flüssigkeit in 1 cm^3 die Masse k gr des Körpers und gibt die Schicht von der Länge l den Drehwinkel α, so ist die spec. Drehung also $[\alpha]=\alpha/(l\cdot k)$. Hat eine Lösung das spec. Gewicht s und den Procentgehalt p des Stoffes, so daſs $k=\frac{1}{100}ps$ ist, so wird also $[\alpha]=100\,\alpha/(lps)$. Als Normaltemperatur wird gewöhnlich 20° gewählt. Die spec. Drehung pflegt mit wachsender Koncentration der Lösung etwas veränderlich zu sein, was man in zugefügten Korrektionsgliedern darstellt. Molekulares Drehvermögen heiſst die spec. Drehung multiplicirt mit dem Molekulargewicht des Körpers.

Die Drehung hängt stark von der Farbe ab; brechbareres Licht wird stärker gedreht; „Dispersion" der Drehung. — Über Beobachtung mit spektral zerlegtem Licht vgl. den Schluſs. Farbige Lichtquellen in **59a**.

Zuckerlösungen. Diese werden am häufigsten untersucht. Die spec. Drehung des in Wasser gelösten Rohrzuckers ist für Natriumgelb $=66{,}5^0/\mathrm{dm}$, d. h. der Drehwinkel α durch eine Lösung, welche in 100 cm^3 z gr Zucker enthält, beträgt in einer Schicht von l dm Länge

$$\alpha=0{,}665^0\cdot zl,\quad \text{woraus}\quad z=1{,}504\,\alpha/l.$$

Für das weiſse Licht im Mittel pflegt gesetzt zu werden

$$\alpha=0{,}71^0\cdot zl,\quad \text{woraus}\quad z=1{,}41\,\alpha/l.$$

Streng genommen wächst die Drehung mit dem Zuckergehalte der Lösung ein wenig verzögert an. Genauer ist für Natronlicht bei 20° (Schmitz und Tollens) nach der Berechnung von Landolt

$$\alpha=(0{,}6667\cdot z-0{,}000095\cdot z^2)l\quad \text{oder}\quad z=1{,}500\cdot\frac{\alpha}{l}+0{,}00032\cdot\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2.$$

Von der Temperatur hängt die spec. Drehung in Zuckerlösungen sehr wenig ab. Gilt $[\alpha_{20}]$ für 20°, so ist für eine andere Temperatur t (Schönrock)

$$[\alpha_t]=[\alpha_{20}](1-0{,}000217\,(t-20)).$$

Das spec. Drehvermögen des Quarzes in der Richtung der Axe ist für Natronlicht bei der Temperatur t gleich $21{,}72\,(1+0{,}00015\,(t-20))$ (Gumlich); für die grüne Quecksilberlinie gleich $25{,}52\,(1+0{,}00018\,(t-15))$ °/mm (Macé de Lépinay).

Setzt man die Drehung für Natrongelb gleich Eins, so stellen sich die Drehungen für die anderen Farben, bei Quarz und Zucker fast genau in gleichem Verhältnis, im Mittel etwa folgendermaſsen dar:

Mittleres	Rot	Gelb	Grün	Blau	Violett
Drehung =	$^3/_4$	1	$^4/_3$	$^5/_3$	$^9/_4$

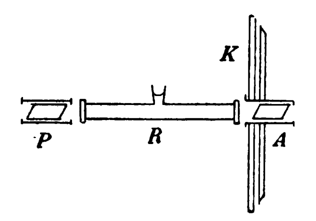
Hiernach kann man mit Hilfe der im Eingang gegebenen Zahlen für Natrongelb die Erscheinungen der Färbung übersehen. Genauere Angaben für Quarz s. Tab. 24.

Das Drehvermögen d kann als Funktion der Wellenlänge λ (Tab. 23) durch den Ausdruck $d=a/\lambda^2+b/\lambda^4$ dargestellt werden.

Die eingehendste Behandlung der drehenden Körper, der Methoden und Apparate bei Landolt, Optisches Drehungsvermögen, 2. Aufl. 1898; Zahlenmaterial in Landolt u. Börnstein Tabellen, 2. Aufl. S. 450 ff.

I. Polarimeter mit drehbarem Nicol.

1. Mitscherlich, 1811. Das Instrument besteht aus dem festen polarisirenden Nicol *P* und dem auf dem Teilkreise *K* drehbaren analysirenden Okular-Nicol *A*. Ein weitsichtiges Auge verlangt aufserdem eine schwache Lupe vor *A* oder die Brille. Man stellt eine Natronflamme hinter dem Instrument vor einem schwarzen Schirm auf. Das von dem Leuchtgase herrührende bläuliche Licht wird durch gelbes Glas oder eine Lösung von Kaliumbichromat beseitigt.



Man bringt eine leere oder mit Wasser gefüllte Röhre *R* zwischen die Nicol'schen Prismen und dreht den Okular-Nicol so, dafs die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel erscheint. Darauf wird die mit der Flüssigkeit bez. der (sehr gleichförmig gemischten!) Lösung gefüllte Röhre eingeschoben, wodurch das Gesichtsfeld in der früheren Kreisstellung hell wird. Die Anzahl Grade, um welche man den Analysator drehen mufs, damit wieder die Mitte dunkel wird, ist der Winkel α; Drehung im Sinne des Uhrzeigers bedeutet Rechtsdrehung.

Die Deckplatten der Röhren darf man nicht zu fest anschrauben, weil die sonst entstehende Doppelbrechung des Glases die Einstellung stört.

Der Nullpunkt der Drehung läfst sich dadurch auf den Nullpunkt der Teilung bringen, dafs man einen der Nicols in seiner Fassung dreht.

Den Drehwinkel eines festen Körpers, z. B. einer zur Axe senkrecht geschnittenen Quarzplatte, mifst man ebenso wie oben, indem man den Körper zwischen die beiden Nicol bringt, wobei die Röhre zum Abblenden äufseren Lichtes dienen kann. Die optische Axe des Quarzes mufs genau in der Visirrichtung liegen, wenn man nicht grofsen Täuschungen ausgesetzt sein will. Man orientirt die Platte, deren Axenrichtung mit dem Polarisationsmikroskop (S. 281) kontrolirt sei, nach dem Spiegelbilde des eigenen Auges oder einer kleinen vor das Auge gehaltenen Flamme.

Auch mit weifsem Licht läfst sich eine genäherte Messung ausführen. Weil die einzelnen Farben verschieden stark gedreht werden, so entsteht hier nach Einbringen des drehenden Körpers kein Dunkel mehr, sondern ein Wechsel von Farben. Man stellt auf die „empfindliche Farbe" ein, in welcher das Gelb ausgelöscht ist, d. h. auf ein Violett, welches den ziemlich schroffen Übergang von Rot in Blau bildet. Für die Berechnung gilt bei Zuckerlösungen die Konstante 1,41 (S. 288).

Sollte man unsicher sein, ob der Winkel gröfser oder kleiner als 180° ist, so beobachte man mit rotem Lichte (Kupferglas) und mit Natrongelb. Die beiden Drehungen verhalten sich durchschnittlich etwa gelb : rot = 5 : 4.

Einen Zweifelfall, ob ein Körper links oder rechts dreht, entscheidet man danach, dafs in dem richtigen Sinne der Drehung des Okulars der empfindliche Farbenwechsel für weifses Licht von blau nach rot stattfinden mufs.

Eine gröfsere Schärfe der Einstellung bieten die folgenden Abänderungen des Mitscherlich'schen Instrumentes.

2. Doppelquarzplatte. Zwei nebeneinander stehende, gleich dicke links und rechts drehende Quarzplatten, am günstigsten 3,75 mm dick, werden vor den Polarisator eingesetzt, genau senkrecht zur Sehlinie.

Bei gekreuzten wie bei parallelen Nicols erscheinen beide Platten im Natronlicht gleich hell, im weifsen Licht gleich gefärbt. Platten von 3,75 mm zwischen parallelen Nicols geben die violette sog. empfindliche Farbe und sind auch im Natronlicht, welches sie um etwa 80° drehen, sehr empfindlich.

Nach Einbringung einer drehenden Substanz erscheinen beide Hälften ungleich. Den Drehwinkel α der Substanz findet man als den Winkel, um den man nachdrehen mufs, um die Gleichheit wieder herzustellen. Ist die Drehung beträchtlich, so verhindert die Farbenzerstreuung weifsen Lichtes eine vollständige Gleichheit der Doppelplatte, so dafs man auf Natronlicht etc. angewiesen ist.

3. Polaristrobometer (Wild). Dasselbe gibt vermöge einer eingeschobenen Savart'schen Platte (zwei Quarze oder Kalkspate unter 45° gegen die Axe geschnitten, mit rechtwinklig gekreuzten Hauptschnitten) Streifen im Gesichtsfeld, welche bei

homogenem Licht hell und dunkel, bei weifsem Licht farbig sind. Das Okular wird zunächst so weit herausgezogen, dafs diese Streifen möglichst scharf erscheinen.

Die polarimetrische Einstellung geschieht auf das Verschwinden der Streifung in der Mitte des Gesichtsfeldes, welches in vier je um 90° verschiedenen Stellungen mit gleicher Empfindlichkeit eintritt, falls die Hauptschnitte des Polarisators und der Savart'schen Platte auf die gegenseitige Neigung von 45° fixirt sind. An neueren Instrumenten ist diese Neigung variabel gemacht. Dadurch kann die Empfindlichkeit in einem Quadrantenpaare — auf Kosten des anderen — gesteigert werden. Dann benutzt man natürlich nur das empfindlichere (dunklere) Paar.

Die Instrumente haben häufig noch eine zweite Kreisteilung, welche bei Anwendung einer 200 mm langen Röhre direkt den Gehalt von 1 Liter einer Lösung an gr Zucker ergibt.

Halbschattenapparate. Das Gesichtsfeld ist in zwei Hälften geteilt, in denen beiden sich polarisirtes Licht, aber von verschiedenen Schwingrichtungen s_1 und s_2 (Fig.) befindet. Nullpunkt der Stellung des Analysators ist diejenige Stellung, in welcher die beiden Hälften gleich hell erscheinen, d. h. in welcher die Schwingungsebene A des Analysators gleiche Winkel mit den Schwingungsebenen in den beiden Hälften des Gesichtsfeldes bildet.

Die gröfste Empfindlichkeit des relativen Helligkeitswechsels entsteht, wenn die Richtungen s_1 und s_2 sich wenig von einander unterscheiden und die Richtung A den stumpfen Winkel zwischen ihnen halbirt. Doch ist der Kleinheit der Neigung $s_1 s_2$ durch die abnehmende Lichtstärke eine Grenze gesetzt. Man probirt die, für die Lichtstärke und für die Durchsichtigkeit des Körpers, dessen Drehung gemessen werden soll, günstigste Stellung aus.

Der Nullpunkt ist immer erst nach dieser Regulirung zu bestimmen.

Nach Einschiebung des drehenden Körpers wird wieder auf gleiche Helligkeit eingestellt. α ist der Winkel, um den gedreht werden mufs, um die gleiche Helligkeit der beiden Hälften wieder herzustellen.

In neuester Zeit werden auch Instrumente mit mehr als

zweiteiligem Gesichtsfelde konstruirt, bei denen der Kontrast der Helligkeiten die Genauigkeit der Einstellung vergröfsert.

4. Halbschattenapparat nach Laurent. Man beleuchtet mit Natriumlicht. Die Hälfte des Gesichtsfeldes ist vor dem Polarisator von einer Krystallplatte bedeckt (Glimmer- oder Quarzplatte, parallel zur Axe geschnitten), welche die beiden Schwingungskomponenten, in die der Strahl bei dem Eintritt in die Krystallplatte zerfällt (Fig. *a*), um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschiebt. Bei dem Austritt (Fig. *b*) setzen sich beide Komponenten wieder zu einer einzigen Welle zusammen, deren Schwingungsebene also gegen die des eintretenden Strahles gedreht ist, so dafs aus der belegten und der unbelegten Hälfte, ähnlich wie bei dem Doppelquarz, Strahlen von verschiedener Schwingungsrichtung heraustreten. Vgl. **71a**, I.

5. Halbschattenapparat nach Lippich. Das Licht durchläuft zuerst ein gröfseres Polarisationsprisma mit geraden Endflächen (Glan'sches Prisma), dann ein zweites ähnliches, welches nur das halbe Gesichtsfeld einnimmt. Ersteres ist mit Hilfe eines Hebelarms um seine Längsaxe drehbar, so dafs der Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen verändert und dadurch die gröfste Empfindlichkeit bewirkt werden kann. Erst dann wird der Nullpunkt bestimmt.

Die Beobachtung erfordert homogenes Licht, welches aber beliebige Wellenlänge haben kann.

6. Ein Cornu-Jellet'sches Prisma, d. h. ein Kalkspat, der nach einer Richtung, die von der Normalen auf dem Hauptschnitt ein wenig abweicht, zerschnitten und in entgegengesetzter Lage wieder verkittet ist, gibt gleichfalls zwei Hälften des Gesichtsfeldes, auf deren gleiche Helligkeit man einstellt.

II. Bestimmung eines Drehvermögens im Spektrum.

Beleuchtet man den Polarisationsapparat (Mitscherlich) mit gemischtem Licht (Sonne), so kann man das durchgegangene Licht mit einem Spektralapparat zerlegen. Die gekreuzte Stellung der Nicols zeigt sich darin, dafs das ganze Spektrum dunkel ist. Das Einschalten einer drehenden Substanz erhellt das Spektrum. Dreht man den Analysator nach, so tritt im

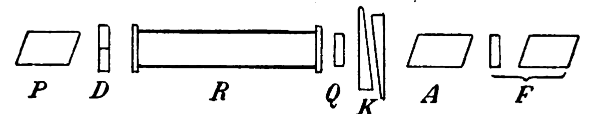
Spektrum ein dunkeles Band auf, welches von dem roten nach dem violetten Ende wandert und dessen Mitte der vollkommen ausgelöschten, den Fraunhofer'schen Linien zu entnehmenden Wellenlänge (S. 236; Tab. 23) entspricht. Durch die Stellung des Analysators wird also der Drehwinkel dieser Wellenlänge gemessen.

III. Saccharimeter mit Quarzkeilen (Soleil).

Die Drehung der Polarisationsebene durch eine Zuckerlösung kann durch eine entgegengesetzt drehende Quarzplatte kompensirt werden, und zwar nicht nur für einfarbiges sondern für beliebiges Licht, weil die Farbenzerstreuung im Quarz derjenigen in der Zuckerlösung sehr nahe proportional ist (S. 288). Man kann also die Drehung in Zuckerlösungen zwischen den bisher beschriebenen Vorrichtungen, anstatt sie durch Nachdrehen des Nicols zu messen, aus der Gröfse der Verschiebung von Quarzkeilen ableiten, welche zur Kompensation notwendig ist.

Soleil'sches Saccharimeter.

Das Licht tritt durch den polarisirenden Nicol *P* ein und geht von da durch die Doppelquarzplatte *D* (vgl. I 2). Hierauf folgt das Rohr *R*,



welches mit der Lösung gefüllt werden kann. Dann der Kompensator, bestehend aus einer rechtsdrehenden Quarzplatte *Q* und den beiden linksdrehenden Quarzkeilen *K*, welche sich mittels eines Triebes gegeneinander verstellen lassen, also zusammen einen Linksquarz von veränderlicher Dicke vorstellen. In einer mittleren Stellung ist die Gesamtdicke derjenigen des Rechtsquarzes *Q* gleich, so dafs *Q* und *K* zusammen keine Wirkung haben. Diese Stellung soll der Einstellung Null auf der mit dem Trieb verbundenen Teilung entsprechen. Es folgt dann der analysirende Nicol *A*, dessen Polarisationsebene derjenigen von *P* parallel sein soll.

Da Zuckerlösungen etc. gefärbt sein können und da nicht alle Augen für den gleichen Farbenwechsel empfindlich sind, so ist die violette Übergangsfarbe nicht immer die empfindlichste. Deswegen hat man in der Regel dem Auge zugewandt (bei manchen Instrumenten auch wohl umgekehrt auf der Seite der Flamme) noch einen Farbenregulator *F*. Dieser besteht wieder aus einer Quarzplatte und einem drehbaren Nicol, mit dessen Drehung die Farbe des Gesichtsfeldes sich ändert. Auf den Nullpunkt des Instrumentes hat diese Drehung keinen Einflufs.

Es ist aber zu beachten, dafs überhaupt nicht alle Augen zur Beobachtung einer gleichen Färbung geeignet sind, so dafs im Handelsverkehr die Anwendung dieser Methode beanstandet wird.

Man legt das leere oder mit Wasser gefüllte Rohr ein, beleuchtet mit einer weifsen Flamme oder mit Tageslicht und zieht zuerst das mit dem Okular verbundene, oben nicht mit gezeichnete kleine Fernrohr so weit heraus, dafs die Quarzplatten scharf begrenzt erscheinen. Um die zweckmäfsigste Färbung zu erhalten, stellt man mittels der Zahnstange zunächst auf nicht ganz gleiche Färbung der Halbkreise ein. Durch Drehung des Farbenregulators (siehe oben) bewirkt man dann die Färbung, welche den gröfsten Unterschied der Halbkreise gibt.

Nun stellt man mit dem Trieb auf gleiche Färbung ein und liest die Teilung ab, bringt die Zuckerlösung ein, stellt wieder ein und liest ab, beide Einstellungen einige Male wiederholend.

Es entspricht die Verschiebung um 1, bez. auch 0,1 Teilstrich einer Drehung des Natriumlichtes bei den Saccharimetern

Soleil-Ventzke um 0,345° und Soleil-Duboscq um 0,216°.

Der Zuckergehalt z von 100 cm³ der Lösung in gr wird bei Anwendung der 2 dm langen Röhre hiernach und aus der spec. Drehung des Zuckers S. 288 gefunden, wenn die Verschiebung von der leeren auf die gefüllte Röhre p Teile betragen hat:

$$\text{Soleil-V.}\ z = 0{,}260 \cdot p, \qquad \text{Soleil-D.}\ z = 0{,}163 \cdot p.$$

Als Normaltemperatur gilt in der Saccharimetrie 20°. — Zu bemerken ist, dafs mit 0,2600 berechnet, der Gehalt z in Luft gewogenen Zucker bedeutet. (Die früher giltige Zahl 0,2605 bezog sich auf das „Mohr'sche Cbcm", welches um 2 Promille gröfser ist als das jetzt angenommene richtige.)

Für Zuckersorten, deren Gehalt an reinem Zucker gefunden werden soll, ergibt sich also die Regel: man löse 26,0 bez. 16,3 gr des Rohrzuckers zu 100 cm³ Lösung, dann zeigt die Verschiebung des Mafsstabes den reinen Zuckergehalt in Procenten an.

Die Probe für richtige Teilung ist durch die Anwendung einer „Normal-Lösung" von 26,0 bez. 16,3 gr in 100 cm³ gegeben. Die Verschiebung mufs dann 100 Teilstriche betragen.

Soll der Nullpunkt der Teilung mit dem Zuckergehalt Null zusammenfallen, so stellt man bei leerer Röhre den Index auf Null und dreht am hinteren Nicol'schen Prisma, bis die Quarzplatten gleich gefärbt sind.

Auch an den Quarzkeilapparaten kann Natriumlicht gebraucht werden. Die obigen Zahlen behalten ihre Giltigkeit.

Bestimmung des Zuckergehaltes, wenn noch andere drehende Substanzen vorhanden sind.

Die polarimetrische Elimination[1]) anderer drehender Substanzen als Rohrzucker beruht darauf, dafs der rechtsdrehende Rohrzucker durch 10 Minuten langes Erwärmen mit Salzsäure auf etwa 70° in links drehenden Invertzucker, ein Gemenge von Dextrose und Lävulose verwandelt wird. — Während Rohrzuckerlösungen von der Temperatur so gut wie unabhängig drehen, wird die Invertzuckerlösung ziemlich stark beeinflufst. Eine invertirte Lösung von der Länge l dm, welche in 100 cm³ z gr früheren Rohrzuckers enthält, dreht die Polarisationsebene des Natriumlichtes bei der Temperatur t' um den Winkel

$$(0{,}2330 - 0{,}00304\,(t' - 20)) \cdot zl.$$

Um in einer Rohrzuckerlösung, bei der man nicht sicher ist, dafs andere drehende Substanzen ausgeschlossen sind, die Drehung durch den Zucker allein zu bestimmen, ergibt sich aus dem Vorstehenden das folgende Verfahren. Nachdem die Drehung (d. h. der Winkel α oder die Verschiebung p der Quarzkeile) der gewöhnlichen Lösung bestimmt worden ist, nimmt man 100 cm³ derselben, versetzt sie mit 10 cm³ koncentrirter Salzsäure und erwärmt 10 Minuten lang auf 70°. Nach der Abkühlung füllt man mit dieser invertirten Lösung eine um den zehnten Teil längere Röhre als die erste (oder wenn dieselbe Röhre benutzt wird, so multiplicirt man die jetzt beobachteten Winkel mit 1,1) und beobachtet die nunmehr erfolgende Drehung α' (bez. p') nach links. Die Temperatur der Lösung bei dieser zweiten Beobachtung sei t'. Um schliefslich die Drehung durch den Rohrzuckergehalt allein zu bekommen, teilt man die Summe $\alpha + \alpha'$ oder $p + p'$ durch $1{,}350 - 0{,}00457\,(t' - 20)$.

Denn wenn die zu eliminirende Drehung durch den Nichtzucker gleich β gesetzt wird, so hat man (S. 288 und oben)

$$\alpha = 0{,}665\,zl + \beta,$$
$$\alpha' = (0{,}2330 - 0{,}00304(t' - 20))\,zl - \beta.$$

Folglich

$$\alpha + \alpha' = (0{,}8980 - 0{,}00304\,(t' - 20))\,zl = (1{,}350 - 0{,}00457\,(t' - 20)) \cdot 0{,}665\,zl.$$

$0{,}665\,zl$ ist aber die Drehung durch den Zuckergehalt allein.

Zusammenstellung der technischen Mefsmethoden für Rohzucker in Frühling u. Schulz, Anleitung etc., 5. Aufl. 1897, sowie bei Herzfeld, ZS. d. Deut. Ver. f. Zucker-Ind. 49, 545. 1899.

---

1) Technisch ist die Elimination mittels Fehling'scher Lösung gebräuchlich.

71a. Erzeugung und Untersuchung elliptischen Lichtes. Babinet's Kompensator. Metallreflexion.

I. Schwingungsformen des Lichtes nach dem Durchtritt durch eine Krystallplatte.

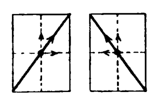
Die Betrachtungen und Untersuchungen werden stets am einfachsten, wenn man von linear polarisirtem, d. h. nur in einer Ebene schwingendem Licht ausgeht.

Solches Licht von der Wellenlänge λ gehe durch eine Platte aus einem doppelbrechenden Krystall in einer anderen Richtung, als der einer optischen Axe. Die eintretende Schwingung zerfällt im Krystall nach zwei zu einander senkrechten, durch die Natur des Krystalles und die Lage des Strahles gegen die optischen Elasticitätsaxen des Krystalles bestimmten Richtungen in Komponenten, die sich mit ungleichen Geschwindigkeiten (Wellenlängen) fortpflanzen. Die durch die Strahlenrichtung gehenden Ebenen, welche diese Komponenten enthalten, sollen die Hauptebenen heifsen. Bei dem Wiederaustritt in das unkrystallinische Mittel setzen die dann vorhandenen beiden Komponenten sich wieder in eine einzige Schwingung zusammen. Vgl. auch **70**.

1. Fällt die Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes in eine der Hauptebenen, so wird das Licht nicht geändert, weil die eine der Komponenten gleich Null ist.

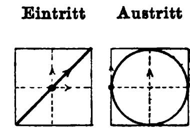
2. Ferner ist das Licht nach seinem Durchtritt ungeändert, wenn der Gangunterschied der beiden Schwingungen im Krystall λ, 2λ, 3λ etc. beträgt, weil in diesem Falle die Komponenten bei dem Austritt dieselben gegenseitigen Beziehungen haben, wie bei dem Eintritt.

3. Der Gangunterschied betrage $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ etc.; dann bleibt das austretende Licht geradlinig polarisirt, schwingt aber im allgemeinen in einer anderen Ebene als beim Eintritt. Bildete die Schwingungsrichtung vor dem Eintritt mit einer Hauptebene den Winkel ω (Einfallsazimut), so bildet die des austretenden Lichtes mit derselben Hauptebene den gleichen Winkel ω nach der entgegengesetzten Seite; vgl. die Figur, die den Bewegungszustand des durch seine Gleichgewichtslage hindurchgehenden Ätherteilchens bei dem Eintritt und dem Austritt des Strahles andeutet, gesehen in der Richtung des Strahls; die punktirten Linien bedeuten die Komponenten im Krystall, die ausgezogenen die Schwingungen in der Luft. Specieller Fall: $\omega = 45^0$; das austretende Licht hat eine um 90^0 gedrehte Schwingungsrichtung.



4. Die Schwingung des eintretenden Lichtes sei gegen die Hauptebenen um 45^0 geneigt. Der Gangunterschied betrage $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ etc. Das austretende Licht ist cirkular polarisirt, d. h. die Bahnen der Ätherteilchen sind Kreise. Denn wenn z. B. die horiz. Komponente gegen die vertikale um $\frac{1}{4}$ Schwingung zurückgeblieben ist, so passirt das Äther-

teilchen bei dem Austritt der Welle bezüglich der Vertikalbewegung die Gleichgewichtslage mit der gröfsten Geschwindigkeit zu einer Zeit, in der es horizontal ohne Geschwindigkeit in der Elongation ist. Es hat eine auf einer Kreisperipherie tangentiale Geschwindigkeit. $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$, etc. gibt die Kreisbewegung entgegengesetzt gerichtet, wie $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{7}{4}\lambda$ etc. Ebenso wird die Schwingungsrichtung umgekehrt, wenn die Schwingungsebene des eintretenden Lichtes um 90° geändert wird.



Anstatt $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$ etc. kann natürlich, wenn s eine ganze Zahl ist, überall gesetzt werden $s\lambda + \frac{1}{4}\lambda$, $s\lambda + \frac{1}{2}\lambda$ etc.

5. In allen anderen Fällen tritt elliptisch polarisirtes Licht aus. Falls das Azimut der eintretenden Schwingung gegen die Hauptebenen $= 45^0$ war (vgl. Nr. 4), so ist das Axenverhältnis der Schwingungsellipse für den Gangunterschied $k \cdot \lambda$

$$a/b = \mathrm{tg}\,(k \cdot 180^0).$$

Die Ellipsen sind um so gestreckter bez. um so runder, je näher der Gangunterschied 0, $\frac{1}{2}\lambda$, λ, $\frac{3}{2}\lambda$ etc. bez. $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ etc. beträgt. Vgl. auch die Figur S. 301. — Bei den Gangunterschieden $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$ etc. fallen die Axen der Ellipse in die Hauptebenen.

II. Änderung des Lichtes durch Reflexion, insbesondere an Metallen.

Im vorigen wurde das Licht nur durch die Phasenverschiebung der Schwingungskomponenten geändert. Bei der Reflexion tritt nun weiter eine ungleiche Schwächung auf, welche die beiden „Hauptkomponenten", nämlich die parallel und die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente hier im allgemeinen erfahren.

Reflexion an durchsichtigen Körpern.

Sehen wir von einzelnen sehr stark brechenden Körpern, wie Diamant, sowie von der Totalreflexion ab, so besteht die Änderung des Lichtes hier nur in ungleicher Schwächung der beiden Komponenten. Bedeuten α und β den Einfalls- und den Brechungswinkel, so beträgt (Fresnel, 1823) der reflektirte Bruchteil der Intensität für Lichtschwingungen zur Einfalls-Ebene

senkrecht (d. h. in der E.-E. polarisirt) $\sin^2(\alpha - \beta)/\sin^2(\alpha + \beta)$,
parallel (d. h. senkrecht zur E.-E. polarisirt) $\mathrm{tg}^2(\alpha - \beta)/\mathrm{tg}^2(\alpha + \beta)$.

Der zweite Ausdruck wird Null für den „Polarisationswinkel", d. h. wenn $\alpha + \beta = 90^0$; vgl. S. 279.

Eine merkliche gegenseitige Phasenverschiebung findet hier nicht statt. Linear polarisirtes einfallendes Licht bleibt daher auch nach der Reflexion stets linear polarisirt; war es schräg zur Einf.-Eb. polarisirt, so erleidet es durch die Reflexion im allgemeinen eine Drehung seiner Pol.-Ebene, es schwingt nachher in einem anderen Azimut.

Reflexion an Metallen.

Bei der Reflexion an stark absorbirenden Substanzen wirken beide Änderungen zusammen; die Hauptkomponenten erleiden durch Metallreflexion sowohl eine ungleiche Schwächung wie eine gegenseitige Phasenänderung. Linear polarisirt einfallendes Licht ist also nach der Reflexion im allgemeinen elliptisch polarisirt.

Die beiden Änderungen hängen von der Natur des Metalles, von der Wellenlänge des Lichtes und jede in ihrer Art vom Einfallswinkel ab. Die Phasenverschiebung wächst von dem Betrage Null bei senkrechter bis zu $\frac{1}{2}\lambda$ bei streifender Reflexion.

Die Eigenschaften eines bestimmten Metalles, aus denen die einzelnen Erscheinungen sich ableiten lassen, pflegen zusammengefaſst zu werden in die beiden Begriffe seines Haupteinfallswinkels und Hauptazimuts.

Haupteinfallswinkel Φ eines Spiegels heiſst der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Lot bilden muſs, damit die beiden Hauptkomponenten durch die Reflexion eine gegenseitige Verschiebung um $\frac{1}{4}\lambda$ erleiden.

Hauptazimut A. Unter dem eben definirten Haupt-Einfallswinkel falle auf den Spiegel Licht, dessen Pol.-Ebene gegen die E.-Ebene um 45° geneigt ist. Die bei der Reflexion entstandene Phasendifferenz werde aufgehoben (vgl. IV), so daſs lineares Licht entsteht. Den Winkel A, den die Pol.-Ebene nunmehr mit der Einfalls- oder Reflexionsebene bildet, nennt man das Hauptazimut des Spiegels.

Aus Φ und A berechnet sich für einen beliebigen E.-W. φ die bei der Reflexion entstehende relative Phasenverschiebung Δ und das Azimut a der wiederhergestellten linearen Polarisation, wenn man $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sin\Phi \operatorname{tg}\Phi} = \vartheta$ setzt, mit genügender Annäherung aus den beiden Formeln:

$$\operatorname{tg}\Delta = \sin 2A \operatorname{tg} 2\vartheta \qquad \cos 2a = \cos 2A \sin 2\vartheta.$$

Quincke, Pogg. Ann. 128, 551. 1866.

Optische Konstanten des Metalles. Die Theorie ergibt das Brechungsverhältnis n und das Absorptionsvermögen $\varkappa$ des Metalles aus den Formeln

$$\varkappa = \operatorname{tg} 2A \quad \text{und} \quad n\sqrt{1+\varkappa^2} = \sin\Phi \operatorname{tg}\Phi.$$

Das Reflexionsvermögen R bei senkrechtem Einfall ist hierdurch bestimmt (vgl. auch S. 312) als

$$R = \frac{n^2(1+\varkappa^2)+1-2n}{n^2(1+\varkappa^2)+1+2n}.$$

Da bei vielen Metallen $2n$ gegen $n^2(1+\varkappa^2)$ klein ist, so nähert R sich hier dem Werte Eins.

Gefunden wurde von Drude z. B. für Natriumlicht

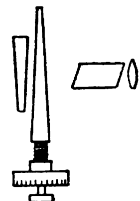
	Φ	A	$\varkappa$	n	R
Silber	75,°7	43,°6	20,4	0,18	0,95
Gold	72,3	41,6	7,6	0,37	0,85
Quecksilber	79,6	35,7	2,9	1,73	0,78

Vgl. Drude, Optik S. 336. 1900.

III. Babinet'scher Kompensator.

Der Babinet'sche Kompensator gibt die Möglichkeit, in den Weg eines Lichtstrahles eine Krystallplatte von beliebiger wirksamer Dicke einzuschalten. Dies benutzt man einerseits, um in der unter I beschriebenen Weise in einen Lichtstrahl Phasendifferenzen einzuführen, andererseits auch, um vorhandene Phasendifferenzen zu beseitigen oder abzuändern; mit anderen Worten, man kann z. B. linear pol. Licht in cirkulares oder elliptisches Licht verwandeln oder andererseits elliptisches in lineares oder in cirkulares.

Zu dem Zwecke liegen hintereinander zwei sehr schwach keilförmige Quarzplatten von gleichem Keilwinkel, die in ihrer Mitte gleich dick sind. Die Schneiden sind einander parallel, aber auf entgegengesetzter Seite gelegen. Beide Keile haben die optische Axe parallel der einen Begrenzungsebene, der eine aber parallel der Schneide, der andere senkrecht dazu. Der längere Keil ist in seiner Richtung mittels einer Mikrometerschraube verschiebbar, deren Drehung an einer Trommel abgelesen wird. Man visirt mit der Lupe durch einen Nicol („Analysator") nach der Mitte des feststehenden kleineren Keils, die durch einen Faden (oder eine Blende) markirt sei. Liegen an dieser Stelle gleich dicke Schichten der beiden Keile hintereinander, so tritt hier der durchgegangene Strahl ungeändert aus. Wenn man nun den beweglichen Keil verschiebt, so wird dadurch die gegenseitige Phase der beiden Schwingungskomponenten, welche mit den, durch die optischen Axen der Quarze bestimmten Hauptebenen des Apparates zusammenfallen, um einen dieser Verschiebung proportionalen Betrag geändert.



Der Analysator ist über einer Teilung drehbar; zunächst möge seine Polarisationsebene (gröſsere Diagonale des Rhombus) z. B. um 45° gegen die Hauptschnitte der Quarze geneigt sein.

Wert ε eines Trommelteils. Um den Trommelteil in Gangunterschied auszuwerten (selbstverständlich für Licht von einer bestimmten Wellenlänge), läſst man das betreffende Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsebene unter 45° gegen die Hauptschnitte geneigt ist, einfallen und beobachtet es nach seinem Durchgang mit dem Okular-Nicol. Wir wollen annehmen, daſs die beiden Nicol gekreuzt sind. Irgendwo wird im Gesichtsfeld ein dunkeler Streifen erscheinen, den man mit der Trommel auf den Faden einstellt. Die Trommelstellung sei jetzt $= p_0$. Dann dreht man die Trommel, bis der nächste dunkele Streifen auf dem Faden liegt. Die jetzige Trommelstellung (die ganzen Umdrehungen natürlich mitgezählt) sei $= p_1$. Dann entspricht

also der Trommelunterschied $p_1 - p_0$ gerade einer Wellenlänge, d. h. es bedeutet die Verschiebung um einen Trommelteil eine Änderung des Gangunterschieds um $\lambda/(p_1 - p_0)$, und es ist

$$\varepsilon = 1/(p_1 - p_0).$$

Wenn also die Trommel auf dem Teilstrich p steht, so bewirkt der Kompensator eine relative Verschiebung der beiden Wellenkomponenten um $\varepsilon(p - p_0)\lambda$.

ε ist bei der geringen Dispersion des Quarzes für verschiedene Farben ungefähr deren Wellenlänge λ umgekehrt proportional.

Bestimmung des absoluten Nullpunktes des Kompensators. An den dunkelen Stellen beträgt der Gangunterschied ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge; ob aber 0, λ, $2\lambda \cdots$, kann man dem bisher angewandten homogenen Licht nicht ansehen, für welches dies auch fast immer gleichgiltig ist.

Um aber denjenigen Streifen zu finden, in welchem der Gangunterschied 0 ist, d. h. wo die Quarze gleich dick sind, braucht man nur weifses Licht anzuwenden. Dann findet man nur einen wirklich dunkelen Streifen, der eben den Nullpunkt bezeichnet. Die übrigen sind wegen der verschiedenen Wellenlänge der Lichtsorten gefärbt.

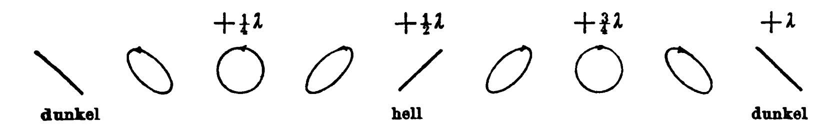
IV. Erzeugung beliebig elliptischen Lichtes aus linear polarisirtem mit dem Babinet'schen Kompensator.

Wir lassen, wie eben, in den Kompensator homogenes, lin. pol. Licht von 45° Schwingungsazimut gegen die Hauptebenen des Apparates einfallen, gewonnen z. B. aus gewöhnlichem Natriumlicht mittels eines vor den Apparat geeignet gestellten Nicols. In dieses Licht führen nun die Quarzkeile, je nach dem Orte, wo es sie durchsetzt, verschiedene Phasendifferenzen ein, infolge deren in dem austretenden Licht alle möglichen Schwingungsformen nebeneinander vertreten sind. Man erkennt diese mit dem analysirenden Okular-Nicol.

Die nachfolgende Figur deutet die Schwingungszustände des durchgegangenen Lichtes in dem Bezirk zwischen zwei dunkelen Streifen für den Fall an, dafs das eintretende Licht von links oben nach rechts unten schwingt (d. h., nach Fresnel, dafs die kurze Diagonale des polarisirenden Nicol so gerichtet ist) und dafs der analysirende Nicol gegen den Polarisator gekreuzt ist. In den dunkelen Streifen ist das Licht ungeändert (vgl. I, 2); mitten dazwischen ist durch Voraneilen um $\frac{1}{2}\lambda$ linear polarisirtes Licht von einer um 90° gedrehten Schwingungsrichtung entstanden und maximale Erhellung eingetreten (vgl. I, 3).

In je $\frac{1}{4}$ Abstand von den dunkelen Streifen haben wir Voraneilen um $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{3}{4}\lambda$, also cirkular polarisirtes Licht. — An den anderen Stellen schwingt das Licht elliptisch.

In der einen Hälfte findet die Schwingung links-, in der anderen rechtsherum statt.



(Wie man sieht, entspricht die Figur dem Falle, daſs von links nach rechts gerechnet die horizontale Schwingungskomponente gegen die vertikale verzögert ist.) Wird der Analysator gedreht, so ändern die Stellen cirkular polarisirten Lichtes ihre Helligkeit überhaupt nicht. An den Stellen linearer Polarisation dagegen wechselt nach je 90° Drehung gröſste Helligkeit mit Dunkelheit.

Axenverhältnis der Ellipsen. Die Ellipticität eines Lichtes ist durch das Verhältnis a/b der beiden Hauptaxen der Ellipse charakterisirt. Aus den Quarzkeilen austretendes Licht, welches sich im Fadenkreuz befindet, während die Trommel auf dem Teilstrich p steht, hat, vorausgesetzt daſs es linear mit dem Azimut 45° eingetreten war, das Axenverhältnis (vgl. I Nr. 5)

$$a/b = \operatorname{tg}[\varepsilon \cdot 180^0 (p - p_0)].$$

V. Untersuchung der Schwingungsform eines in den Kompensator eintretenden Lichtes.

Man behalte im Auge, daſs vollkommene Dunkelheit an einer Stelle im Kompensator anzeigt, erstens, daſs daselbst lin. pol. Licht austritt und daſs zweitens die Pol.-Ebene dieses Lichtes auf der des analysirenden Nicols senkrecht steht.

Wir setzen homogenes Licht von einer Farbe voraus, für welche nach vor. Seite ε bestimmt wurde.

Dieses Licht soll eine der behandelten elementaren Schwingungsformen haben, also nicht etwa natürliches Licht mit polarisirtem gemischt sein, sondern Licht von einer bestimmten Schwingungsellipse, wie es etwa aus geradlinig polarisirtem nach dessen Durchgang durch einen Krystall, z. B. Glimmer oder Gyps, oder durch Reflexion an einem Metallspiegel etc. entstanden ist. S. hierüber I u. II.

1) Lage und Axenverhältnis der Schwingungsellipse.

Man stelle den Kompensator mit der Trommel genau auf den Punkt $\frac{1}{4}\lambda$ (Fig. v. S.) ein, mit anderen Worten nach S. 300 die Trommel auf den Teilstrich $p_0 + 1/(4\varepsilon) = p_0 + \frac{1}{4}(p_1 - p_0)$. Nun richte man den Kompensator auf das zu untersuchende Licht. Der Kompensator sei um seine Sehaxe drehbar. Bei dieser Drehung wandert der dunkele Streifen im allgemeinen; man drehe, bis er auf den Beobachtungsfaden fällt; den analysirenden Nicol drehe man zugleich so, dafs der Streifen immer möglichst kräftig bleibt. Wird der Faden bei keiner Stellung des Kompensators von einem Streifen erreicht, so drehe man den Analysator um 90^0; dann wird es der Fall sein.

a) Lage der Axen. Die beiden Hauptschnitte des Kompensators fallen jetzt mit den beiden Axen der Schwingungsellipse zusammen.

b) Axenverhältnis der Ellipse. In der Lage, bei welcher der Streifen möglichst dunkel ist, bilde die Polarisationsebene des Analysators mit einem Hauptschnitt des Kompensators den Winkel γ, dann ist

$$\frac{\text{Axe parallel jenem Hauptschnitt}}{\text{Axe senkrecht zu jenem Hauptschnitt}} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Specielle Fälle. 1. Ändert sich nichts, wenn man den Kompensator (incl. Analysator!) dreht, so bedeutet dies eintretendes cirk.-pol. Licht. Wird in diesem Falle der Analysator allein gedreht, so wechselt ein auf dem Faden liegender dunkeler Streifen mit zwei beiderseitig in gleichem Abstande auftretenden ab. 2. Beobachtet man andrerseits bei der Drehung des ganzen Kompensators anstatt der Wanderung der Streifen ein abwechselndes Auftreten von Streifen links und rechts symmetrisch vom Faden, so zeigt dies linearpolarisirtes Licht an.

2) Gleichzeitige Bestimmung einer relativen Verschiebung und Schwächung, welche zwei zu einander senkrechte Komponenten eines Lichtstrahles — etwa durch Metallreflexion oder in einem dichroitischen Krystall — erleiden.

Wir wählen zur Untersuchung die beiden gleichen rechtw. Komponenten linear polarisirten Lichtes. Dieses schwinge ur-

sprünglich unter 45° gegen die Hauptebenen des Kompensators — kenntlich daran, daſs der Analysator im Azimut 45° einen ganz schwarzen Streifen gibt, der auf den Faden fällt, wenn die Trommel auf p_0 steht (S. 299).

Nachdem dann das Licht die Änderung erlitten hat, stellt man durch gleichzeitige Verdrehung der Trommel und des Analysators so ein, daſs der dunkele Streif wieder auf dem Faden und möglichst schwarz erscheint. 1. Die Trommel stehe jetzt auf p; dann ist die erlittene Phasenverschiebung $= \varepsilon(p - p_0)$. 2. Das Schwächungsverhältnis ist $= \operatorname{tg}\gamma$, wenn γ der jetzige Winkel des Analysators mit der Einfallsebene ist.

3) Bestimmung des Haupteinfallswinkels und Hauptazimuts eines Metallspiegels (vgl. II).

Man kann zum Beispiel so verfahren. Vor den Kollimator eines Spektrometers (**60**) werde ein Nicol vom Azimut 45° gegen die Instrumentalaxe gestellt; der Spiegel wird auf dem drehbaren Tischchen der Drehaxe parallel befestigt und der Kompensator mit seiner einen Hauptebene der Drehungsebene des Spektrometers parallel aufgestellt, so, daſs er gespiegeltes Licht sieht.

Man stellt die Trommel auf $\frac{1}{4}\lambda$, d. h. auf den Teilstrich $p_0 + \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon}$ (vgl. III) ein und dreht nun Spiegel und Kollimatorrohr, bis die dunkele Franse auf dem Faden liegt, sowie gleichzeitig den analysirenden Nicol, bis die Franse möglichst schwarz ist. Der jetzige Einfalls- (oder Reflexions-)Winkel am Spiegel ist der Haupteinfallswinkel und das jetzige Azimut der Polarisationsebene des Analysators gegen die Reflexionsebene gibt das Hauptazimut.

Über die Ausführung derartiger Messungen mit vollkommeneren Hilfsmitteln vgl. z. B. Quincke, Pogg. Ann. 127, 203. 1866; Drude, Wied. Ann. 34, 490. 1888.

Der Soleil-Babinet'sche Kompensator, aus zwei Quarzkeilen und einer Quarzplanplatte bestehend, gibt die Möglichkeit, Gangunterschiede in einem gröſseren Gesichtsfeld zu kompensiren. Vgl. Drude, Optik S. 238.

Über die Theorie d. Bab. Kompensators, s. z. B. Dorn, im Anhang zu Neumann, Vorlesungen über Optik; C. Schmidt, ZS. f. Instr. 1891, 439; und Wied. Ann. 45, 377. 1892, sowie die gröſseren Lehrbücher der Physik oder Optik.

72. Photometrie.

Über elektrische Lampen und räumliche Verteilung von Lichtstärken s. **121a.**

I. Einheiten.

1. Als Einheit der Stärke einer Lichtquelle (Lichtstärke) dient die Kerze, in Deutschland allgemein die Hefnerkerze (HK), dargestellt durch die auf 40 mm Höhe regulirte Flamme von primärem Isoamylacetat ($C_7H_{14}O_2$), an rundem, 8 mm dickem Docht, aus einem 0,15 mm starken Neusilberrohre gebrannt. — Kohlensäure sowie Wasserdampf in der Luft vermindern die Leuchtkraft. In der P.-T. Reichsanstalt wird Luft vom gewöhnlichen atmosphärischen Kohlensäuregehalt und mit 6,6 gr/cbm Wasserdampf als normal angenommen. Dem Wassergehalt x gr/cbm entspricht dann die Lichtstärke $1{,}049 - 0{,}0074x$ HK.

Als normal gilt das Leuchten der Hefnerlampe in horizontaler Richtung; streng würde also 1 HK durch eine Lichtquelle dargestellt werden, die nach allen Richtungen ebenso leuchtet, wie die Hefnerlampe nach der horizontalen. — Beglaubigte Hefnerlampen sind im Handel.

Ältere Einheiten werden z. B. durch die Carcellampe (etwa 10 HK) oder durch Kerzen von bestimmter Flammenhöhe oder bestimmtem Gewichtsverbrauch gegeben (1 Englische Normal-Wallratkerze, 45 mm hoch, = 1,14 HK; 1 Deutsche Normal-Paraffinkerze 50 mm hoch, = 1,20 HK). — Die als Lichtstärke von 1 qcm gerade geschmolzenen Platins fixirte Einheit (Violle) hat sich nicht verwirklichen lassen.

Als konstante Gebrauchsmafse empfehlen sich elektrische Glühlampen, mit konstanter Stromstärke (**85**) oder Spannung (**100, 101**) gebrannt und in derselben Ausstrahlrichtung wie bei dem Gebrauch, auf die Hefnerkerze zurückgeführt. Mit einer gegen die Norm der Lampen etwas verkleinerten Spannung — was aufser erhöhter Haltbarkeit den Vorteil einer der Hefnerkerze ähnlichen Farbe bietet — und nicht länger als nötig gebrannt, gewährt die Glühlampe eine lange dauernde Konstanz.

Während einiger Zeit konstant leuchtet auch eine mit Druckregulator oder mit dem Hahn auf konstanter Höhe erhaltene Gasflamme, oder eine etwa eine halbe Stunde zuvor angezündete Benzin- oder Petroleumlampe.

2. Lichtmenge Eins ist die von einer Lichtquelle Eins während 1 sec in die Einheit des räumlichen Winkels gesandte Lichtmenge. Eine Quelle von J Kerzen Stärke sendet also in den ganzen Raum in t sec die Menge $Q = 4\pi \cdot Jt$ aus.

3. Lichtstrom (Lichtstromstärke) i in einem Lichtbündel ist die in 1 sec durch den Querschnitt gehende Lichtmenge, also in einem durch eine Lichtquelle von J Kerzen im Abstande r beleuchteten senkrechten Querschnitt F $i = J \cdot F/r^2$. Die Einheit heifst ein „Lumen".

4. Beleuchtung (Erhellung) E nennt man die auf ein zum Lichtstrom senkrecht liegendes qm in 1 sec fallende Lichtmenge, also im obigen Falle $E = J/r^2$, oder auch $E = i/F$. r bez. F werden in m bez. qm gemessen. Einheit die „Meterkerze" (oder das „Lux").

5. Flächenhelle e einer ausgedehnten Lichtquelle ist die nach der Normalen gemessene Lichtstärke ihrer Flächeneinheit. Die Einheit ist Kerze/cm².

Diese Definitionen schliefsen sich an den von der Technik angenommenen Gebrauch an. Vgl. z. B. El.-techn. ZS. 18, 474. 1897.

Alle Photometer stellen auf gleiche Helligkeit ein. Sobald verschiedene Färbung vorhanden ist, wird die Schätzung gleicher Helligkeit vom subjektiven Ermessen abhängig.

II. Abstands-Photometrie.

Zur Messung dient der Satz: die Beleuchtung durch eine Lichtquelle nimmt mit wachsender Entfernung r quadratisch ab. Geben also zwei Lichtquellen I und II in den Abständen r_1 und r_2 gleiche Beleuchtung, so verhalten sich ihre Lichtstärken

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Die Erhellung einer Fläche ist aufserdem dem Sinus ihres Winkels gegen die Strahlen und einer Konstante proportional, welche man die Albedo der Fläche für die Lichtsorte nennt.

Zwei sehr ungleiche Lichtstärken direkt zu vergleichen, bietet, wenn man nicht über sehr grofse Entfernungen verfügt, stets Schwierigkeit. Man vergleicht dann beide mit einem konstanten Zwischenlicht, dessen Stärke am besten etwa das geometrische Mittel ist. Auch Rauchgläser sind anwendbar; vgl. Nr. 10.

Die Verfahren Nr. 1 bis 4 sind leicht zu improvisiren. Viel genauer arbeitet Nr. 5.

1. Schatten-Photometer (Lambert, Rumford). Vor einen weifsen Schirm kommt ein dunkeler, nicht zu schmaler Stab zu stehen. Die Lichtquellen werden so gestellt, dafs die beiden Schatten des Stabes dicht nebeneinander liegen und ihre Entfernungen so geregelt, dafs die beiden Schatten gleich dunkel erscheinen, wobei darauf zu achten ist, dafs beide Lichtbündel den Schirm in den Schattengebieten unter gleichem Winkel treffen. Die Abstände werden von jedem Lichte zu dem Schatten des anderen gemessen.

2. Beleuchtung zweier Flächen. Zwei gleiche Flächenstückchen werden unter gleichen Winkeln von den beiden Lichtquellen erhellt, deren Abstände r_1 und r_2 so ausgesucht werden, dafs die Flächenhelligkeit gleich erscheint (Foucault). Fremdes Licht ist hier auszuschliefsen. Z. B. neigt man die Flächen gegeneinander, beleuchtet von aufsen und beobachtet aus symmetrischer Stellung gegen die Trennungslinie (Ritchie, Fig. 1). Oder man trennt durch eine schwarze Scheidewand und beobachtet die Erhellung einer transparenten Fläche (Bouguer, Fig. 2).

1. L_1 r_1 r_2 L_2

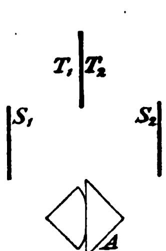
2. L_1 r_1 L_2 r_2

3. Diffusionsphotometer (Joly). Ein rechtwinkliger Paraffinklotz ist in seiner Mittelebene von einem Stanniolblatt durchsetzt; die Lichtquellen stehen in der Senkrechten zu dieser Trennungsfläche. Man beobachtet die Erhellung des Paraffins von der Seite; Fig.

4. Vergleichung zurückgeworfenen Lichtes mit durchfallendem (Bunsen). Auf einem kleinen Schirm aus durchscheinendem Papier ist mittels eines Fett- oder Stearinfleckes oder auch durch teilweises Bekleben mit einem zweiten dünnen Papier ein Ring von anderer Lichtdurchlässigkeit angebracht.

Einseitig von dem Schirm in ungeändertem Abstande befinde sich eine konstante Lichtquelle (kleine Gasflamme von konstanter Höhe; Benzin- oder Petroleumlampe, etwa eine halbe Stunde zuvor angezündet; elektrische Glühlampe mit konstanter Spannung). Die beiden zu vergleichenden Lichtquellen werden nun folgeweise auf der anderen Seite des Schirmes in solchen Abständen a_1 und a_2 aufgestellt, dafs die verschiedenen Schirmteile gleich hell erscheinen. Da die scheinbare Helligkeit von dem Winkel abhängt, unter welchem man das Papier ansieht, so ist eine konstante Visirrichtung innezuhalten.

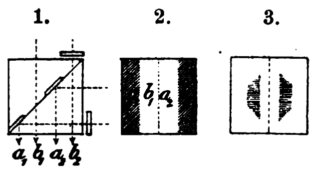
5. Photometerwürfel (Lummer und Brodhun). Auch hier wird durchfallendes mit zurückgeworfenem Licht verglichen, aber ohne die aus transparentem Material entspringenden Nachteile. Die Hypotenusenflächen zweier rechtwinkliger Prismen berühren sich mit ihren mittleren Teilen unter Druck vollständig, so dafs hier keine Reflexion, sondern vollständige Durchlässigkeit vorhanden ist. Aufsen ist das eine Prisma angeschliffen, so dafs die Fläche des anderen totale Reflexion gibt. Rechts und links von dem beiderseits gleichen weifsen Schirm T werden die zu vergleichenden Lichtquellen aufgestellt. S_1 und S_2 sind gleiche Spiegel (Fig., Grundrifs). In die Fläche A durch eine Lupe hineinsehend erblickt man die Schirmseite T_1 durch die Mitte hindurch, T_2 dagegen total reflektirt an den Rändern. Die Abstände r_1 und r_2 der Lichtquellen L_1 und L_2 werden dann so regulirt, dafs beide Teile gleich hell erscheinen.



Unsymmetrien können eliminirt werden entweder mittels des vorigen Verfahrens, beide Lichtquellen von derselben Seite her mit einem konstant anderseitig aufgestellten Hilfslicht zu vergleichen, oder man vertauscht die Lichtquellen bezüglich der Seiten T_1 und T_2, etwa durch Umlegen des ganzen Photometers um die Mittellinie der Figur.

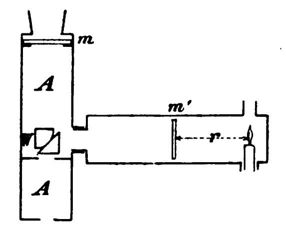
Kontrast-Photometer. Die Einstellung wird noch verschärft, wenn die zu gleicher Helligkeit verschmelzenden Felder sich gleichzeitig gegen eine anders erhellte Umgebung abheben. Man hat z. B. vier Felder, von denen je zwei auf gleiche, aber paarweise verschiedene Helligkeit eingestellt werden. Die Abschwächung des Lichtes geschieht durch Glasplatten (Fig. 1), welche geeigneten Teilen der Eintrittsflächen vorgesetzt werden und etwa 8% des Lichtes wegnehmen. Eine Gestalt des Photometerwürfels mit Kontrast ist z. B. die folgende.

Die Teile über a_1 und a_2 der hinteren Hypotenusenfläche (Fig. 1) sind mit dem Sandgebläse weggeätzt. An diesen Stellen findet in dem vorderen Prisma totale Reflexion des von rechts kommenden Lichtes statt, während durch die Teile über b_1 und b_2 das geradeaus kommende Licht durchgeht. Die beiden Glasplatten schwächen die Beleuchtung von a_1 und b_2 ab. Die Plattenränder liegen so, daſs man sie nicht sieht. Die Einstellungsfigur ist unter 2 dargestellt. Noch empfindlicher ist die gebräuchliche, ähnlich bewirkte Einstellungsfigur 3.



Lummer und Brodhun, ZS. f. Instr. 1889, 44 u. 461; 1892, 41.

6. **Milchglasphotometer** (L. Weber). Vor dem Milchglase m des (drehbaren) Rohres A befindet sich die zu messende Lichtquelle im Abstande R. Die von der, auf 20 mm Flammenhöhe gehaltenen, Benzinkerze erleuchtete Milchglasplatte m' wird mittels eines Triebes auf den auſsen am Rohre abzulesenden Abstand r gebracht, bei welchem der Photometerwürfel W gleiche Helligkeit beider Platten anzeigt. Dann ist $J = C \cdot R^2/r^2$ die gesuchte Lichtstärke. Der Abstand des Milchglases von W ist bei hinreichend kleinem Diaphragma ohne Einfluſs.



Die Instrumentalkonstante C wird mit einer

Hefnerlampe im Abstande R_1 vor m als $C = r_1^2/R_1^2$ bestimmt. — Für sehr helle Lichter dienen bei m mehrfache Milchgläser mit gleichfalls empirischer Konstante. — Als Fehlerquelle ist die etwaige Inkonstanz der Benzinlampe, besonders auch wegen Luftverschlechterung (S. 304, Nr. 1), und der nicht leicht genau zu definirende Abstand r zu beachten.

Das Photometer mifst besonders auch Flächenhelligkeiten (Himmel, Wände etc.), wobei eine mäfsige Schrägstellung sowie der Abstand von der, hinreichend grofsen, Fläche ohne Einflufs ist. Die Helligkeit ist $E = C'/r^2$ Meterkerzen; C' bestimmt man mittels der Einstellung im Dunkelzimmer auf einen, aus R m Abstand (R etwa $= \frac{1}{2}$) von einer Hefnerlampe senkrecht erleuchteten, weifsen Karton. Findet man hier die Einstellung r_1, so ist $C' = r_1^2/R^2$. Die Einheit der Flächenhelle ist hier von dem beleuchteten Karton entnommen, also von dessen Beschaffenheit abhängig. Die Definition 5, S. 305 und die jetzige sind auseinanderzuhalten.

Leonh. Weber, Wied. Ann. 20, 326. 1883; eingehende Darstellung der Beleuchtungsphotometrie: Handb. d. Hygiene IV. 1895.

7. **Photographie.** Zwei Beleuchtungen sind (photographisch) gleich, wenn sie in derselben Zeit dieselbe Färbung eines lichtempfindlichen Objekts bewirken. Als Normalskale dient eine Skale von Wirkungen, die von der Normalquelle aus verschiedenen gemessenen Abständen hervorgebracht sind. Eine so gemessene Lichtstärke gibt im allgemeinen kein Urteil über die Gröfse der Lichtwirkung auf das Auge. Aufserdem hängt sie natürlich von dem gewählten lichtempfindlichen Präparat ab.

Vgl. z. B. Hartmann, ZS. f. Instr. 1899, 97.

III. Mefsbare Abschwächung der einen Lichtquelle.

8. **Rotirender Sektor.** Durch eine rasch rotirende undurchsichtige Scheibe mit einer Sektoröffnung, deren Gröfse mefsbar verändert werden kann, wird eine Strahlung bis zur Gleichheit mit einer anderen abgeschwächt.

Über Verstellbarkeit und Ablesung des Sektors während des Laufes s. Lummer u. Brodhun, Z. S. f. Instr. 1896, 299.

9. **Verstellbares Diaphragma.** Mefsbar einzuschnürende Öffnungen (Spalt mit verstellbaren Rändern, vgl. Nr. 15; Irisblende, verstellbarer Sektor) sind photometrisch einerseits auf leuchtende Flächen anwendbar, andrerseits vor Instrumenten, die mittels Linsen das auffallende Lichtbündel vereinigen.

10. **Absorbirende Mittel; Rauchgläser.** Schätzungen relativer Lichtstärken lassen sich ausführen, indem man das hellere Licht durch vorgesetzte absorbirende Schichten auf die Stärke des anderen abschwächt. Die Durchlässigkeit der Rauchgläser etc.

wird nach einer der angegebenen Methoden bestimmt. Es gibt Rauchgläser, deren Durchlässigkeit von der Farbe des Lichts merklich unabhängig ist. Haben mehrere solche Gläser die einzelnen Durchlässigkeiten d_1, d_2, $d_3 \cdots$, so besitzen sie hintereinander gestellt die Durchlässigkeit $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdots$.

IV. Polarisations-Photometrie.

Passirt linear polarisirtes Licht noch einen Polarisator und bilden die Schwingungsrichtungen (oder was auf dasselbe hinauskommt, die Polarisationsrichtungen) beider den Winkel φ mit einander, so wird, von einem durch Reflexion verloren gehenden Bruchteil abgesehen, der Bruchteil $\cos^2\varphi$ durchgelassen. Denn wenn A die Amplitude des auffallenden, so ist $A' = A\cos\varphi$ die des durchgelassenen Lichtes. Die Intensität des Lichtes aber ist dem Quadrate der Amplitude proportional (Malus). Die Methoden setzen voraus, dafs das zu messende Licht nicht schon polarisirt ist.

11. Durch successive Vergleichung. Die erste Hälfte eines Gesichtsfeldes werde durch linear polarisirtes Hilfslicht beleuchtet, welches heller ist als eins der zu vergleichenden Lichter. Ein drehbarer Nicol läfst in einer bestimmten Stellung auf seinem Teilkreise dieses Gesichtsfeld dunkel erscheinen. Die zweite Hälfte wird mit einem der Lichter beleuchtet und erscheine mit der ersten gleich hell, wenn der Nicol aus der Dunkelstellung um φ_1 gedreht wird. Die andere Lichtquelle bedinge dann ebenso aus derselben Entfernung den Winkel φ_2. Dann verhalten sich die Helligkeiten

$$E_1 : E_2 = \sin^2\varphi_1 : \sin^2\varphi_2.$$

12. Durch direkte Vergleichung. Man polarisirt die beiden zu vergleichenden Lichter senkrecht zu einander, beleuchtet mit ihnen die beiden Hälften eines Gesichtsfeldes und beobachtet diese durch einen drehbaren Nicol. Sind φ_1 und $\varphi_2 = 90 - \varphi_1$ die Winkel, welche von der Schwingungsrichtung des Nicol mit denen der beiden Lichter eingeschlossen werden, wenn die Hälften gleich hell erscheinen, so ist

$$E_1 : E_2 = \cos^2\varphi_2 : \cos^2\varphi_1 = \mathrm{tg}^2\varphi_1.$$

Fehlerquellen werden durch Auswechseln der Lichter erkannt und eliminirt (Zöllner; s. auch Nr. 16).

13. Gleiche Mengen senkrecht zu einander polarisirten Lichtes mit einander gemischt verhalten sich wie gewöhnliches

Licht. Man kann also die Gleichheit beider Mengen durch ein Polariskop (z. B. Savart) an dem Ausbleiben der Interferenzerscheinungen erkennen. Dieses Mittel ist zu exakter Photometrie gut zu verwenden. (Arago; Wild, Pogg. Ann. 118, 193. 1863.)

V. Photometrie im Spektrum.

Die Aufgabe, zwei Lichtstärken zu vergleichen, ist streng nur gelöst, wenn die Stärken der einzelnen von ihnen ausgesandten Farben mit einander verglichen sind.

14. Vergleichsfeld. An die Stelle der Skale im Spektralapparat (**64**) kommt eine horizontal verschiebbare Öffnung, die konstant beleuchtet wird (Petroleumlampe) und deren von dem Prisma zurückgeworfenes weifses Bild sich auf den zu untersuchenden Teil des Spektrums projicirt. Durch eine geeignete Kombination von Rauchgläsern (vgl. Nr. 10) schwächt man das Licht der Lampe bis zu einem solchen Bruchteile ab, dafs jenes Bildchen gerade nicht mehr auf dem Spektrum sichtbar ist. Diesem Bruchteile wird die Lichtstärke in dem betreffenden Teil des Spektrums proportional gesetzt. Das Verfahren ist instrumentell einfach, aber unvollkommen.

15. Verstellbarer Spalt. Durch die beiden Hälften eines Spaltes, die einzeln zu gemessenen Breiten verstellbar sind, werden von zwei zu vergleichenden Lichtquellen zwei sich berührende Spektra entworfen. Sind an einer Stelle die Helligkeiten der Spektra gleich, so verhalten sich die Intensitäten für diese Farbe der Spektra nahe umgekehrt wie die Spaltbreiten. Grofse Helligkeitsunterschiede werden zuvor durch Rauchgläser abgeschwächt.

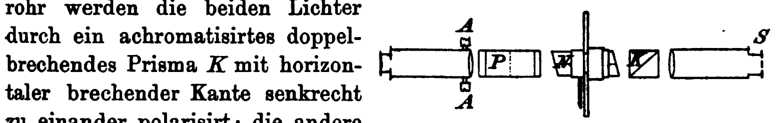
Über 14 u. 15 vgl. Vierordt, Pogg. Ann. 137, 200, 1869; 140, 172, 1870.

Ein Spektrophotometer zu genauer Messung mit dem Photometerwürfel und zwei Spaltrohren (Lummer und Brodhun) zeigt die Figur. Aufser den Spaltrohren S hat auch das Fernrohr F (an Stelle der Okularlinse, die nach der Justirung abgenommen werden mufs, um den Würfel deutlich zu sehen) einen mefsbar verstellbaren Spalt, um in das Auge gleichzeitig nur einen hinreichend homogenen Teil des spektral zerlegten Lichtes gelangen zu lassen. — Anstatt der Spaltverstellung in S_1 und S_2 wird besser der rotirende Sektor (Nr. 8) vor konstanter Spaltöffnung gebraucht.

Näheres bei Lummer und Brodhun, ZS. f. Instr. 1892, 132.

16. Spektro-Photometer mit Polarisatoren. Auch die unter IV genannten Methoden lassen sich durch Einschieben von Prismen zur Vergleichung der Stärken der einzelnen Farben von Lichtquellen benutzen.

Glan'sches Photometer; Fig. Seitenansicht. Der Spalt S ist in eine obere und eine untere Hälfte geteilt. In diese beiden Hälften treten die beiden zu vergleichenden Lichter ein, das eine etwa durch ein totalreflektirendes Prisma hineingeworfen. Auf dem Wege durch das Spaltrohr werden die beiden Lichter durch ein achromatisirtes doppelbrechendes Prisma K mit horizontaler brechender Kante senkrecht zu einander polarisirt; die andere Schwingungskomponente von jedem ist abgeblendet. Im Fernrohr erscheinen die von dem geradsichtigen, im Aufrifs gezeichneten Prisma P entworfenen Spektra beider Lichter übereinander; durch passendes Ausziehen des Spaltrohres bringt man sie an einer beliebigen Stelle zur Berührung. Durch verstellbare Schirme werden die Spektra bis auf den jeweiligen zur Untersuchung bestimmten Teil abgeblendet. — Das Fernrohr ist um die Axe A drehbar. Eine Skale erlaubt, gerade wie am Spektralapparat, die Farben durch Zahlen zu bezeichnen. — Vor dem Spaltrohr sitzt ein drehbarer Nicol N mit Teilkreis.



Man dreht den Nicol, bis die beiden Hälften gleich hell sind Findet man diese Gleichheit bei einem Drehungswinkel φ aus der Nullstellung des Nicol, so ist das Helligkeitsverhältnis der beiden Lichter $= k \cdot \mathrm{tg}^2 \varphi$; vgl. Nr. 12. k ist ein von 1 nicht sehr verschiedener Faktor, welcher aus ungleichen Schwächungen der beiden Lichter im Instrument entsteht.

Die Nullstellung des Nicol kann daraus gefunden werden, dafs bei ihr die, oben im Nenner zu denkende Hälfte des Gesichtsfeldes das Maximum der Dunkelheit haben mufs. Der Faktor k ergibt sich, wenn man beide Hälften, etwa durch eine Flamme hinter sehr homogenem Milchglas, gleich erleuchtet und auf gleiche Helligkeit einstellt, aus dem hierfür erforderten Drehungswinkel φ_0 des Nicol als $k = \mathrm{ctg}^2 \varphi_0$.

Glan, Wied. Ann. 1, 351. 1877. Über andere Spektralphotometer s. u. A. Wild, ib. 20, 452. 1883; A. König, ib. 53, 785. 1894.

VI. Bestimmung eines Absorptions-Koefficienten mit dem Spektro-Photometer.

Wird von einer Lichtmenge s auf einem Wege von der Länge δ die relativ kleine Menge σ absorbirt, so heifst $\sigma/(s\delta) = A$ der.

Absorptionskoefficient des durchstrahlten Körpers für das betreffende Licht. A hängt von der Farbe ab. Bei der Durchstrahlung einer Dicke d wird die Intensität i des eintretenden Lichtes dann geschwächt zu

$$i' = i \cdot e^{-A \cdot d}.$$

Ist i'/i gemessen, so findet man also

$$A = \frac{1}{d} \log\text{nat} \frac{i}{i'} = \frac{1}{d} \cdot 2{,}30 \cdot \log\text{brigg} \frac{i}{i'}.$$

i/i' wird nach dem Vorigen gemessen, indem die eine Spalthälfte frei gelassen, die andere mit dem absorbirenden Körper bedeckt wird.

Lichtverlust bei Reflexionen. Mit jedem Durchtritt durch die Trennungsfläche zweier verschieden brechender Mittel ist eine Schwächung verbunden, indem von dem (senkrecht) einfallenden Licht der Bruchteil $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ reflektirt wird (Fresnel), wo n das gegenseitige Brechungsverhältnis der Mittel ist, vgl. S. 297. Für gewöhnliches Glas gegen Luft ist

$$[(n-1)/(n+1)]^2 = (0{,}5/2{,}5)^2 = \tfrac{1}{25}.$$

Aus den bekannten n lassen sich die Schwächungen ausrechnen und die aus ihnen entspringenden Korrektionen anbringen. Man kann diese auch vermeiden, indem man sie auf beiden Wegen praktisch merklich gleich macht. Zu dem Zweck bedeckt man die beiden Spalthälften mit verschieden dicken, gleich begrenzten Schichten des Körpers und setzt die Differenz der beiden Dicken für d in Rechnung. Bei absorbirenden Gläsern kann man auch die eine Spalthälfte mit einem dünnen farblosen Glase, bei Lösungen eines farbigen Salzes in einem Glastroge kann man sie mit einem kongruenten Troge bedecken, der nur Lösungsmittel enthält, und dann von der Schwächung absehen.

Über die Photometrirung elektrischer Lampen und über die räumliche Verteilung von Lichtstärken s. 121.

72a. Messung einer Wärmestrahlung.

Die Energie einer Strahlung wird gemessen, indem man sie durch Absorption an einer mit Lampenrufs oder mit Platinschwarz überzogenen Oberfläche in Körperwärme überführt. Auch eine dem Auge schwarz erscheinende Fläche absorbirt selten vollständig, oft nur zur Hälfte. Lampenrufs bez. Platinschwarz, nach dem Recept von Lummer-Kurlbaum hergestellt (8, 18) absorbiren die Strahlung eines schwarzen Körpers von 100°, deren Intensitätsmaximum bei $\lambda = 8\mu$ liegt, bis zu 95 bez. 97%. Diese Grenze wird bei einer Schichtdicke von 30 bez. 200 mg/qdm erreicht. Kurlbaum, Wied. Ann. 67, 846. 1899.

Strahlungsquellen.

Substanzen, die auf Ausstrahlung zu untersuchen sind, werden als dünne Flächen oder als Überzüge von solchen, durch Heizung von der anderen Seite oder auch durch Heizung mittels eines hindurchgeführten elektrischen Stromes, auf die Untersuchungstemperatur erwärmt. Bis 100° dient z. B. der bekannte, mit warmem Wasser gefüllte Leslie'sche Würfel.

Man vergleicht mit einer als Norm angenommenen Fläche; vgl. unten den „absolut schwarzen Körper".

Schwarze Strahlung (Kirchhoff). So heifst die Strahlung, welche von einer Fläche ausgeht, die alle auffallenden Strahlen absorbirt. Die Energie S der schwarzen Strahlung bei der absoluten Temperatur T ist $S = \text{const.}\ T^4$; Stefan-Boltzmann'sches Gesetz. Bezogen auf qcm, sec und Wasser-gr-Kalorie ist $\text{const.} = 1{,}28 \cdot 10^{-12}$.

Kirchhoff'scher Satz. Das Emissionsvermögen e eines Körpers für Wärme einer bestimmten Art (Wellenlänge) ist seinem Absorptionsvermögen a für dieselbe Art bei gleicher Temperatur proportional; $e/a = e_0$. Die Konstante e_0 ist das Emissionsvermögen der schwarzen Fläche, denn deren Abs.-V. ist $= 1$, also $e : a = e_0 : 1$.

Theoretisch schwarzer Körper.

Hilfssatz (Kirchhoff 1860). Eine an derselben beliebigen Oberfläche wiederholt reflektirte und jedesmal durch die Strahlung der Fläche selbst verstärkte Strahlung nimmt schliefslich die Beschaffenheit der für die betreffende Temperatur geltenden schwarzen Strahlung an.

Beweis. e sei das Em.-V., a das Abs.-V., und es werde $1 - a = \alpha$ bezeichnet. Gegeben sei ein Strahl S. Bei der ersten Reflexion wird aS absorbirt, also $(1-a)S = \alpha S$ zurückgeworfen; hinzu tritt e, also haben wir nachher $e + \alpha S$. Nach der zweiten Reflexion kommt

$$e + \alpha(e + \alpha S) = e(1+\alpha) + \alpha^2 S;$$

nach der dritten $e + \alpha(e(1+\alpha) + \alpha^2 S) = e(1+\alpha+\alpha^2) + \alpha^3 S$ u. s. f., nach der $n$ten Reflexion also

$$e(1 + \alpha + \alpha^2 \ldots + \alpha^{n-1}) + \alpha^n S.$$

α ist jedenfalls < 1, also schliefslich $\alpha^n S = 0$ und, da $1 + \alpha + \alpha^2 \ldots = 1/(1-\alpha) = 1/a$ ist, so wird das ganze $= e/a = e_0$; q. e. d.

Ein vollkommen schwarzer Strahlungskörper wird hiernach durch einen Hohlraum mit so enger Öffnung dargestellt, dafs die Strahlen im Inneren vor ihrem Austritt hinreichend oft reflektirt worden sind. Ist z. B. das Abs.-V. a der inneren Fläche $= 0{,}9$, also $\alpha = 0{,}1$ und $e = 0{,}9\,e_0$, so hat ein von einem Punkte der Fläche ausgegangener Strahl e

nach der	0ten	1ten	2ten Reflexion
die Intensität	$0{,}9\,e_0$	$0{,}99\,e_0$	$0{,}999\,e_0$ etc.

Zweimalige Reflexion gibt also schon Annäherung auf 1/1000, so dafs die Öffnung im allgemeinen relativ gar nicht so sehr eng genommen zu werden braucht.

S. hierüber besonders W. Wien u. Lummer, Wied. Ann. 56, 451. 1895.

Man bildet den Hohlraum aus Metall, innen mit Platinschwarz oder für höhere Temperaturen mit Eisenoxyduloxyd bekleidet. Zur Erwärmung dienen Bäder (**8**, **27**). Sehr hohe Temperaturen erzielt man mit einem hinten ganz, vorn bis auf die Ausstrahlungsöffnung geschlossenen Cylinder aus dünnem Platinblech, welches von einem elektrischen Strom durchflossen wird. Die Temperatur wird elektrisch gemessen (**43**).

Vgl. Lummer u. Kurlbaum, Verh. d. Physik. Ges. 1898, S. 106.

I. Messungsmittel.

a) Thermosäule. Nobili, Melloni. Die auf der einen Seite liegenden Lötstellen werden geschwärzt. Man mifst den ersten Ausschlag einer vorher ruhenden Galvanometernadel von mäfsiger Dämpfung und setzt ihm die Strahlungsenergie proportional.

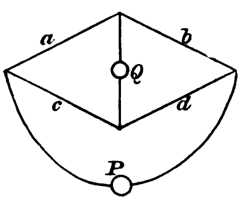
Säulen aus sehr feinen (0,1 mm dicken) Konstantan-Eisenelementen bieten den grofsen Massen der älteren Thermosäulen gegenüber Vorteile. Die bestrahlten Lötstellen tragen sehr feine kleine geschwärzte Silberteilchen.

Vgl. Rubens, ZS. f. Instr. 1898, 65.

Ohne Galvanometer kann man mit einem leichten Thermobügel in einem starken magnetischen Felde arbeiten, der selbst durch die Bestrahlung abgelenkt wird (Radiomikrometer von Boys).

b) Bolometer (Langley). Man benutzt die Widerstandsänderung eines dünnen Platin-, Eisen- oder Nickel-Drahtes oder Blechstreifens durch die bei der Einstrahlung entstehende Erwärmung. Platinbleche, mit einer zehnfach dickeren Silberschicht zusammengeschweifst, lassen sich auf $^1/_{2000}$ mm Dicke auswalzen; nach dem Aufspannen auf einen Rahmen wird das Silber abgeätzt.

Der zu bestrahlende Draht bildet den Zweig z. B. a einer von einem konstanten Strom durchflossenen Wheatstone'schen Brücke (**93**). Der Strom des konstanten Elements P ist einige Zeit vorher geschlossen und das empfindliche Galvanometer Q (**83**) durch Abgleichen der Widerstände auf Null gebracht. Die Bestrahlung des einen Zweiges bewirkt einen der Strahlungsenergie nahe proportionalen ersten Ausschlag.



Um von Temperaturschwankungen unabhängig zu sein, werden die Materialien benachbarter Zweige, etwa *a* und *c*, *b* und *d* gleich gewählt.

Doppelte Empfindlichkeit erreicht man durch gleichzeitige Bestrahlung gegenüberliegender Brückenzweige.

Die Erwärmung des stromdurchflossenen Drahtes macht dessen Widerstand sehr empfindlich gegen Luftströmungen, die deswegen sorgfältig auszuschliefsen sind.

Über die Ausführung vgl. z. B. Lummer u. Kurlbaum, Wied. Ann. 46, 204. 1892.

c) Radiometer (Crookes). Die Drehgeschwindigkeit einer bestrahlten Lichtmühle dient wohl zur Schätzung der Strahlungsmenge. Ein empfindliches Mefsinstrument bilden zwei symmetrisch seitlich an einem Quarzfaden befestigte geschwärzte Flügelchen, deren einer bestrahlt wird. Der mit Spiegel und Skale gemessene Ausschlag ist der Strahlungsmenge proportional.

Die Empfindlichkeit hängt vom Gasdruck (günstig etwa $^1/_{20}$ mm Quecksilberdruck; **36**, VI) ab. Die Veränderlichkeit des Drucks ändert also die Empfindlichkeit. Dafs die Strahlung ein Fenster passirt, ist natürlich nicht zu umgehen.

Vgl. Nichols, ZS. f. Instr. 1897, 123.

II. Wärmespektrum.

Spektrale Zerlegung geschieht wegen der Absorption (Tab. 25) der übrigen Substanzen mit Steinsalz- oder Sylvin-, bis $\lambda = 8\mu$ auch wohl mit Flufsspat-Prismen, oder auch mit Beugungsgittern aus Draht. Grofse, einigermafsen homogene Wellenlängen liefert auch die wiederholte (4—6malige) Reflexion einer Strahlung an Körpern, die auswählend reflektiren, insbesondere an Flufsspat oder Steinsalz.

Flufsspat bez. Steinsalz liefern so $\lambda = 24\mu$ bez. 51μ; Rubens u. Nichols, Wied. Ann. 60, 418. 1897.

Das deutliche Spektrum wird, wie in der Optik, mittels eines Spalts und einer Linse aus Steinsalz etc., oder statt der letzteren, deren Brennweite sich mit der Wellenlänge stark ändert, besser mittels eines versilberten Hohlspiegels entworfen, welcher alle Wellen fast vollständig reflektirt.

Die Verteilung der Strahlungsenergie im Beugungsspektrum („Normalspektrum"; **65**, I) des schwarzen Körpers folgt den Gesetzen:

a) Der Punkt maximaler Energie rückt mit wachsender absoluter Temperatur T zu kleineren Wellenlängen λ_{max} nach der Beziehung, wenn die Wellenlänge in cm gemessen wird, (Wien'sches Verschiebungsgesetz):

$$\lambda_{max} \cdot T = 0{,}294.$$

Lummer u. Pringsheim, Verh. d. Deut. Phys. Ges. 1900, 163.

b) Schreibt man die in Gestalt von Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ ausgestrahlte Energie (vgl. S. 313) $dS = E\,d\lambda$, so gilt allgemein:

$$E = \frac{C \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1},$$

wo e die Basis der nat. Logarithmen und, wenn λ in cm gemessen wird, $c = 1{,}46$ ist. C wird für 1 qcm Öffnung $= 0{,}896 \cdot 10^{-12}$ gr-Kal$\cdot$cm^2/sec. Die Intensität am höchsten Punkt der Kurve ist $E_{max} = 2{,}87 \cdot 10^{-12} \cdot T^5$.

Experimentell von Lummer u. Pringsheim, l. c.; Rubens u. Kurlbaum, Berl. Sitz. Ber. 1900, 929; Ann. d. Physik 4, 649. 1901; theoretisch von Planck, Ann. d. Physik 4, 553. 1901.

So lange λT kleiner ist, als z. B. 0,3 cm$\cdot$Grad, was im sichtbaren Teil des Spektrums ($\lambda < 0{,}00008$ cm) bis zu den höchsten Temperaturen gilt, hat $c/(\lambda T)$ einen so grofsen Wert, dafs die von W. Wien früher gegebene Formel $E = C \cdot \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}$ merklich giltig bleibt.

Hierauf läfst sich eine photometrische Bestimmung hoher Temperaturen gründen, wobei die für ein konstantes λ sich ergebende Beziehung $\lg E = a - b/T$ („logarithmische gerade Linie" für Abscisse $1/T$; a und b sind Konstanten) bequem ist. Vgl. Paschen u. Wanner, Berl. Sitz.-Ber. 1899, 5; Lummer u. Pringsheim, Verh. d. Deut. Phys. Ges. 1901, 36.

III. Absolute Messung einer Strahlungsenergie.

Starke Strahlungen, z. B. die der Sonne lassen sich direkt kalorimetrisch messen; Pyrheliometer von Pouillet.

Die Angabe eines Bolometers kann auf absolutes Mafs zurückgeführt werden, indem man den bestrahlten Zweig, wie in Fig. (85, 4) als Viereck gestaltet, so dafs er durch einen von dem Brückenstrom unabhängigen schwachen Strom gewärmt werden kann, der auf das Galvanometer nicht direkt wirkt. Ruft dieser Heizstrom von i_0 Am. vermöge der Widerstandsänderung, die er durch Erwärmung des bestrahlten Zweiges bewirkt, den Galvanometerausschlag e_0 hervor, so bedeutet ein bolometrischer Ausschlag e (mit demselben Brückenstrom), dafs der Bolometerzweig (Widerstand $= w$ Ohm) von der Strahlungsenergie $e \cdot 0{,}239\, i_0^2 w/e_0$ gr-Kal/sec getroffen wird. Vgl. Anh. 30.

Näheres bei Kurlbaum, Wied. Ann. 65, 746. 1898.

Magnetismus.

72b. Allgemeines.

I. Magnetstäbe.

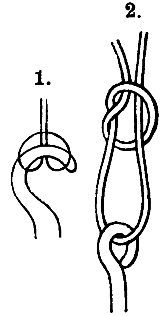
Material. Am besten ist Wolframstahl. Die geeignetste Härtungstemperatur ist etwa 800° (Kirschrotglut). Überhitzen verringert die Magnetisirbarkeit, ohne die Haltbarkeit zu erhöhen. Überhitzte Stäbe lassen sich durch Neuhärten nach vorhergegangenem Ausglühen verbessern. Vgl. 8, 14 u. Holborn, ZS. f. Instr. 1891, 113.

Gestalt. Die Magnetisirbarkeit wächst mit dem Verhältnis der Länge zu der Querdimension. Röhrengestalt kann sehr vorteilhaft sein. — Das magnetische Moment, welches man Stäben aus gleich beschaffenem Material von ähnlicher Gestalt erteilen kann, ist ihrer Masse proportional.

Specifischen Magnetismus oder Magnetisirung eines Stabes nennt man das durchschnittliche magn. Moment seiner Volumeinheit oder auch wohl seiner Masseneinheit. 1 cm^3 wiegt etwa 7,5 gr. Bei sehr gestreckter Gestalt kann man auf 1 gr etwa 100 [C.G.S]-Einheiten (Anh. 20), bei dem Verhältnis Länge: Dicke $=10:1$ etwa 35 permanent erreichen.

Haltbarkeit. Ein frisch magnetisirter Stab verliert einen Teil seines Magnetismus zuerst rasch, später langsamer, durch äufsere Einflüsse und auch dadurch, dafs der gehärtete Stahl schon bei gewöhnlicher Temperatur ein Anlassen erfährt. Der stationäre Zustand wird rascher erreicht, wenn man den gehärteten Stab gleich und sodann nach dem Magnetisiren jedesmal mehrere Stunden lang im siedenden Wasserdampf behandelt (Strouhal und Barus, Wied. Ann. 20, 662. 1883).

Polabstand. Für Fernwirkungen eines gewöhnlichen Magnets kann man die beiden Magnetismen in zwei Punkten, den Polen (Fernpolen) koncentrirt annehmen. Der Polabstand („reducirte" oder „virtuelle" Länge) beträgt durchschnittlich etwa $^5/_6$ der Stablänge. F. K. u. Hallock, Wied. Ann. 22, 411. 1884. Vgl. Anh. 20 u. **76b**.



Aufhängung. Gröfsere Magnete werden, wenn man über eine beträchtliche Höhe, etwa von der Zimmerdecke herab, verfügt, z. B. an hartem Messingdraht aufgehängt, der bei grofser Tragkraft einen mäfsigen Elasticitätsmodul (Tab. 19) besitzt. Die Bandform (etwa käufliches Konstantanband) gibt bei gleicher Tragkraft ein kleineres Torsionsmoment als der kreiscylindrische Draht. Sonst nimmt man Coconfäden (8, 20; 77 Schlufs) oder Bündel von solchen. Die letzteren stellt man durch Aufwickeln eines langen Fadens über 2 Glasstäbe her, die im geeigneten Abstande an der Tischkante befestigt sind. Die beiden Enden knüpft

man zusammen, spannt möglichst gleichmäſsig und schlingt die äuſsersten Enden des Bündels um den oberen bez. den unteren Aufhängestift (Fig. 1), vor dem festen Anziehen die Spannung nochmals möglichst ausgleichend.

Einzelne Fäden schlingt man, wie Fig. 2, v. S. gezeichnet, wobei der Knoten schlieſslich festgezogen wird, aber so, daſs der Aufhängefaden sich noch fest schlingen läſst. Das Aufhängen in losen Schlingen ist zu vermeiden. Freie Fadenenden werden kurz abgeschnitten, um nicht Reibung zu bewirken.

Für leichte Magnete können Quarzfäden dienen (8, 21), die mit Schellack angeklebt werden.

II. Verschiedene Umstände.

Astasirung einer Magnetnadel. Vorzüglich für sehr empfindliche Galvanometer wird oft eine Verminderung der erdmagnetischen Direktionskraft verlangt. Man gebraucht zu diesem Zwecke Nadelpaare mit entgegengerichteten Polen; oder man umgibt das Instrument mit einem „Schutzring“ von weichem Eisen, der durch seinen eigenen Magnetismus die Wirkung des Erdmagnetismus abschwächt. Dauernden Änderungen sind aus weichem Eisendraht gewickelte Körper weniger unterworfen als massive. — Oder man hängt die Nadel bifilar in verkehrter Lage auf; oder endlich, es wird ein Hilfsmagnet in geeigneter Lage (nicht zu nahe) fest angebracht, der dem Erdmagnetismus entgegenwirkt. In beiden letztgenannten Fällen werden freilich auch die Deklinationsschwankungen vergröſsert. Die letzteren Mittel kann man auch verwenden, um umgekehrt die Direktionskraft zu verstärken oder der Nadel ein anderes Azimut zu geben als das nordsüdliche.

Erdmagnetische Variationen. Die Unruhe des Erdmagnetismus kann zu Zeiten die Beobachtungen wesentlich stören. Gewöhnlich ist die Unruhe von Mittag an am geringsten, doch kommen magnetische Störungen zu allen Tageszeiten vor.

Bestimmung des Astasirungsfaktors. Hierunter sei das Verhältnis D/D' der Direktionskraft vor und nach der Astasirung verstanden. Wenn diese durch einen äuſseren Magnet oder bifilar vorgenommen ist, kann sie wie folgt bestimmt werden. Ein bestimmter Magnet bewirke an der astasirten Nadel mit dem Skalenabstand A' aus der Entfernung r' den Ausschlag e', an einer nicht astasirten in derselben relativen Lage (z. B. immer erste Hauptlage; vgl. 73) mit A und r den Ausschlag e, so ist $\frac{D}{D'} = \frac{e'}{e}\frac{A}{A'}\left(\frac{r'}{r}\right)^3$.

Äuſsere Störungen. Magnetische Störungen aus der Umgebung durch bewegte Magnete oder veränderliche Ströme, oder durch elektrische Straſsenbahnen können die Anwendung des gewöhnlichen Magnetspiegels unmöglich machen. Eine Besserung der Verhältnisse ist an Galvanometern unter Umständen möglich durch den Schutzring oder eine vollständige Einhüllung des Instruments, einschlieſslich des Multiplikators, mit weichem

Eisen. Durch dicke oder geeignet angeordnete mehrfache Eisenhüllen (vgl. insbesondere Du Bois u. Wills, Wied. Ann. 63, 348; 65, 1; Ann. d. Ph. 2, 78. 1897—1900) lassen äufsere Einwirkungen sich fast ganz abhalten. An Stelle der alsdann auch wegfallenden erdmagnetischen Direktionskraft tritt die Elasticität des Aufhängefadens, wobei Material von kleiner elastischer Nachwirkung (Stahl, Quarz) anzuwenden ist. Oder man bringt im Innern der Eisenhülle einen Richtmagnet an. Auf dauernde Konstanz des magnetischen Feldes in dicken Eisenmassen wird nicht zu rechnen sein.

Mechanischen Erschütterungen unterliegen niedrige Systeme, z. B. direkt aufgehangene magnetische Spiegel, besonders stark. Häufig läfst die Störung sich dadurch vermindern, dafs die magnetische Axe nicht genau horizontal liegt; dann dämpft der Kupferdämpfer auch vertikale Drehungen.

Erdmagnetische Instrumente. Für Reise- und ähnliche Zwecke sind kompendiöse Instrumente, teilweise zugleich für Deklination und Intensität bestimmt, hergestellt worden von Fox, Lamont, Meyerstein, Neumayer, Weber, Wild u. a. (vgl. **78**).

Untersuchung von Materialien auf ihren unmagnetischen Zustand. Am einfachsten bringt man dieselben dicht an den Pol eines aufgehangenen kräftigen Magnets mit Spiegel, z. B. an den Magnet eines Bifilarmagnetometers mit dünnem Deckglase (**74**, I). Ganz unmagnetisch sind wenige Körper; ziehen sie nicht an, so stofsen sie ab (sind diamagnetisch). Hierher gehören die meisten organischen Körper, Wasser, reines Kupfer. Bei Metallen übersehe man nicht, dafs die Annäherung eines Leiters an sich Abstofsung bewirkt und umgekehrt. Man halte oder lege die Stücke also ruhig neben den Magnetpol. Der Magnetismus von Kupfer und dgl. stammt nicht selten von Eisenteilchen an der Oberfläche, auch von eisenhaltigem Lack. Abkochen mit verdünnter Schwefelsäure hilft dann. Nachher mit heifsem Wasser reinigen!

Über starke Felder s. **114**.

73. Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus (Gaufs 1836).

Intensität der magnetischen Kraft oder magnetische Feldstärke an einem Orte heifst die Kraft, welche daselbst auf einen Magnetpol Eins ausgeübt wird. Der Pol Eins ist dadurch definirt, dafs er auf einen ihm gleichen Pol aus dem Abstande Eins die Kraft Eins, im C.G.S-System also 1 Dyne ausübt (vgl. Anh. Nr. 7 u. 19—21).

Auf die gewöhnliche Magnetnadel wirkt die Horizontalkomponente H der Intensität. Die Messung von H besteht aus einer Schwingungsdauer- und einer Ablenkungsbeobachtung. Erstere gibt, wenn das Trägheitsmoment des schwingenden Magnets bekannt ist, das Produkt $P = MH$ aus dessen magnetischem Moment M und der Intensität H. Der Quotient $Q = M/H$ wird gefunden, indem man die Ablenkung einer anderen Magnetnadel durch denselben Magnet beobachtet. Aus P und Q

können M und H einzeln berechnet werden. Die Methode kann also auch zur Bestimmung des magn. Moments eines Stabes dienen.

Bei dem Gaufs'schen Verfahren werden für M/H zwei Ablenkungen aus verschiedenen Entfernungen beobachtet; einfacher genügt die Ablenkung aus einer Entfernung, wenn man den „Polabstand" der Magnete einführt. Den Magnetismus gestreckter Stäbe kann man bei Fernwirkungen in zwei Punkten koncentrirt annehmen, die um etwa $^1/_{12}$ der Länge von den Enden entfernt sind. Der Polabstand eines Magnets beträgt also $^5/_6$ der ganzen Länge.

H liegt im mittleren Europa um den Wert 0,2 [C.G.S] herum (Tab. 38). Bei der Bestimmung mit gewöhnlichen Mitteln wird eine Genauigkeit bis auf $\pm$ 0,001 befriedigend zu nennen sein. Wo keine äufseren Störungen durch benachbarte Eisenmassen vorhanden sind, wird der aus Tab. 38 entnommene Wert meist eine ähnliche Genauigkeit haben, in Gebäuden mit Eisenkonstruktionen dagegen sind die Lokaleinflüsse oft beträchtlich. — Während der Messung von H hat man darauf zu sehen, dafs nicht zufällig (in der Tasche oder Schieblade, oder als Fensterstange, Nagel im Tischbrett, als drahtgeheftetes Notizbuch, auch etwa als Stahlbrille) unbeabsichtigte Einflüsse vorhanden sind.

Zuweilen wird noch die [Mm. mg. sec]-Einheit gebraucht, sie ist 10 mal kleiner als die [C.G.S]-Einheit. — Für die letztere gilt jetzt die Bezeichnung 1 Gaufs.

I. Bestimmung von MH durch Schwingungen.

Man hängt den Magnet am Faden auf. Es sei t die auf unendlich kleine Bogen reducirte Schwingungsdauer (28), K das Trägheitsmoment des Magnets in gr. cm² (29), Θ das Torsionsverhältnis des Fadens (77), dann ist das gesuchte Produkt P

$$P \text{ oder } MH = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\Theta)}. \qquad 1)$$

Denn die Direktionskraft ist $MH(1+\Theta)$, und das Quadrat einer Schwingungsdauer geteilt durch π^2 gibt das Verhältnis des Trägheitsmoments zur Direktionskraft (Anh. Nr. 10).

Über die Bestimmung von MH mit dem Bifilar oder der Wage vgl. IV u. V.

II. Bestimmung von M/H durch Ablenkungen.

Denselben Magnet läfst man aus gemessener Entfernung r, und zwar um Unsymmetrien zu eliminiren von zwei Seiten, eine Magnetnadel ablenken. Man wählt eine der beiden folgenden „Hauptlagen".

Erste Hauptlage. c ist der Mittelpunkt der Bussole, NS der magnetische Meridian. Der Magnet wird folgeweise in den gezeichneten Lagen östlich oder westlich von der Nadel in der Höhe der letzteren hingelegt. Die Abstände der Magnetmitte in a oder b vom Centrum der Bussole sind gleich, also $r = \frac{1}{2}ab$. Der Abstand soll mindestens die dreifache Länge des Magnetstabes selbst betragen.

N

a c b

S

Der Stab befinde sich z. B. in a. Man beobachtet den Ausschlag, wobei man beide Spitzen der Nadel abliest und das Mittel nimmt. Dann dreht man den Stab um 180°, wobei sein Mittelpunkt wieder in a zu liegen kommt und beobachtet den Ausschlag ebenso. Aus beiden Werten wird abermals das Mittel genommen. Dieses ist der zur Stellung a gehörige Ablenkungswinkel. Geht die Bezifferung der Grade nicht von der Nullstellung nach beiden Seiten, sondern durch diese Stellung hindurch, so rechnet man natürlich einfacher, wenn man die beiden Einstellungen von einander abzieht und die Hälfte dieses doppelten Winkels nimmt. Siehe das Beispiel.

Genau ebenso wird für die Stellung b verfahren und dann aus den nahe gleichen, in beiden Stellungen beobachteten Ablenkungswinkeln das Mittel genommen. Dieser aus acht Ablesungen entstandene Wert heiſse φ.

Zur Berechnung von M/H führen wir die Polabstände $\mathfrak{L}$ des Stabes bez. $\mathfrak{l}$ der Nadel ein (**76b**) und berechnen eine Korrektionskonstante η (vgl. Anh. 20)

$$\eta = \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \tfrac{3}{4}\mathfrak{l}^2.$$

Dann wird der gesuchte Quotient

$$Q \text{ oder } \frac{M}{H} = \frac{1}{2}\frac{r^3 \operatorname{tg}\varphi}{1 + \eta/r^2}. \qquad 2)$$

Bei der Bestimmung mit gewöhnlichen Mitteln wird die Annahme des Polabstandes gleich $^5/_6$ der Stab- oder Nadellänge immer genau genug sein.

Zweite Hauptlage. Der Ablenkungsstab wird nördlich und südlich von der Bussole c in gleichen Entfernungen

hingelegt. Im Einzelnen wird das vorhin beschriebene Verfahren befolgt, sowohl bei den Beobachtungen wie bei der Berechnung des Mittels. Es sei wieder $r = \frac{1}{2}ab$ und φ der mittlere Ablenkungswinkel.

a —

c

b —

Für die zweite Hauptlage gilt $\eta = -\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2$. $\frac{M}{H}$ wird nach der vorigen Formel ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ berechnet

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3 \operatorname{tg}\varphi}{1+\eta/r^2}. \qquad 3)$$

Aus $P = MH$ und $Q = M/H$ wird gefunden

$$H = \sqrt{\frac{P}{Q}}.$$

Um Variationen des Erd- und des Stabmagnetismus, letztere besonders durch Temperaturänderung, möglichst auszuschliefsen, werden die Messungen von MH und M/H rasch hintereinander ausgeführt. Über Korrektionen vgl. **74** und **76a**.

Das Beobachtungsverfahren bezweckt folgendes. Die Ablesung beider Spitzen der Nadel eliminirt eine excentrische Lage ihrer Drehaxe gegen die Teilung der Bussole; die Umkehrung des Stabes eliminirt eine Unsymmetrie seiner Magnetisirung; für die Nadel geschieht dasselbe durch das Ablenken von beiden Seiten, wobei auch eine nicht genaue Mittellage ihres Drehpunkts herausfällt. Hierbei wird zugleich die Genauigkeit des Resultates ähnlich vergröfsert, wie durch die achtmalige Wiederholung einer einzelnen Ablesung.

Beispiel. I. Bestimmung von $M \cdot H$.

Trägheitsmoment. Der rechteckige Magnetstab war 10,00 cm lang und 1,25 cm breit. Er wog 119,86 gr. Nach **29**, I folgt

$$K = 119{,}86\,(10{,}00^2 + 1{,}25^2)/12 = 1014{,}4 \text{ cm}^2 \text{ gr}.$$

Torsionsverhältnis. Eine ganze Umdrehung des Aufhängefadens drehte den Magnet um 1,4°. Also ist (77) $\Theta = \frac{1{,}4}{360 - 1{,}4} = 0{,}0039$.

Schwingungsdauer. Beobachtet $= 7{,}414$ sec, bei einem Schwingungsbogen von 30°. Also auf unendlich kleine Schwingungen reducirt (**28**)

$$t = 7{,}414 - 7{,}414 \cdot 0{,}0043 = 7{,}382 \text{ sec}.$$

Man hat also $M \cdot H = \frac{\pi^2 \cdot K}{t^2(1+\Theta)} = \frac{3{,}1416^2 \cdot 1014{,}4}{7{,}382^2 \cdot 1{,}0039} = 183{,}01 \text{ cm}^2 \text{ gr/sec}^2$.

II. Bestimmung von M/H.

Der vorige Magnet lenkte aus der Entfernung 30 cm von Osten in erster Hauptlage eine Bussolennadel ab. Bei dem Umlegen des Magnets wurde abgelesen

	1. Spitze	2. Spitze
N.-Pol zugewandt	112,5°	292,4°
S.-Pol zugewandt	67,6	247,7
	$\varphi = 22{,}45°$	22,35° Mittel = 22,40°.

Bei der Ablenkung aus Westen wurde ebenso gefunden 22,68

Hauptmittel $\varphi = 22{,}54°$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}4150$.

Der Magnet war 10,0, die Nadel 2,0 cm lang, also die Polabstände

$\mathfrak{L} = \frac{5}{6} \cdot 10 = 8{,}3$ cm, $\mathfrak{l} = \frac{5}{6} \cdot 2 = 1{,}7$ cm, woraus $\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2 = 32{,}6$ cm².

Hiernach wird

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2}\frac{r^3 \operatorname{tg}\varphi}{1+\eta/r^2} = \frac{1}{2}\frac{27000 \cdot 0{,}4150}{1+32{,}6/900} = \frac{1}{2}\frac{11205}{1{,}0363} = 5406 \text{ cm}^3$$

und

$$H = \sqrt{\frac{183{,}01}{5406}} = 0{,}1840 \text{ cm}^{-\frac{1}{2}} \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}.$$

Gaufs'sches Verfahren bei der Messung von M/H.

Anstatt die Polabstände als bekannt vorauszusetzen, werden hier aus zwei Entfernungen r und r' die Ablenkungen φ und φ' beobachtet, wodurch die Korrektionskonstante η eliminirt werden kann. Es ist nämlich dann unser gesuchter Quotient Q

in der ersten Hauptlage $\quad Q$ oder $\displaystyle\frac{M}{H} = \frac{1}{2}\frac{r'^5 \operatorname{tg}\varphi' - r^5 \operatorname{tg}\varphi}{r'^2 - r^2}$

und in der zweiten (ohne den Faktor $\frac{1}{2}$) $\displaystyle = \frac{r'^5 \operatorname{tg}\varphi' - r^5 \operatorname{tg}\varphi}{r'^2 - r^2}$.

Günstigste Abstände. Für die Genauigkeit des Resultates ist am besten das Verhältnis der beiden Entfernungen r'/r gegen 1,4 zu wählen. — Aufserdem seien die Ablenkungswinkel passend grofs. Der kleinere Abstand r soll womöglich kleiner werden als etwa die vierfache Magnetlänge, weil sonst zu dem Gliede η/r^2 (v. S.) noch ein anderes mit $1/r^4$ von merklicher Gröfse hinzukommt (Anh. 20). Bei einer Bussole mit Teilkreis werden dann freilich die Ausschläge klein.

Beweis für eine kurze Nadel in erster Hauptlage. Lenkt ein westöstlich gerichteter Magnet eine kurze Nadel, die sich in seiner Fortsetzung in nicht zu kleinem Abstande r von seiner Mitte befindet, um φ ab, so ist (Anh. 21) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{r^3}\frac{M}{H}\left(1 + \frac{\eta}{r^2}\right)$ oder $\frac{1}{2}r^5 \operatorname{tg}\varphi = \frac{M}{H}(r^2 + \eta)$, wo η für jeden Magnet eine Konstante ist. Für den anderen Abstand gilt ebenso $\frac{1}{2}r'^5 \operatorname{tg}\varphi' = \frac{M}{H}(r'^2 + \eta)$. Durch Subtraktion der Gleichungen von einander fällt η heraus und entsteht das obige Resultat.

Kreuzweise Multiplikation beider Gleichungen eliminirt M/H und gibt

$$\eta = r^2 r'^2 \frac{r^3 \operatorname{tg}\varphi - r'^3 \operatorname{tg}\varphi'}{r'^5 \operatorname{tg}\varphi' - r^5 \operatorname{tg}\varphi}.$$

Bei wiederholter Benutzung derselben Magnete genügt es, die Beobachtung aus der gröſseren Entfernung einmal gemacht zu haben und M/H nach Gl. 2 oder 3 mit diesem ein für allemal ermittelten Korrektionswert zu berechnen.

Beispiel. Auſser obiger Ablenkung $\varphi = 22{,}54^0$ für $r = 30{,}00$ cm wurde noch ebenso gefunden $\varphi' = 9{,}77^0$ für $r' = 40{,}00$ cm.
Also wird $M/H = \frac{1}{2}(40^5 \cdot \operatorname{tg} 9{,}77^0 - 30^5 \cdot \operatorname{tg} 22{,}54^0)/(40^2 - 30^2) = 5388\ \text{cm}^3$
und (S. 322) $H = \sqrt{(183{,}01/5388)} = 0{,}1843\ \text{cm}^{-\frac{1}{2}} \text{gr}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}$.

Der Ausdruck η würde nach diesen Versuchen sein

$$\eta = 40^2 \cdot 30^2 \frac{30^3 \cdot \operatorname{tg} 22{,}54^0 - 40^3 \cdot \operatorname{tg} 9{,}77^0}{40^5 \cdot \operatorname{tg} 9{,}77^0 - 30^5 \cdot \operatorname{tg} 22{,}54^0} = 36{,}3\ \text{cm}^2.$$

In der That führt auf den Wert 5388 auch die Formel

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{30^3 \cdot \operatorname{tg} 22{,}54^0}{1 + 36{,}3/900} \text{ oder } = \frac{1}{2} \frac{40^3 \cdot \operatorname{tg} 9{,}77^0}{1 + 36{,}3/1600}.$$

Abänderung der Gauſs'schen Formeln. Bei kurzen Magnetnadeln sind die folgenden Formeln, besonders für kleine Abstände, im allgemeinen vorzuziehen.

1. Hauptlage

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{r'^2 - r^2}{r'^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\varphi'^{-\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\varphi^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$$

2. Hauptlage

$$\frac{M}{H} = \left[\frac{r'^2 - r^2}{\operatorname{tg}\varphi'^{-\frac{2}{3}} - \operatorname{tg}\varphi^{-\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

oder bei Beobachtung aus nur einem Abstande R:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} R^3 \operatorname{tg}\Phi \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)^2; \qquad \frac{M}{H} = R^3 \operatorname{tg}\Phi \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{L}^2 - 4\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

F. K., Wied. Ann. 31, 613. 1887.

Spiegelablesung. Werden die Ablenkungen an einem Magnetometer mit Spiegel und Skale (**25, 26**) gemessen, was den Vorteil hat, die Abstände gröſser nehmen zu können und doch gut meſsbare Ausschläge zu bekommen, so ist das Torsionsverhältnis ϑ (**77**) des Magnetometers durch Multiplikation der Tangenten mit $1 + \vartheta$ in Rechnung zu setzen. Deklinationsschwankungen eliminirt man durch Abwechslung in den Ablenkungen oder nach einem Hilfsvariometer (**74**).

Korrektion wegen des von der Erde inducirten Magnetismus. Während der Schwingungen liegt der Magnet nordsüdlich; sein Magnetismus M ist deswegen durch den Erdmagnetismus ein wenig verstärkt. Er betrage jetzt $M(1+\Delta)$, wo man Δ den Induktionskoefficient durch die erdmagnetische

Horizontalkomponente nennt. Die früher bestimmte Gröfse P (S. 320) stellt also nicht MH, sondern $MH(1+\Delta)$ vor und man hat nicht $H=\sqrt{P/Q}$, sondern

$$H=\sqrt{\frac{P}{Q}}\sqrt{\frac{1}{1+\Delta}}.$$

Der Korrektionsfaktor für H wegen des inducirten Magnetismus ist also $\sqrt{1/(1+\Delta)}$ oder merklich $1-\frac{1}{2}\Delta$.

Über die Messung von Δ s. **113**. Für die gewöhnlich gebrauchten Magnete kann man Δ ungefähr schätzen nach der Regel, dafs das magnetische Feld 1 [C.G.S] in 1 gr Stahl ungefähr den Magnetismus 0,25 [C.G.S] inducirt. Wiegt der Magnet also p gr und ist H der Erdmagnetismus, so ist zu schätzen $M\Delta=0{,}25\,p\cdot H$ oder $\Delta=0{,}25\,p\cdot H/M$. Für $H=0{,}2$ und einen Durchschnittswert von $p/M=\frac{1}{30}$ (vgl. **113**) ist $\Delta=\frac{1}{600}$ und der Einflufs beträgt in H $\frac{1}{12}$ Proc.

III. Bestimmung von H mit dem kompensirten Magnetometer (nach W. Weber).

Das kompensirte Magnetometer besteht aus einer Bussole und einem Rahmen mit 4 Magneten. Die beiden kleineren wirken aus erster, die gröfseren gleichsinnig aus zweiter Hauptlage. Erstere sind doppelt, letztere dreimal so lang, breit und dick wie die Nadel. Der Abstand der gröfseren Stäbe soll nahe das 1,20fache des kleineren sein. Hierdurch heben die Korrektionsglieder sich merklich heraus.

Man orientirt die Bussole so, dafs bei dem Auflegen des Rahmens die Verbindungslinie der gröfseren Magnete nordsüdlich steht. Man legt den Rahmen in zwei um 180° verschiedenen Stellungen auf. Die halbe Differenz der Nadeleinstellungen ist der Ablenkungswinkel φ.

Um die Schwingungen zu beobachten, kann man einen Spiegel an den Rahmen anschrauben. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments dienen überzuhängende Gewichte; Temperaturschwankungen sind in Rechnung zu setzen.

1. Vergleichung von H an zwei Orten. Es ist

$$H_1:H_2=\operatorname{tg}\varphi_2:\operatorname{tg}\varphi_1.$$

Unabhängig von Änderungen der Stäbe macht die Bestimmung der Schwingungsdauern t_1 und t_2 des Rahmens an beiden Orten, nachdem man alle 4 Magnete gleichgerichtet hat. Dann ist

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{t_2}{t_1}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1}}.$$

2. Absolute Bestimmung. Nennen wir $2r$ bez. $2R$ den Abstand der Mittelpunkte der kleineren bez. gröfseren Magnete von einander; die Schwingungsdauer mit gleichgerichteten Magneten t; wenn die kleineren Magnete um 180° gedreht sind, τ; ferner Θ das Torsionsverhältnis des Fadens im ersteren Falle, K das Trägheitsmoment, so ist

$$H = \frac{\pi}{t\tau}\sqrt{\frac{K}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\frac{\tau^2 - t^2}{r^3} + \frac{\tau^2(1-2\Theta)+t^2}{2R^3}\right)}.$$

Vgl. F. K., Pogg. Ann. 142, 551. 1871.

IV. Bestimmung von H auf bifilar-magnetischem Wege (F. K.).

Die Zeitbestimmung wird durch die in einer bifilaren Direktionskraft enthaltene Schwerbeschleunigung ersetzt.

1. Bestimmung von MH. Absolutes Bifilarmagnetometer.

Die Suspension einer bifilaren Aufhängung (Fig. S. 103) sei ostwestlich gerichtet. Man lege einen Magnetstab ein und beobachte die jetzige Einstellung der Ableseskale. Man lege dann den Magnet um und lese wieder ab. Die Hälfte des Winkels zwischen beiden Stellungen sei gleich α (**25**).

Die Direktionskraft der Bifilarsuspension, nach **27a** bestimmt, sei $= D$; H sei der Erdmagnetismus und M der Stabmagnetismus. Dann ist

$$MH = D \operatorname{tg}\alpha.$$

2. Bestimmung von M/H.

Der obige Magnet, ostwestlich gerichtet, lenke in der zweiten Hauptlage eine kurze Magnetometernadel, die sich also nördlich oder südlich vom Magnet befindet, aus der grofsen Entfernung r um den Winkel φ ab. Es sei Θ das Torsionsverhältnis dieser Nadel (**77**) und $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Magnetstabes (d. h. $^5/_6$ der Stablänge; **76b**). Dann ist

$$\frac{M}{H} = r^3\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right)(1+\Theta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen kann man M erhalten; die Division liefert

$$H^2 = \frac{D}{r^3(1+\Theta)(1+\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2/r^2)}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Von Schwankungen des Stab- und des Erdmagnetismus

wird man unabhängig, wenn der Stab, **während** er bifilar aufgehängt ist, zugleich das Magnetometer ablenkt. Man beobachtet mit nördlich und südlich gestelltem Magnetometer. Abstand r ist die halbe Entfernung des Aufhängefadens in beiden Stellungen.

Für wiederholte Bestimmungen werden am bequemsten zwei stehenbleibende Magnetometer gleichzeitig verwendet. α ist dann das Mittel aus beiden Ablenkungen. Um Unsymmetrien zu eliminiren, wird einmal auch die Ablenkung α' mit vertauschten Magnetometern beobachtet. Dann hat man die Ablenkungen in der normalen Stellung ein für allemal mit $1+\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)/\alpha$ zu multipliciren.

Korrektionen. Aus der Wirkung der Nadel auf den Magnet und der schrägen Stellung des letzteren entsteht bei gleichzeitiger Beobachtung von α und φ eine kleine Korrektion. $\varkappa$ sei das Verhältnis des Nadelmagnetismus bez. der Summe beider Nadelmagnetismen zum Erdmagnetismus, so ist der Ausdruck für H^2 zu multipliciren mit

$$(1-2\varkappa/r^3)(\cos\alpha-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi).$$

Skalenabstände. Sind die Skalenabstände des Bifilars und des Unifilars nahe gleich, so braucht man nur den Unterschied beider Abstände genau zu messen, was mit Hilfe ausgespannter Fäden leicht geschieht.

Erste Hauptlage. Man kann das Unifilarmagnetometer östlich und westlich vom Bifilarmagnet aufstellen, dann gilt

$$H^2=\frac{2D}{r^3(1+\Theta)(1-\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2/r^2)}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}\left(1+\frac{\varkappa}{r^3}\right)(\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi).$$

Vgl. F. K., Wied. Ann. 17, 765. 1882.

V. Bestimmung von MH mit der Wage (Toepler).

Eine eisenfreie feine Wage ist um eine Vertikalaxe drehbar. Der Balken stehe im magnetischen Meridian. Mit dem Wagebalken ist der Magnet M in vertikaler Stellung fest verbunden; das von dem horizontalen Erdmagnetismus H mittels M auf die Wage ausgeübte Drehmoment ist $=MH$. Dreht man die ganze Wage um 180^0, so wirkt dasselbe Drehmoment nach der entgegengesetzten Richtung. Man wird also zum Äquilibriren in den beiden Stellungen verschiedene Gewichte nötig haben.

Beträgt dieser Unterschied m gr, ist l cm die Länge des Wagearmes, endlich $g=981$ cm/sec² die Schwerbeschleunigung, so ist offenbar

$$MH=\tfrac{1}{2}gml\ \mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{gr/sec}^2.$$

Vgl. Toepler, Wied. Ann. 21, 158. 1884; Freyberg, ib. 25, 511. 1885.

74. Zeitliche erdmagnetische Variationen.

Schwankungen des Erdmagnetismus bewirken, dafs Richtung und Stärke des Feldes sich mit der Zeit ändern. Von den zuweilen (bei Nordlicht etc.) auftretenden starken Störungen abgesehen, erreichen die meist langsam verlaufenden Schwankungen bei der Intensität etwa $^1/_2$ Procent, bei der Deklination etwa $^1/_4$ Bogengrad.

Dadurch, dafs im verdunkelten Zimmer der von einer Linse erzeugte Bildpunkt einer Lichtquelle nach der Spiegelung von einem Variometer auf ein durch Uhrwerk vorgeschobenes lichtempfindliches Papier fällt, lassen die Variationen sich photographiren.

Physikalische Beobachtungen werden besonders durch die Deklinationsschwankungen gestört, wobei aber die plötzlichen Einflüsse durch die modernen Anwendungen der Elektricität zum Haustelegraphen, zur Beleuchtung, zum Strafsenbahnbetrieb oft viel nachteiliger sind, als die erdmagnetischen Variationen.

I. Deklinationsschwankungen.

Sie werden mit dem Magnetometer gemessen, d. h. mittels eines am Faden aufgehangenen Magnets mit einem Spiegel, in welchem das Bild einer horizontalen Skale beobachtet wird. Der Abstand der Skale vom Spiegel sei, in Skalenteilen, also gewöhnlich in mm gemessen, $= A$. Eine Bildverschiebung gegen das Fadenkreuz um e Skalenteile bedeutet dann die Drehung um einen Winkel $= e/(2A)$ in absolutem Mafse gemessen, oder um $1719 \cdot e/A$ in Bogenminuten (**25**). Wegen der Fadentorsion sind die beobachteten Bewegungen mit $1 + \Theta$ zu multipliciren, wenn Θ das Torsionsverhältnis (**77**) vorstellt.

II. Intensitätsschwankungen.

Haltbarkeit der Magnete. Auf dieser, vollkommen nicht erreichbaren Eigenschaft beruhen die Intensitätsvariometer. Über ein Verfahren, die Veränderlichkeit zu vermindern, s. **72b**, I. — Temperaturschwankungen sind zu eliminiren.

Zur Messung dient ein horizontal drehbar aufgehangener Magnet, der entweder durch seine, gewöhnlich bifilare Aufhängung, oder durch genäherte permanente Magnete in eine zum magn. Meridian nahe senkrechte Stellung gezwungen ist. Die Ablesung geschieht ebenfalls mit Spiegel und Skale.

Die Änderung der Intensität, welche einer Drehung der Nadel um 1 Sk.T. entspricht, und zwar in Bruchteilen der Intensität selbst gemessen, soll E heifsen. Wenn also der Einstellung auf den Skalenteil p die Intensität H entspricht, so ist die Intensität bei der Einstellung p'

$$H' = H[1 + E(p' - p)].$$

Bestimmung des Skalenwertes E.

Allgemein anwendbar ist das folgende Verfahren. Man läfst auf die Nadel des Variometers in gleicher Höhe aus der grofsen Entfernung r im Norden oder Süden einen nordsüdlich gerichteten Magnet ablenkend wirken und liest ab. Man dreht den Magnet um 180° und liest wieder ab; der Unterschied beider Ablesungen betrage n Sk.T. Dann ist der Skalenwert

$$E = \frac{1}{n}\frac{4}{r^3}\frac{M}{H}. \qquad 1.$$

M ist der Magnetismus des ablenkenden Stabes, der aber nur im Verhältnis zum Erdmagnetismus bekannt zu sein braucht (**73** II oder **76**).

Beweis. Der Stab M vermehrt bez. vermindert in seinen beiden Lagen die Intensität H um $2M/r^3$. Da die Einstellung sich bei dem Umlegen von M um n Sk.T. ändert, so bedeutet 1 Sk.T. also die Änderung $4M/(nr^3)$, oder in Teilen der Intensität selbst $4M/(nr^3H)$; q. e. d.

Sind Magnetlänge $\mathfrak{L}$ und Nadellänge $\mathfrak{l}$ nicht klein gegen r, so tritt, wenn M richtig ermittelt ist, der Korrektionsfaktor $\left(1+\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}-\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{r^2}\right)$ hinzu; vgl. S. 321 u. Anh. 20. Man kann aber statt dessen M/H ohne Rücksicht auf die Längen an einer ähnlich gestalteten Nadel aus ungefähr demselben Abstand r bestimmen und diesen Wert dann ohne Korrektionen in 1) einsetzen.

1. Bifilarvariometer (Gaufs).

Ein Magnet ist an 2 Fäden von kleinem Abstande bifilar aufgehängt (**27a**). Die Verbindungslinie der oberen und diejenige der unteren Befestigungspunkte der Fäden werden so gegen einander gedreht, dafs das erdmagnetische und das statische (durch die Schwere und die Elasticität hervorgebrachte) Drehmoment der Fäden zusammen den Magnet ostwestlich stellen.

Die mit Spiegel und Skale abzulesende geringe Drehung, welche der Magnet durch eine Änderung der erdmagnetischen Horizontalintensität erfährt, kann der Änderung proportional gesetzt werden. Wachsende Intensität dreht den Nordpol nach Norden; es ist bequem, wenn dieser Drehung wachsende Zahlen der Skale entsprechen.

Bestimmung des Skalenwertes E.

1. S. das vor. S. angeführte Verfahren.

2. Mit dem Torsionskreis. Hat das Instrument einen Torsionskreis, so ergibt sich E aus dem Winkel α, welchen die Vertikalebenen der oberen und der unteren Aufhängepunkte mit einander bilden, wenn A der Skalenabstand,

$$E = (1/2A) \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

α wird bestimmt, indem man den Magnet in der Bifilarsuspension um 180^0 umlegt und nun den Torsionskreis um 2α dreht, bis wieder die Ostwestlage eingetreten ist.

Das Verfahren setzt Aufhängefäden von geringer Torsionskraft voraus, z. B. aus feinem Messingdraht.

Beweis. Die Bifilarnadel m steht immer so nahe senkrecht zum Meridian, dafs das erdmagn. Drehmoment mit Hm zu bezeichnen ist. Das bifilare Drehmoment ist $D \sin \alpha$ (**27a**). Also haben wir $Hm = D \sin \alpha$. Wenn sich nun H in $H(1+E)$ und α in $(\alpha + 1/2A)$ ändert, d. h. wenn sich das Instrument um 1 Skalenteil dreht, so ist wieder

$$Hm(1+E) = D \sin(\alpha + (1/2A)) = D(\sin \alpha + (1/2A) \cdot \cos \alpha).$$

Beiderseitige Division mit $Hm = D \sin \alpha$ ergibt obiges E.

Über die Bestimmung von E aus Torsions- und Schwingungsbeobachtungen vgl. Gaufs, Result. d. magn. Vereins 1841, S. 1, oder Abh. Bd. 5, S. 404, und Wild, Carl Repert. 16, 325. 1880. Vgl. ferner F. K., Wied. Ann. 15, 536. 1882.

Temperatur-Korrektion. Erwärmung schwächt den Stabmagnetismus, läfst also den Erdmagnetismus kleiner erscheinen. Ein wenig wirkt auch die Ausdehnung der Suspension und der Drähte. Ist μ der Temperaturkoefficient des Magnets (**76a**), β der Ausdehnungskoefficient der Suspension, β' derjenige der Drähte, so verlangt 1^0 Temperaturänderung eine Korrektion um $(\mu + 2\beta - \beta')/E$ Skalenteile. Für eine Aufhängung ganz aus Messing wird der Ausdruck $= (\mu + 0{,}000018)/E$.

Torsionsvariometer.

Statt durch ein bifilares Drehmoment lenkt man die Nadel durch Drehung ihres Aufhängefadens (Stahl oder Quarz) bis zur ostwestlichen Stellung ab.

Der Skalenwert E läfst sich nach dem Verfahren 1 ermitteln oder aus dem Torsionswinkel φ. Er ist für einen Sk.-Abstand von A Sk.-T. offenbar $E = \frac{1}{2A}\frac{1}{\varphi}$, wo φ in absolutem Mafse (Anh. 3) zu messen ist.

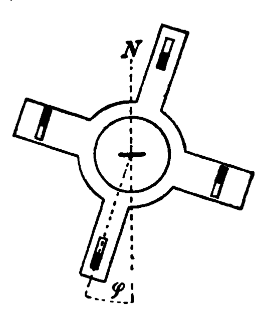
Wenn z. B. $\varphi = 2\pi = 6{,}28$ und $A = 2500$, so wird $E = 0{,}000032$. Die Empfindlichkeit läſst sich leicht beliebig steigern.

2. Ablenkungsvariometer (F. K.).

Eine Magnetnadel kann, anstatt durch bifilare Aufhängung, auch durch Ablenkungsstäbe senkrecht zum Meridian gerichtet werden und stellt dann ein Intensitätsvariometer dar. Für vorübergehende Beobachtung läſst ein solches Instrument sich leicht improvisiren.

Skalenwert. Man kann verfahren, wie auf S. 329.

Vierstab-Variometer. Auf einem horizontal drehbaren Rahmen sind vier gleiche Magnete befestigt, so daſs auf den Mittelpunkt zwei aus erster und zwei aus zweiter Hauptlage wirken, die ersteren aus einem um etwa $\frac{1}{16}$ gröſseren Abstande als die letzteren. Die gesamte Richtkraft soll etwas gröſser sein als die erdmagnetische, was durch passende Stellung der Magnete bewirkt wird. Den Mittelpunkt bildet eine Magnetometernadel an einem Aufhängefaden von geringer Torsion.



Orientirung zum Meridian. Man stellt den Rahmen auf den Nullpunkt seiner Teilung, und zwar so, daſs die Richtkraft der Magnete dem Erdmagnetismus entgegenwirkt. Die Drehungsaxe wird mit der Libelle vertikal gemacht. Nun dreht man das ganze Instrument, bis die Nadel sich in die Richtung der vier Stäbe einstellt, und schraubt es fest. Jetzt liegt der Nullpunkt der Teilung im Meridian.

Nun wird der Rahmen um einen solchen Winkel φ gedreht, daſs die Nadel senkrecht zum Meridian steht, und in dieser Lage festgestellt.

Den Skalenwert ermittelt man wieder nach S. 329 oder berechnet ihn als $E = (1/2A) \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Die Empfindlichkeit $1/E$ kann also durch ein kleines φ, d. h. durch eine Stellung der Stäbe, bei der ihre Richtkraft den Erdmagnetismus nur wenig übertrifft, beliebig gesteigert werden.

Beweis wie in **75**. — Vgl. auch F. K., Wied. Ann. 15, 540. 1882.

In dem Ausdruck für E befindet sich eigentlich ein, von der Richtung der Nadel gegen das Feld der Magnete abhängiges Korrektionsglied, welches den Faktor $\frac{4}{r_1^5} - \frac{3}{r_2^5}$ enthält, wo r_1 und r_2 die Abstände der aus 1. und 2. Hauptlage wirkenden Stäbe bedeuten. Die Korrektion fällt also fort, wenn $r_1/r_2 = (4/3)^{1/5}$ nahe gleich $1 + 1/16$ gewählt wird. Wind, Dissertation Groningen, 1894. — Beweis auch aus Pogg. Ann. 142, S. 550. 1871 einfach zu entnehmen.

Temperatur-Korrektion. Höhere Temperatur läßt den Erdmagnetismus zu groß erscheinen. Den Einfluß bestimmt man im Winter durch abwechselnde Beobachtung im warmen und kalten Zimmer. Findet man die Skaleneinstellungen p_1 und p_2 bei den Temperaturen t_1 und t_2, so beträgt die Korrektion der Ablesung $(p_1 - p_2)/(t_1 - t_2)$ für 1°. — Geht man später zu einem anderen Skalenwert E' über, so ist dieser Ausdruck natürlich mit E/E' zu multipliciren.

75. Vergleichung der Horizontal-Intensität an zwei Orten.

Lokale, durch benachbarte Eisenmassen bewirkte Einflüsse sind für physikalische Zwecke hauptsächlich bei der Horizontalkomponente der Feldstärke von Bedeutung.

I. Vergleichung durch Schwingungen.

Man läßt eine und dieselbe Magnetnadel an beiden Orten schwingen; die Intensitäten verhalten sich $H_1 : H_2 = t_2^2 : t_1^2$. Bei Anspruch auf Genauigkeit sind Temperatur und zeitliche erdmagnetische Schwankungen zu berücksichtigen (**76a**, **74**).

II. Vergleichung durch Ablenkungen.

Für eine rohe Bestimmung stellt man eine Bussole an beiden Orten auf und lenkt sie durch einen Magnet aus bestimmtem Abstande ab. Betragen die Ablenkungen α_1 und α_2, so ist

$$H_1 : H_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 : \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Lokal-Variometer (F. K.).

Eine gröfsere Empfindlichkeit wird erzielt, wenn man die ablenkenden Magnete so anordnet, dafs die Magnetnadel um nahe 90° abgelenkt wird, wie in 74, II. Das Vierstab-Variometer ist das empfindlichste Lokalvariometer und kann kleine lokale Variationen auf $\frac{1}{10000} H$ genau

messen. Es werde hier eine einfachere Form mit einem drehbaren Magnet unter einer Bussole gewählt. Das erstere Variometer mit dem Spiegel wird im Prinzip genau so behandelt.

1. Die Drehaxe des Instruments sei mit Hilfe der Libelle vertikal gemacht.

2. Richtiger Abstand des Magnets. Die Wirkung des letzteren mufs, wenn er im Meridian steht, etwas stärker sein, als der Erdmagnetismus. Man regulirt zu dem Zwecke den Abstand, während der Magnet Nordpol nach Norden steht, bis die Nadel sich Nordpol nach Süden stellt. Je gröfser die Empfindlichkeit werden soll, desto geringer mufs der Kraftüberschufs des Magnets gewählt werden.

3. Orientirung in den Meridian. Man stellt den Magnet auf den Nullpunkt seiner Kreisteilung und dreht das ganze Instrument, bis die Nadel dem Magnet parallel steht. Wir nehmen an, dafs sie alsdann auch auf den Nullpunkt der Bussolenteilung zeigt.

4. Drehungswinkel φ des Magnets. Man dreht den Magnet nach der einen Seite, bis die Nadel auf 90° zeigt, und fixirt den einen Anschlag des Magnets auf diese Stellung. Man verfährt ebenso nach der anderen Seite. Jetzt ist das Instrument fertig. Die Hälfte des Drehungswinkels zwischen den beiden Anschlägen heifse φ.

5. Vergleichung von H an zwei Orten. An dem Vergleichspunkt I wird das Variometer nach Nr. 3 orientiert und der Magnet zuerst gegen den einen, alsdann gegen den anderen Anschlag gelegt. Wir wollen die Nadelspitze immer auf der Seite der Bussole ablesen, auf welcher die Bezifferung nach Norden wächst. Der Nordpol der Nadel zeige hier die Einstellung p_n; alsdann, nach dem Umlegen des Magnets, zeige der Südpol p_s, beides in Bogengraden. Die Differenz $p_n - p_s$ heifse δ_1. An dem Punkte II habe die eben beschriebene Differenz den Wert δ_2.

Dann wird das Verhältnis der erdmagnetischen Felder an beiden Orten erhalten als

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_2},$$

wofür bei kleinem δ_1 und δ_2 gesetzt werden darf

$$(H_1 - H_2)/H = [0{,}0087 \cdot \operatorname{tg}\varphi] \cdot (\delta_1 - \delta_2) = C \cdot (\delta_1 - \delta_2).$$

Der Reduktionsfaktor $C = 0{,}0087 \cdot \operatorname{tg}\varphi$ bekommt für $\varphi = 29{,}8^0$ den runden Wert 0,0050. Die strenge Giltigkeit der Formel setzt eine kurze Nadel voraus.

Beweis. Der Magnet übe an dem Orte der Bussole eine Richtkraft J auf eine Nadel Eins aus. Dann ist offenbar $J \cos\varphi = H$, wo H diejenige Feldstärke bedeutet, bei welcher die Nadel durch den um φ gedrehten Magnet um 90° abgelenkt wird. An dem Punkte I wirkt also auf die Nadel eine Nordkomponente $H_1 - H$; senkrecht dazu eine Komponente $J \sin\varphi = H \operatorname{tg}\varphi$. Stellt sich hierbei die Nadel unter einem Winkel ε_1 gegen die Ostwestrichtung ein, so ist also

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = (H_1 - H)/(H \operatorname{tg}\varphi), \quad \text{also} \quad (H_1 - H)/H = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varepsilon_1 .$$

Entsprechend für den Punkt II. Da ε_1 und ε_2 unsere $\frac{1}{2}\delta_1$ und $\frac{1}{2}\delta_2$ bedeuten, so findet man hieraus leicht die obige Gleichung. Die praktische Gleichung für kleine Winkel ergibt sich, wenn man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta/57{,}3^0 = 0{,}0087 \cdot \delta$ setzt.

Temperatur. Der Temperatureinfluſs läſst sich durch Beobachtungen im kalten und im warmen Petroleumbad ähnlich, wie in **74** am Schluſs, bestimmen und in Rechnung setzen. Kann man die Ablesungen an den verschiedenen Orten rasch hintereinander machen, so hält man am besten die Temperatur durch Umhüllung der Magnete mit Watte oder Filz konstant.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 19, 138. 1883 und 29, 51. 1886.

Über einen Vorschlag zu einem Instrument mit zwei übereinander angebrachten Magnetnadeln vgl. Heydweiller, Wied. Ann. 64, 735. 1898.

Ein auch für vertikale Intensität bestimmtes transportabeles Variometer s. O. E. Meyer, ib. 40, 489. 1890.

76. Bestimmung eines magnetischen Moments.

Über die Verteilung des Magnetismus in einem Stabe und über Magnetisirungskoefficienten weichen Eisens s. **115** und Tab. 37.

Am einfachsten und leicht zu improvisiren sind die Methoden, welche das magnet. Moment eines Stabes auf den Erdmagnetismus zurückführen. Wegen der Veränderlichkeit des Stabmagnetismus durch Temperatur und Zeit ist groſse Genauigkeit selten gefordert. Man wird daher die Horizontalintensität H für den Beobachtungsort hinreichend genau aus Tab. 38 entnehmen können.

Über Begriff und Gröſse des spec. Magnetismus vgl. **72b**, über die Dichte von freiem Magnetismus an Polflächen z. B. Anh. 21.

I. Bestimmung aus Ablenkungen.

Ein in cm geteilter Meterstab, der in der Mitte die Bussole trägt und nach ihr ostwestlich (bez. nordsüdlich für die 2. Hauptlage) orientirt ist, wird für diese Bestimmungen meist genügen. Hat man ein Magnetometer (oder Spiegelgalvanometer) in geeigneter Stellung zur Verfügung, so kann die Ablenkung genauer gemessen und zugleich der Abstand so groſs genommen werden, daſs keine Korrektion nötig ist. Für $\operatorname{tg}\varphi$ wird man (**25**) Ausschlag durch doppelten Skalenabstand setzen dürfen, multiplicirt mit $(1 + \Theta)$, wenn Θ das Torsionsverhältnis bedeutet (**77**).

Der Magnetstab lenke eine Nadel aus dem Abstande r in der ersten Hauptlage (Anh. 20 u. **73** II) um den Winkel φ ab. Über eine genaue Bestimmung von φ durch Ablesen beider Nadelspitzen, Umlegen des Magnets und Ablenkung von zwei Seiten vgl. S. 321 und das Beispiel S. 323.

Ist der Abstand r grofs gegen die Magnetlänge, so wird das magnetische Moment (Anh. 20)

$$M = \tfrac{1}{2} r^3 H \operatorname{tg} \varphi.$$

Anderenfalls nennen wir wieder (S. 321) $\mathfrak{L}$ bez. $\mathfrak{l}$ die Polabstände des Magnets bez. der Nadel ($^5/_6$ ihrer Längen), berechnen $\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2$ und dividiren obiges M durch $(1 + \eta/r^2)$.

Bei Messungen aus der zweiten Hauptlage fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ fort und es ist ev. $\eta = -\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2$ zu setzen.

Bei der Untersuchung eines nicht stabförmigen Magnets, beispielsweise auch eines magnetischen Minerales, dessen magnetische Axe sich nicht aus der Gestalt erkennen läfst, bringt man durch Drehen den Körper in die Stellung, in welcher die ablenkende Wirkung am gröfsten ist. Zugleich erhält man hierbei die Lage der magnetischen Axe.

II. Bestimmung durch Schwingungsbeobachtung.

Für einen Magnetstab von regelmäfsiger Gestalt läfst sich das Trägheitsmoment K (**29**) berechnen, und man erhält aus seiner Schwingungsdauer t

$$M = \frac{\pi^2 K}{t^2 H (1 + \Theta)}.$$

Durch Kombination der Verfahren I und II kann man den Erdmagnetismus H eliminiren.

III. Bestimmung durch bifilare Aufhängung.

Nach **73**, IV auszuführen.

IV. Mit der Wage (Helmholtz).

Es werden gesucht die magnetischen Momente M_1, M_2, M_3 dreier Magnetstäbe, die Polabstände ($^5/_6$ der Stablängen) seien $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$. Der Stab M_1 wird vertikal an eine eisenfreie empfindliche Wage gehängt, der Stab M_2 horizontal an das andere Ende und zwar dem Wagebalken parallel und in die Höhe des Mittelpunktes von M_1. Die Wage werde

ins Gleichgewicht gesetzt. Nun kehre man den einen der Stäbe um, so dafs seine Pole vertauscht sind. Man müsse auf einer Seite p gr auflegen, um die Wage wieder einzustellen.

Der im Verhältnis zur Stablänge beträchtliche Abstand der beiden Schneiden von einander betrage r cm. Dann ergibt sich das Produkt der beiden magnetischen Momente in C. G. S.-Einheiten, wenn $g = 981$ ist,

$$M_1 M_2 = \frac{1}{12} \frac{r^4 p \cdot g}{1 - \frac{5}{2}\mathfrak{L}_1{}^2/r^2 + \frac{10}{3}\mathfrak{L}_2{}^2/r^2} = P_{12}.$$

Um die Unsymmetrie der Magnetisirung zu eliminiren, hänge man auch den anderen Magnet um und nehme aus beiden Resultaten das Mittel.

Ebenso bestimme man $M_1 M_3 = P_{13}$ und $M_2 M_3 = P_{23}$. Dann ist $M_1 = \sqrt{P_{12} \cdot P_{13} / P_{23}}$ u. s. w.

Vgl. Helmholtz, Sitzungsber. d. Berliner Akad. 16, 405. 1883.

Die Bestimmung magn. Momente durch Induktion s. in **109.**

76a. Temperaturkoefficient eines Magnets.

Temperaturkoefficient μ heifst die durch $+1^0$ hervorgebrachte relative Abnahme des Magnetismus. Je gröfser der specifische Magnetismus, desto kleiner ist im allgemeinen der Temp.-Koefficient. Er beträgt bei guten Magneten etwa 0,0003 bis 0,001.

Die Methoden in **76** lassen auch den Einflufs der Temperatur bestimmen, aber wenig genau. Man mufs die durch die Erwärmung bewirkten Ausschläge vergröfsern.

I. Kompensation (Weber).

Man nähert einem Magnetometer von kurzer Nadel den Magnet von der einen Seite bis zu dem mäfsigen Abstande r, hebt aber die grofse Ablenkung durch einen Hilfsstab nahezu wieder auf. Nun wird der erste Stab auf verschiedene Temperaturen t_1 und t_2 gebracht; n sei dabei der Unterschied der beiden Einstellungen, A der Skalenabstand.

Der Temperaturkoefficient μ ist dann $\mu = C \cdot n/(t_1 - t_2)$. Den Faktor C bekommt man folgendermafsen.

1. Wenn der Magnet aus der gleichen Entfernung eine kurze Bussolennadel um φ ablenkt, so ist $C = \dfrac{1}{2A \cdot \mathrm{tg}\,\varphi}$.

2. Ist der Magnetismus M des Stabes bekannt, so hat man, wenn $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Stabes (S. 321),

in erster Hauptlage $C = \dfrac{H}{M}\dfrac{r^3}{4A}\left(1 - \frac{1}{2}\dfrac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right)$; in zweiter Hauptlage $C = \dfrac{H}{M}\dfrac{r^3}{2A}\left(1 + \frac{3}{8}\dfrac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right)$.

3. Oder man nähert den Magnet und den Hilfsstab folgeweise in einzelnen Absätzen, so dafs die Näherung des einen immer die Nadel nahe an das eine Ende der Skale bringt, die Näherung des andern an das entgegengesetzte Ende. Die letzte Näherung bringe die Nadel wieder nahe auf die alte Ruhelage. N sei die Summe sämtlicher Skalenverschiebungen, die nach und nach durch den Magnet (nicht durch den Hilfsstab) hervorgebracht wurden, nach **25**, S. 99 auf Gröfsen korrigirt, die der Tangente der Ausschlagswinkel proportional sind. Dann ist offenbar $C = 1/N$.

II. Durch bifilare Aufhängung (Wild).

Der Magnet wird in einer empfindlichen Bifilarsuspension ostwestlich aufgehängt und durch Heizung u. s. w. des Raumes auf verschiedene Temperaturen gebracht. E sei der Skalenwert (**74** II). Bewirkt eine Erwärmung t die Verschiebung n, so ist $\mu = nE/t - 2\beta + \beta'$. β und β' sind die Ausdehnungskoefficienten der Suspension und des Aufhängedrahts. Schwankungen des Erdmagnetismus (**74**) mufs man in Rechnung setzen.

Wild, Carl Rep. 9, 277. 1873.

III. Durch 90°-Ablenkung eines Magnetometers (F. K.).

Der Magnet wird in der Höhe der (kurzen) Magnetometernadel horizontal mit seinem Mittelpunkt im Meridian der Nadel so angebracht, dafs die Nadel sich ostwestlich stellt. Er bilde in dieser Stellung mit dem Meridian den Winkel φ (Fig.). Man erwärme den Magnet um t; die Nadel drehe sich dadurch um den Winkel ε. Dann ist der Temperaturkoefficient $\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \varepsilon/t$.

r
φ
M

Mit kleinem φ ist die Methode sehr empfindlich.

Beweis. Da die Nadel ostwestlich steht, so stammt ihre Direktionskraft nur von dem Magnet und beträgt $M/r^3 \cdot \sin\varphi$. Die Ablenkung ε bedeutet also ein neues Drehmoment $\varepsilon \cdot M/r^3 \cdot \sin\varphi$, welches andrerseits gleich $2\Delta M/r^3 \cdot \cos\varphi$ ist, wenn ΔM die von der Erwärmung bewirkte Änderung des magnetischen Moments bedeutet. Also hat man $\Delta M = \frac{1}{2} M \cdot \varepsilon\,\mathrm{tg}\,\varphi$ und den Temp.-Koeff. $\mu = 1/t \cdot \Delta M/M = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \varepsilon/t$.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 22, 420. 1884, auch über Korrektionen.

76b. Polabstand eines Magnets.

Unter Polen werden hier die Punkte verstanden, in denen man die beiden Magnetismen eines gestreckten Stabes für Fernwirkungen koncentrirt annehmen darf, wenn die 4. Potenz des Verhältnisses der Magnetlänge zu der Entfernung gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Der Magnet lenke eine in gleicher Höhe befindliche kurze Magnetnadel aus den beiden Entfernungen a_1 bez. a_2 — die Entfernungen von Mitte zu Mitte gemessen — um φ_1 bez. φ_2 ab. Der Polabstand der Nadel, d. h. hier ausreichend genau $\frac{5}{6}$ ihrer Länge, sei $= \mathfrak{l}$. Man berechne zunächst

$$\eta = a_1^2 a_2^2 \frac{a_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1 - a_2^3 \operatorname{tg} \varphi_2}{a_2^5 \operatorname{tg} \varphi_2 - a_1^5 \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Der Polabstand $\mathfrak{L}$ des Magnets ist dann, im Anschlufs an die Gaufs'schen Formeln (S. 321 ff.), durch die folgenden Ausdrücke gegeben. Es ist für Beobachtungen aus

erster Hauptlage	zweiter Hauptlage
$\mathfrak{L}^2 = +2\eta + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2,$	$\mathfrak{L}^2 = -\frac{8}{3}\eta + 4\mathfrak{l}^2.$

Den abgeänderten Formeln S. 324 entsprechend hat man $\mathfrak{L}^2 =$

in erster H.-L.	in zweiter H.-L.
$4\frac{a_1^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{1}{2}}}{a_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2,$	$4\frac{a_1^2 \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{2}{3}} - a_2^2 \operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg} \varphi_2^{\frac{2}{3}} - \operatorname{tg} \varphi_1^{\frac{2}{3}}} + 4\mathfrak{l}^2.$

Um Unsymmetrien zu eliminiren, wird der Magnet folgeweise auf beide Seiten des Magnetometers gelegt; a_1 oder a_2 bedeuten jedesmal den halben Abstand zwischen zusammengehörigen Stellungen des Magnets. Aufserdem legt man den Magnet jedesmal um.

Von Temperatur- und erdmagnetischen Schwankungen macht die gleichzeitige Anwendung zweier Magnetometer unabhängig, zwischen denen der Magnet aus zwei symmetrisch gegen die Mitte gelegenen Stellungen wirkt. Ist E der Abstand beider Magnetometerfäden von einander und E' die Strecke, um welche der Magnet verschoben wird, so ist $a_1 = \frac{1}{2}(E - E')$ und $a_2 = \frac{1}{2}(E + E')$. Nach dem ersten Beobachtungssatz vertauscht man die Magnetometer mit einander, wiederholt die Beobachtungen und nimmt aus den zusammengehörigen Ablenkungen die Mittel. Die Skalenabstände brauchen nur genähert bekannt zu sein. Über Reduktionen s. 25.

F. K. u. Hallock, Wied. Ann. 22, 411. 1884; F. u. W. Kohlrausch, ib. 27, 45. 1886.

77. Torsionsverhältnis eines aufgehangenen Magnets.

Durch den Aufhängefaden tritt zu der magnetischen Direktionskraft D eine elastische d. Das Verhältnis $d/D = \Theta$ heifst Torsionsverhältnis. Eine Ablenkung, die der Magnet erfährt, ist daher im Verhältnis $(1+\Theta)$, seine Schwingungsdauer im Verhältnis $\sqrt{1+\Theta}$ kleiner, als wenn nur die magnetische Dir.-Kraft wirkte.

Je leichter ein Magnet, desto kleiner kann man das Torsionsverhältnis machen, denn die Tragkraft eines Fadens wächst mit dem Quadrate, das Torsionsmoment aber mit der 4. Potenz der Dicke. Coconfäden (8, 20 u. **72b**) haben je nach ihrem Ursprung ein sehr verschiedenes Torsionsmoment. 10 cm lange, feine Fäden aus dem Inneren eines Cocons gehen bis unter $d = 0{,}0001$ [C-G-S], so dafs oft ihr Torsionsverhältnis kaum in Betracht kommt. Andere erreichen ein mehr als zehnfaches Moment. Freilich ist auch die Tragkraft sehr ungleich. Wegen der elastischen Nachwirkung ist Θ für einen Cocon um eine Anzahl von Procenten unsicher.

Äufserst kleine Torsionsmomente erreicht man mit Quarzfäden (8, 21), die gegen den Cocon den Vorteil einer verschwindenden elastischen Nachwirkung haben.

Um Θ zu bestimmen, teilt man dem Faden eine gemessene Torsion α mit und beobachtet die neue Einstellung des Magnets, welche sich von der ursprünglichen um den Winkel φ unterscheide. Dann ist

$$\Theta = \varphi/(\alpha - \varphi).$$

In Ermangelung eines Torsionskreises dreht man den Magnet einmal ganz herum, ohne an der oberen Befestigung etwas zu ändern; dann ist $\alpha = 360^0$ zu setzen.

Bei dem Skalenabstand A bedeutet der Ausschlag e den Winkel $\varphi = 57{,}3^0 \cdot e/(2A)$. Wenn α eine ganze Umdrehung beträgt, rechnet man $\alpha = 2\pi = 6{,}28$ und $\varphi = e/(2A)$.

Indirekte Bestimmung. Die Direktionskraft d eines Fadens ergibt sich aus der Torsionsschwingungsdauer t einer angehängten Masse von bekanntem Trägheitsmoment k (**29**, I) in absolutem Mafse $d = \pi^2 k/t^2$ (Anh. 12). Aus der Direktionskraft D des an dem Faden aufzuhängenden Magnets (z. B $D = MH$; **76** oder Anh. 21), berechnet sich dann das Torsionsverhältnis $\Theta = d/(D+d)$.

Über die Ermittelung von d aus dem elastischen Torsionsmodul vgl. **55**.

78. Erdmagnetische Deklination. Magnetischer Theodolit. Bussole.

Deklination (Tab. 39) ist der Winkel des magnetischen mit dem astronomischen Meridian. Um die Richtung festzustellen, zählt man den Winkel vom astronomischen zum magnetischen Norden, nennt also bei uns die Deklination „westlich“. Insofern man die Lage der magnetischen Axe in einem Magnet nicht verbürgen kann, wird für eine genaue Messung die Magnetnadel in zwei Lagen beobachtet.

Zur Bestimmung nach Gaufs gehört ein Theodolit mit Horizontalkreis und eine ihrem astronomischen Azimut nach vom Theodolit aus bekannte Visirrichtung: etwa ein Fadenkreuz mit Linse im Observatorium oder eine entfernte terrestrische Marke, welche man mit Hilfe des Polarsterns oder der Sonne festgelegt hat (**30a**; **31**); endlich ein Magnetometer, dessen Magnet sich um 180° um seine Axe drehen läfst. Das Theodoliten-Fernrohr steht nahe in der Fortsetzung des Magnets.

Am bequemsten ist, wenn der Magnet eine Längsdurchsicht hat, die am einen Ende mit einer Linse von einer Brennweite gleich der Länge des Magnets geschlossen ist. Am anderen Ende befindet sich eine Marke (Blende mit kleiner Öffnung, Fadenkreuz oder Glasteilung), welche also durch die Linse als ein fernes Objekt erscheint.

Ein mit dem Magnet verbundener Spiegel, dessen Normale nahe mit der magnetischen Axe zusammenfällt, leistet dieselben Dienste, wenn das Fadenkreuz des Theodoliten beleuchtbar ist. Man stellt das Fernrohr auf das Spiegelbild seines Fadenkreuzes ein.

Die Bezifferung des Teilkreises werde im Sinne der täglichen Sonnenbewegung angenommen.

Nach Vertikalstellung der Drehaxe des Theodoliten richtet man sein Fernrohr auf die terrestrische Marke. Die Kreisablesung sei $= \alpha$. Ist Z das astronomische Azimut der Marke, von der Nordrichtung als Nullpunkt nach Westen gezählt, so müfste der Theodolit auf den Teilstrich $\alpha + Z$ gestellt werden, damit das Fernrohr nach Norden gerichtet wäre.

Man richtet das Fernrohr auf die Marke im Magnet; die Kreisablesung sei α_1. Man dreht den Magnet um 180° um seine Axe, so dafs die vorher untere Seite die obere wird, und stellt

wiederum auf die Marke ein. Die Kreisablesung sei α_2; α_1 und α_2 weichen nur wenig von einander ab.

Nun würde offenbar

$$\delta' = \alpha + Z - \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

die westliche Deklination sein, wenn der Faden kein Torsionsmoment ausübte. Um letzteres zu eliminiren, mufs der Winkel bestimmt werden, um welchen der Faden bei der Beobachtung gedrillt war. Zu diesem Zwecke nimmt man den Magnet von seinem Träger am Faden ab, ersetzt ihn durch einen unmagnetischen Stab von gleichem Gewicht und beobachtet die dann erfolgende Drehung des Trägers etwa über einem untergelegten Teilkreis. Beträgt der Drehungswinkel, in dem Sinne der täglichen Sonnenbewegung positiv gerechnet, φ, so ist die Deklination

$$\delta = \delta' + \Theta\varphi,$$

unter Θ das Torsionsverhältnis (77) verstanden.

Über die Beobachtung schwingender Nadeln s. **26**.

Über Deklinationsschwankungen s. **74**.

Magnetischer Theodolit.

Ein magnetischer Theodolit (Lamont, Meyerstein, Neumayer) enthält die Hilfsmittel zur Bestimmung der Deklination und der Horizontal-Intensität vereinigt. In der Drehaxe steht das Magnetometer; das Fernrohr sitzt, wie am Spektrometer, aufsen. Über Deklinationsbestimmung vgl. 78.

Die Intensitätsbestimmung umfafst, wie in **78**, erstens die Beobachtung von Schwingungsdauer und Trägheitsmoment des Magnets, zweitens die Beobachtung der Ablenkungen einer Nadel. Der Ablenkungswinkel wird mit dem Theodolitenfernrohr selbst gemessen, indem man dasselbe der abgelenkten Nadel nachdreht. Eine Marke in der durchbohrten Nadel oder das Bild des beleuchteten Fadenkreuzes (S. 229) in einem Spiegel an der Nadel dient zum Einstellen.

Bei dem vielfach benutzten Lamont'schen Theodolit ist das Fernrohr mit dem Magnetometer und der Schiene, auf welche der Ablenkungsmagnet gelegt wird, zusammen drehbar. Daher steht die Nadel bei der Ablesung senkrecht auf der Verbindungslinie nach dem Magnet, und es kommt anstatt der Tangente der Sinus des Ablenkungswinkels. Man rechnet nach der Formel

$$\frac{M}{H}\left(1 + \frac{\eta}{R^2}\right) = \tfrac{1}{2} R^3 \sin\varphi.$$

Das zweite Korrektionsglied mit $1/R^4$, welches sonst noch wirksam werden kann, pflegt man dadurch zu beseitigen, dafs man die Nadel 2,1 mal kleiner nimmt wie den Magnet; dann heben sich Magnet- und Nadellänge nahe heraus.

Die Gröfse η wird, wie in **73** S. 324, durch Beobachtungen aus zwei Entfernungen ein für allemal ermittelt. So wie dort lenkt man sowohl von Westen wie von Osten ab, jedesmal in zwei Lagen des Magnets. Über die Korrektion wegen des von der Erde inducirten Magnetismus s. ebenda.

Ein leicht transportabler und zu handhabender magnetischer Theodolit ist von Neumayer konstruirt worden. Die Nadel wird mittels Spiegel beobachtet, ist umlegbar, spielt aber auf einer Spitze. Die Fadenaufhängung wird nur bei den Schwingungen des Magnets angewandt.

S. Eschenhagen in Kirchhoff, Anleitung zur deutschen Landes- und Volksforschung S. 118.

Winkelmessung mit der Bussole.

Tab. 39 enthält für die geographischen Längen und Breiten des mittleren Europa die westliche Deklination, d. h. den Winkel, um welchen der Nordpol der Nadel nach Westen abweicht. Die Zahlen aus der Tabelle werden mit den wirklichen im Freien bis auf $^1/_2$ Grad äufserstens übereinstimmen. Hiernach läfst sich eine astronomische Richtung mittels der Magnetnadel mit mäfsiger Genauigkeit festlegen.

Z. B. läfst sich die Richtung einer Wand etc. mittels einer angelegten Bussole mit geradlinig begrenzter Bodenplatte, die einer horizontalen Linie durch Projiciren derselben auf die Teilung einer darauf gestellten Bussole, die einer Visirlinie nach einem fernen Gegenstande oder der Winkel zwischen zwei solchen Linien mittels eines mit der Bussole fest verbundenen Diopters oder Fernrohrs bestimmen.

Den Einflufs der Reibung auf der Spitze verringert man durch geringe Erschütterungen der Bussole vor der Ablesung der Nadel.

Umgekehrt kann man die Deklination bestimmen, wenn die Richtung der Wand oder der Linie etc. bekannt ist.

Bussolen, die in der Tasche getragen werden, hauche man vor dem Gebrauch an, um die häufig vorkommende elektrische Ladung von der Deckplatte zu entfernen.

79. Erdmagnetische Inklination.

Der Winkel, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit der Horizontalen bildet und der in Mitteleuropa 60 bis 70° beträgt (Tab. 40), heifst Inklinationswinkel. Eine Magnetnadel, die im magnetischen Meridian drehbar ist und deren Schwerpunkt in der horizontalen Drehaxe liegt, würde diese Richtung anzeigen.

Das Inklinatorium besteht aus einem vertikalen Teilkreis, der mittels einer gewöhnlichen Bussolennadel in den magnetischen Meridian orientirt wird, und einer Magnetnadel, die sich in ihm dreht. Man liest wegen der Excentricität immer beide

Spitzen der Nadel ab und nimmt aus den Bruchteilen des Grades das Mittel. Wenn man kann, soll man nicht die ruhende Nadel ablesen, sondern die Umkehrpunkte kleiner Schwingungen, aus denen man die Ruhelage wie bei der Wage ableitet; der Einflufs der Reibung ist dann kleiner.

Die Bezifferung der Kreisteilung variirt bei verschiedenen Instrumenten. Wir wollen annehmen, dafs in allen Quadranten die Bezifferung von dem horizontalen Teilstriche als Nullpunkt ausgeht.

Ein Inklinatorium mit feststehendem Kreise wird zuerst nach einem von dem obersten Teilstrich herabhängenden Senkel vertikal gestellt. An einem Instrumente mit drehbarem Kreise soll die Drehaxe vertikal sein, was man daran erkennt, dafs die Blase einer am Instrumente angebrachten Libelle in jeder Stellung des Kreises dieselbe Lage einnimmt (**30a**, 1).

Wegen der unbekannten Lage des Schwerpunktes und der etwaigen Abweichung der magnetischen von der geometrischen Axe ist erstens die Nadel umzulegen (vorn und hinten zu vertauschen) bez. der drehbare Kreis mit der Nadel um 180° zu drehen. Eine etwaige Längsverschiebung des Schwerpunkts gegen die Drehaxe wird hierdurch aber nicht eliminirt. Deswegen ist zweitens die Nadel umzumagnetisiren und wieder in beiden Lagen zu beobachten.

Es werde also beobachtet der Neigungswinkel φ_1 bei irgend einer Auflegung der Nadel, und ψ_1, nachdem die Nadel um ihre magnetische Axe um 180° gedreht ist; oder bei drehbarem Kreise, nachdem letzterer mit der Nadel um 180° gedreht worden ist.

φ_2 und ψ_2 seien entsprechend nach dem Ummagnetisiren die Winkel in den beiden genannten Lagen.

I. Sind die vier Winkel nahe gleich, so ist die Inklination i das arithmetische Mittel

$$i = \tfrac{1}{4}(\varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2).$$

II. Durch seitliches Abschleifen der Nadel vor der Messung läfst sich bewirken, dafs φ_1 und ψ_1, sowie φ_2 und ψ_2 unter sich nahe gleich sind; dann ist

$$\operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \psi_2)].$$

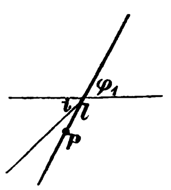
III. Sollten aber auch φ_1 und ψ_1 um einen gröſseren Betrag von einander abweichen, so setze man

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \psi_1)$$
$$\operatorname{cotg} \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \psi_2),$$

und rechne endlich

$$\operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Formel II und III ergeben sich, wenn man die unbekannte Verschiebung des Schwerpunktes in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur magnetischen Axe zerlegt denkt und nun die Bedingungen des Gleichgewichts der magnetischen und der Schwerkräfte aufstellt. Wäre z. B. der Schwerpunkt um die Gröſse l nach dem Nordende verschoben, so ist, wenn wir Gewicht und magn. Moment der Nadel durch p und M bezeichnen, und durch C die ganze Intensität des Erdmagnetismus (**73** und Anh. Nr. 21), $p\,l \cos \varphi_1 = M\,C \sin(\varphi_1 - i)$. Wird ummagnetisirt, so ist ebenso $p\,l \cos \varphi_2 = M\,C \sin(i - \varphi_2)$.



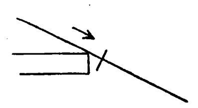
Die kreuzweise Multiplikation beider Gleichungen und die Auflösung der Sinus gibt, wenn durch $\cos i \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$ dividirt wird,

$$\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} i,$$

woraus (II) folgt. Ähnlich III.

Vorausgesetzt wird, daſs der Magnetismus vor und nach dem Umstreichen der Nadel gleich ist, was bei sorgfältig gleichem Streichen einer dünnen Nadel nahe vorausgesetzt werden kann. Immerhin ist anzuraten, daſs die Excentricität des Schwerpunktes nur kleine Differenzen der Einstellung vor und nach dem Ummagnetisiren ergibt.

Streichen der Nadel. Man faſst dieselbe auf der einen Seite in der Nähe ihrer Drehaxe, setzt die andere Seite an den Pol des Magnets und führt die Nadel bis über das Ende an dem Pol entlang, etwa wie in beistehender Figur. So mögen z. B. beide Flächen des einen Endes je zweimal, dann die des anderen je viermal und endlich die des ersteren noch zweimal gestrichen werden.



Vollkommene Vorschriften s. Gauſs Werke, Bd. V, S. 444.
Über Induktionsmethoden vgl. **111**, II.

Elektricität.

80. Allgemeines über galvanische Arbeiten.

I. Gesetze des Zusammenhanges zwischen Stromstärke i, elektromotorischer Kraft oder Spannung E und Widerstand w.

Einheiten.

Die aus den Weber'schen Definitionen des absoluten Maſssystems entnommenen Einheiten sind durch Multiplikation mit einer Potenz von 10 auf eine für den Verkehr passend erachtete Gröſse gebracht worden (vgl. Anh 24, 26 u. 29). Es gelten

für den Widerstand das Ohm	1 Θ = 10^9	[C. G. S]-Einheiten
für die Stromstärke das Ampere	1 A = 10^{-1}	„ „
für die Spannung oder elektromotorische Kraft das Volt	1 V = 10^8	„ „

Wegen der Schwierigkeit der absoluten Messungen ist gesetzlich die Stromeinheit auf das elektrochemische Äquivalent und die Widerstandseinheit auf das Quecksilber folgendermaſsen zurückgeführt (internationale Einheiten):

Die Stärke 1 A hat der konstante Strom, der in der Sekunde 1,118 mg Silber abscheidet.

Den Widerstand 1 Θ hat eine Quecksilbersäule von 1,063 m Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0°. Diese Säule wiegt 14,4521 gr.

Das Ohm ist also = 1,063 Siemens-Einh.

Ferner ist 1 Θ = 1,0136 Brit. Assoc.-Einh.

Endlich ist 1 V die el. Kraft oder Spannung, welche in dem Widerstande 1 Θ den Strom 1 A erzeugt.

Zeitweilig war das Ohm definirt als 1,060 m Hg 0°, „legales Ohm". Es gilt:

Ohm : leg. Ohm : Brit. Ass.-Einh. : Siemens-Einh. = 1,063 : 1,060 : 1,0487 : 1.

Also in internationalen Einheiten ausgedrückt:

1 leg. Ohm = 0,9972; 1 Siem.-E. = 0,9407; 1 Brit. Ass.-E. = 0,9866;
1 leg. Volt = 0,9972.

Die Ohm'schen Gesetze.

1. Der Widerstand eines der Länge nach gleichmäſsig vom Strome durchflossenen Cylinders von der Länge l und dem Querschnitt q ist

$$w = \frac{1}{\varkappa}\frac{l}{q} \quad \text{oder} \quad = \sigma\frac{l}{q}.$$

$1/w$ nennt man wohl das Leitungsvermögen des ganzen Cylinders. $\varkappa$ heifst Leitvermögen (oder specifisches Leitvermögen), $1/\varkappa$ oder σ specifischer Widerstand der Substanz des Leiters.

Tab. 30 und 31 enthalten diese Gröfsen, auf Ohm, cm und qcm bezogen, für gebräuchliche Leiter; für reines Kupfer z. B. $\sigma = 0{,}00000172$ Wird, wie es an einem Drahte gebräuchlich ist, l in m, q in mm² gemessen, so setzt man anstatt σ ein $\sigma' = 10^4 \sigma$. Der Widerstand eines Kupferdrahtes von 1 m Länge und von d mm Durchmesser, oder vom Querschnitte $q = (0{,}5\,d)^2 \cdot \pi = 0{,}785\, d^2$ mm² beträgt also $w = \frac{0{,}0172}{0{,}785 \cdot d^2} = 0{,}022/d^2$ Ω. Ein Meter reinen Kupferdrahts vom Gewicht p gr hat $0{,}15/p$ Ω. — Ein cm-Würfel bestleitender Schwefelsäure, $\varkappa = 0{,}74$, hat bei 18° den Widerstand $1/0{,}74 = 1{,}35$ Ω.

Ausbreitungswiderstand. Geht der Strom aus der ebenen Endfläche eines Kreiscylinders vom Halbmesser r in einen weiten Raum vom specifischen Widerstand σ_1 über, so beträgt der Ausbreitungswiderstand ebensoviel, als wenn man den Cylinder (spec. Widerstand $= \sigma$) selbst um $0{,}80 \cdot r \cdot \sigma_1/\sigma$ verlängerte, also um $0{,}80 \cdot r$, wenn die Ausbreitung in dieselbe Substanz geschieht (Rayleigh; vgl. Maxwell § 309).

Andere Gestalten. Jeder Leiter hat, wenn die Ein- und Austrittsstellen des Stromes gegeben sind, einen bestimmten Widerstand, welcher bei Raum-Erfüllung mit homogener Masse $= \sigma \cdot \gamma$ ist. γ, die Widerstandskapacität des Raumes, hängt von der Gestalt ab, ist also für den longitudinal durchströmten Cylinder $= l/q$. γ ist ferner für einen Konus von der Länge l und den Endhalbmessern r_1 und r_2, wenn der Strom durch die Endflächen gleichmäfsig hindurchfliefst, $= l/(r_1 r_2 \pi)$ oder auch $= \frac{l^2}{v}\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{q_1 - q_2}{q}\right)^2\right]$, wenn v das Volumen, q der mittlere und q_1 und q_2 die wenig verschiedenen Endquerschnitte bedeuten. — Für einen Hohlcylinder von der Länge h und den Halbmessern r_1 und r_2, welcher radial vom Strome durchflossen wird (wie die Flüssigkeit in einem galvanischen Element gewöhnlicher Gestalt) gilt $\gamma = (\log\mathrm{nat}\, r_2 - \log\mathrm{nat}\, r_1)/(2\pi h)$.

2. Der gesamte Widerstand mehrerer Widerstände hinter einander ist gleich ihrer Summe.

3. Die elektromotorische Kraft einer konstanten Kette ist gleich der Potentialdifferenz oder der Spannung ihrer Pole im offenen Zustande. Die gesamte el. Kraft eines Stromkreises ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen el. Kräfte. Ist eine konstante Kette von der el. Kraft E und dem inneren Widerstande w_0 durch einen äufseren Widerstand w_1 geschlossen, so beträgt die Pol- oder Klemmspannung

$$E \cdot w_1/(w_0 + w_1).$$

4. Die Stromstärke i in einem Schliefsungskreise ist gleich der el. Kraft E geteilt durch den Widerstand w; $i = E/w$.

Die Gleichung $i = E/w$ oder $E = iw$ gilt auch für einen Stromleiter vom Widerstande w, wenn er selbst keine el. Kraft enthält, in dem Sinne, dafs E die Potential- oder Spannungs-Differenz der beiden Endpunkte

von w bedeutet; vgl. z. B. den Beweis der Wheatstone'schen Gleichung in **93**. Man drückt dies auch so aus: Der Spannungs-Verbrauch oder -Verlust durch den Strom i im Widerstand w beträgt iw.

Stromverzweigung.

Verzweigt sich ein Strom J in mehrere Wege vom Widerstande w_1, $w_2 \cdots$ und sind die Zweigströme entsprechend i_1, $i_2 \cdots$, so gelten die Sätze 5, 6 und 7.

5. Die Summe der Zweigströme ist gleich dem unverzweigten Strom:
$$i_1 + i_2 + \cdots = J.$$

6. Die einzelnen Zweigströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände der resp. Wege (oder direkt wie die Leitungsvermögen derselben):
$$i_1 : i_2 : \cdots = 1/w_1 : 1/w_2 : \cdots$$

7. Das gesamte Leitungsvermögen des verzweigten Weges ist gleich der Summe der Leitungsvermögen der einzelnen Wege, also gleich $1/w_1 + 1/w_2 + \cdots$ Zwei Widerstände w_1 und w_2 nebeneinander stellen also zusammen einen Weg dar vom Widerstande $w_1 w_2/(w_1 + w_2)$.

Bei Strömen von veränderlicher Stärke treten noch Selbstinduktion und Kapacität der Leiter herein; vgl. **120**.

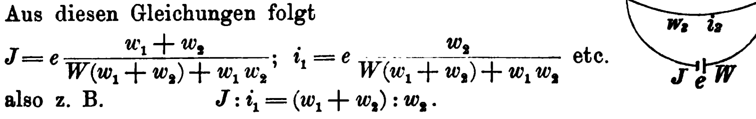
Kirchhoff'sche Regeln.

Die Sätze 2) bis 7) sind in folgenden zweien enthalten:

A. An jedem Verzweigungspunkte ist die Summe der Stromstärken gleich Null, wenn man den ankommenden Strömen das entgegengesetzte Vorzeichen gibt wie den abfliefsenden.

B. Betrachtet man einen beliebigen in sich geschlossenen Teil der Leitung, nennt die darin vorhandenen el. Kräfte und Ströme der einen Richtung positiv, die der anderen negativ, so ist die Summe der Produkte aus den einzelnen Widerständen und den zugehörigen Stromstärken gleich der Summe der el. Kräfte.

1. Beispiel. Einfache Stromverzweigung. Es ist
nach A $\quad i_1 + i_2 = J,$
nach B $\quad i_1 w_1 - i_2 w_2 = 0$ und $JW + i_1 w_1 = e.$
Aus diesen Gleichungen folgt



$$J = e\frac{w_1 + w_2}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2}; \quad i_1 = e\frac{w_2}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2} \text{ etc.}$$

also z. B. $\quad J : i_1 = (w_1 + w_2) : w_2.$

2. Beispiel. Wheatstone'sche Schaltung; Zweigströme und Widerstände den Zahlen entsprechend benannt.

$$J - i_1 - i_2 = 0 \qquad JW + i_1 w_1 + i_3 w_3 = e$$
$$i + i_2 - i_4 = 0 \qquad iw - i_2 w_2 + i_1 w_1 = 0$$
$$i + i_3 - i_1 = 0 \qquad iw + i_4 w_4 - i_3 w_3 = 0$$

3 1 i w 4 2 J e W

wonach z. B., wenn der Brückenstrom $i = 0$ ist:
$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4.$$

II. Strom-Erreger.

Amalgamiren des Zinks. Man gibt dem Zink mechanisch und in verdünnter Schwefelsäure oder wirksamer Salzsäure eine metallische Oberfläche und reibt Quecksilber ein oder taucht es in eine Lösung von Quecksilber-Chlorid oder Nitrat. Nach dem Gebrauch sollen die Zinke alsbald gebürstet und gespült werden.

Kohlen. Manche Kohlen verringern bei längerem Gebrauch ihre Wirksamkeit. Man muſs sie durch Abfeilen oder Erhitzen zu reinigen suchen.

Thonzellen. Auswittern von Salzen schädigt die Zellen rasch. Gebrauchte Zellen legt man nach oberflächlichem Abspülen und Durchfiltriren in Wasser. Bei dem Ansetzen eines Elementes soll die Zelle zuerst nicht mit Kupferlösung oder Salpetersäure, sondern mit Schwefelsäure befeuchtet werden. Man fülle die Schwefelsäure zu einer um $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ höheren Säule ein, um das Durchdringen der anderen, schwereren Flüssigkeiten zum Zink zu erschweren.

Platinmohr. Über das Überziehen von Platin oder Silber mit Platinschwarz s. 8, 18.

Gebräuchliche Flüssigkeiten.

Schwefelsäure. Für Elemente mit Zink spec. Gewicht höchstens = 1,06, d. h. etwa 50 $cm^3 H_2SO_4$ auf 1 l Wasser. Für schwache Ströme genügt meistens eine weit schwächere Säure. Wegen der Erhitzung gieſst man die Säure langsam und unter Umrühren in das Wasser. Es ist darauf zu achten, daſs die Säure durchaus kein Kupfer, auch keine Salpetersäure enthält. Reine Schwefelsäure anzuwenden, ist daher geraten; für Akkumulatoren nur reine (nicht in Platin eingedampfte) Säure, die von den Akkumulatorenfabriken bezogen werden kann. Es soll das spec. Gew. im geladenen Zustande etwa 1,16, im ungeladenen 1,13 betragen. Bei dem Nachfüllen wird im allgemeinen 5 % Säure geeignet sein.

Kupfervitriol-Lösung. Dieselbe darf gesättigt sein (spec. Gewicht gegen 1,2; etwa 1 Teil krystallisirtes Salz auf 3 Teile Wasser). In der ersten Zeit pflegt die el. Kraft etwas zu wachsen. Der Strom verbraucht die Lösung, wodurch die Säule inkonstant wird.

Salpetersäure. Dieselbe wird für stärkere Ströme „koncentrirt“ angewandt (spec. Gewicht 1,3 bis 1,4).

Chromsäure. Recept nach Bunsen: 92 gr pulverisirtes Kaliumbichromat oder besser 81 gr Natriumbichromat (K_2- bez. $Na_2Cr_2O_7$) werden mit 94 ccm H_2SO_4 zu einem gleichförmigen Brei zusammengerieben. Ehe dieser erstarrt, setzt man 900 ccm Wasser zu und rührt, bis alles gelöst ist. Soll das Zink längere Zeit in der Flüssigkeit stehen, so ist diese Flüssigkeit mit Wasser zu verdünnen.

Elemente.

Daniell. Zn, H_2SO_4, $CuSO_4$, Cu. Elemente, die an einem kühlen Orte lange stehen können, verfertigt man aus Cylindergläsern mit Kupfervitriolkrystallen und Bleiplatte mit Guttaperchadraht am Boden; darüber ganz verdünnte Schwefelsäure und eine Zinkscheibe eingehängt.

Gewöhnliche Daniell-Elemente haben 1,08 bis 1,12 V. Stärkere Säure erhöht die Kraft; stärkere Kupferlösung kann bei schwachem Strome eine Verminderung bewirken. Nach Kittler gibt reines amalgamirtes Zink, verdünnte Schwefelsäure von 1,075 spec. Gewicht oder 11% H_2SO_4, koncentrirte Kupfersulfatlösung von 1,20 spec. Gewicht, reines Kupfer, welches letztere vom Strome selbst gebildet wird, 1,18 V. Die Temperatur hat geringen Einfluſs. Nach der Zusammensetzung pflegt die el. Kraft in der ersten Zeit etwas kleiner zu sein. Widerstand der gebräuchlichen Gröſsen etwa 0,6 bis 0,3 Θ.

Bunsen oder Grove. Zn, H_2SO_4, HNO_3, C oder Pt. El. Kraft im guten Zustande etwa = 1,9 V, bei starkem Strome oder schwächerer Salpetersäure geringer. Widerstand gebräuchlicher Gröſsen etwa = 0,2 bis 0,1 Θ.

Chromsäure-Element. Zn, H_2CrO_4, C. El. Kraft bei nicht zu starkem Strome = 2,0 V. Starke Ströme von langer Dauer darf man von der Chromsäure-Batterie nicht verlangen. Ist die Flüssigkeit durch den Gebrauch ganz dunkel geworden oder hat sich gar Chromalaun ausgeschieden, so sind die Elemente geschwächt und inkonstant.

Etwas kostspieliger, aber angenehmer, weil feste Ausscheidungen wegfallen, ist eine wässrige Lösung von Chromsäure mit etwas Schwefelsäure.

Für schwache Ströme von groſser el. Kraft sind die in der Medicin gebräuchlichen Spamer'schen Trogapparate mit Chromsäure zweckmäſsig.

Braunstein-Element. Zn, Lösung von NH_4Cl, zerkleinerter Braunstein, Kohle. Spannung stromlos etwa $1\frac{1}{2}$ V. Mit Strom „inkonstant", d. h. die el. Kraft nimmt mit wachsender Stromstärke ab.

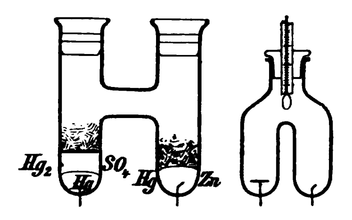
Smee. Zn, H_2SO_4, Pt oder Silber mit Platinmohr überzogen. Spannung stromlos etwa $\frac{5}{4}$ V, mit Strom bis 0,6 V abwärts, je nach der Stromdichte.

Normalelemente.

Die folgenden Elemente sind nicht zur Stromerzeugung bestimmt, sondern vermöge ihrer — wenn sie vorschriftsmäſsig zusammengesetzt sind — wegen des flüssigen Zustandes der Pole gut definirten Spannung, zum Messen anderer Spannungen sowie zu Strommessungen nach der Kompensationsmethode. — Ohne Veränderung transportabele Elemente werden von der P.-T. Reichsanstalt geprüft und beglaubigt.

Eine zusammenfassende Behandlung s. W. Jaeger, ZS. f. Instr. 1900, 338; Centralbl. für Akkum.- u. Elementenkunde 1900, 1 etc.

Clark-Element. Reines Quecksilber, Hg_2SO_4 (Oxydul!), $ZnSO_4$, reines Zink oder Zink-Amalgam aus 90 Teilen reinen Quecksilbers und 10 Teilen reinen Zinks. Das bei gewöhnlicher Temperatur feste Amalgam wird heiſs eingefüllt. Die Verbindung geschieht durch Platin-Drähte, welche durch Glasröhren von oben, oder durch das Glas geschmolzen von unten eingeführt sind. Das Quecksilber oder Amalgam muſs das Platin ganz überdecken.



Am gebräuchlichsten ist die H-Form (Lord Rayleigh; Fig. Daneben eine abgeänderte Form mit Glasstöpselverschluſs). Das Quecksilber wird mit einer Paste aus Hg_2SO_4, Hg und reinen $ZnSO_4$-Krystallen bedeckt, die, vorher mit gesättigter $ZnSO_4$-Lösung zu einem schwer flüssigen Brei angefeuchtet, zusammengerieben sind. Amalgam und Paste füllt man ohne Benetzung der Wandung ein. Eine gesättigte Lösung von $ZnSO_4$ bedeckt das Ganze. Auf die Flüssigkeit wird heiſses Paraffin gegossen, nach dem Erkalten eine Korkscheibe aufgesetzt, dann mit Marineleim oder heiſs mit gutem Siegellack gedichtet. — Das käufliche reine Zinksulfat wird in Lösung mit metallischem Zink gekocht, bis sich Zinkhydrat abscheidet; dann filtrirt. Zum Zwecke der Versendungsfähigkeit wird amalgamirtes Platin anstatt Quecksilber genommen und die zweite Form, nach Aufbringen von $ZnSO_4$-Krystallen auf das Amalgam, mit der Paste ganz gefüllt.

Siehe u. a. Kahle, Wied. Ann. 51, 174 u. 203. 1894; Jaeger u. Kahle, ib. 65, 926. 1898; Kleine Elemente für elektrometrische Ladungen s. Quincke.

El. Kraft zwischen 0° und 30° bei der Temp. t^0 C gleich

$$1{,}4292 - 0{,}00123(t-18) - 0{,}000007(t-18)^2 \text{ V}.$$

Gröſste zulässige Stromstärke ohne Polarisation bei gebräuchlichen Gröſsen vielleicht $^1/_{20000}$ A. Nach Überanstrengung erholt das Element sich sehr langsam. Nach Erwärmungen über 39° kann eine Änderung der Spannung eintreten, die sich unter Umständen nur durch Einbringen normaler $ZnSO_4$-Krystalle mit der Zeit verliert.

Cadmium-Element (Weston). Wie das vorige, nur Cd und $CdSO_4$ anstatt Zn und $ZnSO_4$. Sein Vorteil besteht in einem viel kleineren Temperatureinfluſs. Das Amalgam enthält 10 bis 13 gr Cd auf 90 bis 87 gr Hg.

Man hat zu unterscheiden zwischen Elementen mit stets gesättigter und andrerseits mit konstanter, bei 4° gesättigter $CdSO_4$-Lösung. Die letzteren, von der Weston-Gesellschaft ausgegebenen Elemente haben, von der Temperatur so gut wie unabhängig 1,0190 V. Die gesättigten haben zwischen 10° und 30°

$$1{,}0187 - 0{,}000035(t-18) - 0{,}00000065(t-18)^2 \text{ V}.$$

Zu beachten ist, daſs stärkere als 13procentige Amalgame durch allmähliche Zustandsänderung die el. Kraft ändern können.

Über die umfangreiche neuere Literatur vgl. Jaeger l. c.; aufserdem Jaeger u. Lindeck, Ann. d. Physik, Band 5, S. 1. 1901; ZS. f. Instr. 1901, 33 u. 65.

Temperatur-Tabelle für Clark- und gesättigte Cadmium-Elemente.

	0°	5	10	15	16	17	18	19	20	25°
Clark	1,4491	,4440	,4386	,4328	,4316	,4304	,4292	,4279	,4267	,4202
Cd, gesätt.	1,0191	,0190	,0189	,0188	,0187	,0187	,0187	,0186	,0186	,0184

Kalomel-Element von Helmholtz. Zn, 5 bis 10% $ZnCl_2$-lösung, fein gepulverter Kalomel, Quecksilber. Dasselbe gibt schwache Ströme lange Zeit hindurch sehr konstant. Mit $ZnCl_2$-Lösung vom sp. Gew. 1,4 gibt es ungefähr 1 V.

Akkumulatoren. Deren Wirkung beruht auf der Umwandlung des auf den Platten befindlichen $PbSO_4$, durch den ladenden Strom einerseits in metallisches Blei, andrerseits in Bleisuperoxyd (PbO_2), wobei Schwefelsäure abgegeben wird. Bei der Entladung wird beiderseitig $PbSO_4$ zurückgebildet, so dafs sich die Säurelösung durch das Laden verstärkt und umgekehrt. Die Säure soll die Platten stets gut 1 cm überdecken. Die Ladung ist thunlichst immer bis zur Gasbildung fortzusetzen. Stehen die Elemente ungebraucht, so soll man alle 14 Tage wieder bis zur Gasbildung aufladen. Sehr rasche Entladung oder Verbrauch der Ladung bis zur Abnahme der Wirkung ist zu vermeiden. Stark beanspruchte Elemente sind jedenfalls alsbald wieder aufzuladen. El. Kraft mit Säure von 1,15 sp. Gewicht beim Gebrauch mit schwachem Strom = 2,0 bis 2,02 V; beim Laden bis 2,6 V. Widerstand und Temperaturkoefficient meist sehr klein. Elemente mit innerem Kurzschlufs (welche durch die Ladung z. B. warm werden und dieselbe rasch verlieren) sind zu entleeren. Abnorm grofse Spannung eines Elementes während des Ladens weist auf einen Fehler hin, der den inneren Widerstand vergröfsert hat, meist durch Bildung einer dichten Bleisulfatschicht.

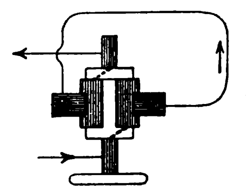
Auch andauerndes ungebrauchtes Stehen kann die Kapacität beeinträchtigen; diese pflegt sich dann aber durch den Gebrauch wieder zu heben.

Die Kapacität kann bei einer Flächengröfse von $f\,dm^2$ des positiven Pols bis $4 \times f$ Amperestunden betragen.

Vgl. z. B. Dolezalek, Theorie des Bleiakkumulators, 1901.

Dynamomaschine. Maschinenströme sind häufig wegen der Schwankungen eines Gasmotors inkonstant; die Vergröfserung des Trägheitsmomentes durch eine Schwungscheibe ist nützlich. Sehr konstant kann der Strom werden, wenn man Akkumulatoren in passender Anzahl gleichgerichtet neben die Maschine schaltet. Für physikalische Zwecke eignen sich Gleichspannungs-Maschinen am meisten. Man soll die Maschine so wählen, dafs Akkumulatoren ohne direkte Windungen, also mit reiner Nebenschlufsmaschine geladen werden können. Vgl. noch **119**.

bequem, wenn sie (vermöge einer Stellfeder) auch zum Unterbrechen dienen kann.



Bei dem Cylinderkommutator wird z. B. an die Axen die Stromquelle angelegt und an die auf den metallenen Halbcylindern schleifenden Federn die Schliefsung. Jeder Halbcylinder ist mit einer Halbaxe leitend verbunden. Umdrehen um 180° kommutirt den Strom. Dieser Schlüssel ist ohne schleifende Federn an den Axen unzuverlässig.

IV. Rheostaten-Widerstände.

Für die Wahl des Materials ist mafsgebend die Haltbarkeit, ein geringer Einflufs der Temperatur, endlich im allgemeinen noch ein grofser spec. Widerstand; siehe hierüber Tab. 30. Angewandt werden gegenwärtig meistens „Konstantan" (60 Cu, 40 Ni), auch wohl unter der Bezeichnung „Patentnickel" die Legirung der Nickelmünzen (75 Cu, 25 Ni) und besonders „Manganin" (84 Cu, 12 Mn, 4 Ni). Letzteres wird gegen Oxydation durch Schellack etc. geschützt. Es hat den Vorteil, dafs seine thermoel. Kraft gegen Kupfer klein ist. — Feufsner u. Lindeck, wissensch. Abh. d. Reichsanstalt 2, 501. 1895; ZS. f. Instr. 1895, 394 u. 425.

Neue Drähte erleiden anfangs eine merkliche Widerstandsänderung. Auch das Aufwinden beeinflufst den Betrag des Widerstandes. Längeres Erwärmen auf etwa 130° befördert das Konstantwerden.

Bifilare Wickelung der Rollen. Gewöhnliche Rollen leiden stark an Selbstinduktion und magnetischer Wirkung nach aufsen. Beides wird vollkommen dadurch vermieden, dafs der Strom benachbarte Windungen paarweise entgegengesetzt durchfliefst. Zu dem Zweck knickt man den Draht in der Mitte und wickelt von hier aus beide Hälften miteinander auf; oder man windet zwei Drähte miteinander auf und verlötet ihre Enden geeignet. Solche Rollen unterliegen aber den, besonders bei grofsen Widerständen auftretenden Störungen durch Ladungskapacität.

Unifilar abwechselnde Wickelung (Chaperon). Man wickelt kurze Lagen und kehrt nach jeder Lage die Windungsrichtung um, so dafs auch hier in der fertigen Rolle der Strom ebensoviele Windungen in der einen wie in der anderen Richtung durchfliefst. Dann ist sowohl die Selbstinduktion wie die Kapacität klein. Rollen von 500 Θ aufwärts sollen in besseren Rheostaten so gewickelt sein.

Kleine Widerstände stellt man oft zweckmäfsig durch Nebeneinanderschaltung gröfserer her.

Kleine Abänderungen eines Widerstandes w werden am einfachsten durch Nebenschaltung eines grofsen Widerstandes R bewirkt. Dadurch nämlich entsteht der Gesamtwiderstand $w \cdot R/(R+w)$ oder nahe $w(1-w/R)$.

Widerstandssätze (Rheostaten). Für messende Zwecke sind die Sätze 1 2 3 4 oder 1 2 2 5 in jeder Dekade am gebräuchlichsten. Zum Zwecke der Fehlerbestimmung (**95**) soll der kleinste Widerstand doppelt vorhanden sein. — 10 gleiche Widerstände w, die man beliebig neben und hinter einander schalten kann, geben eine Auswahl von 94 verschiedenen Widerständen zwischen $10w$ und $w/10$.

Die an älteren Rheostaten vorkommende Verbindung von Nachbarrollen durch gemeinsame Zuführungen zu den Klötzen bedingt Fehler.

Stöpsel sind nur am Griffe anzufassen und vor Verletzung ihres Konus zu hüten. Sie werden mit etwas Drehung mäſsig fest eingesetzt, häufig mit Leinwand und etwas Petroleum abgewischt und äuſserstenfalls, aber ganz selten, mit feinstem Schmirgelpapier abgerieben. Der Widerstand eines guten Stöpsels bleibt bei richtiger Behandlung unter $\frac{1}{10000}$ Θ und läſst sich durch Sorgfalt auf $\frac{1}{20000}$ vermindern. Dicke Stöpsel sind unbequemer, als die von alter Form (W. Siemens), lockern sich durch die Benutzung ihrer Nachbarn leichter und bieten bei gewöhnlichen Stromstärken durchaus keinen Vorteil. — Temperatursteigerung lockert die Stöpsel. Bei längerem Nichtgebrauch lockere man sie absichtlich. — Vorteilhaft ist, wenn man jede Dekade für sich gebrauchen kann. — Kurbelrheostaten haben je 10 gleiche Stücke zwischen Knöpfen, auf denen Kurbelkontakte gleiten. Der Strom tritt am Knopfe Null ein und durch die Kurbel aus; vgl. z. B. Fig. zu **103**. Die Gleitkontakte sind mit ein wenig feinem Öl zu versehen. — Auf Axenkontakte ist kein Verlaſs.

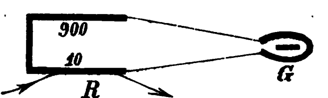
Rheostaten sollen ventilirbar und für Thermometer zugänglich sein.

Stromwärme. In w Θ entwickeln i A 0,24$\cdot w\cdot i^2$ gr-Kalor./sec. (Anh. 30). Drähte von d mm Durchmesser würden ohne Wärmeabgabe sich durch i A etwa erwärmen um $0{,}4\cdot\sigma'/(cs)\cdot i^2/d^4$ Grad/sec (σ', c, s gleich spec. Widerstand, Wärme, Gewicht); also Kupfer um $0{,}008\,i^2/d^4$, Eisen um $0{,}06\,i^2/d^4$, Konstantan, Manganin, gutes Neusilber etwa um $0{,}15\,i^2/d^4$ Grad/sec.

Starkstrom-Widerstände werden frei durch die Luft oder durch ein Öl-, z. B. Petroleum-Bad geführt. Wellbleche und netz- oder siebförmige Leiter sind wegen rascher Wärmeabgabe bei kleinen Dimensionen zweckmäſsig. — Die Erwärmung τ frei gespannter blanker Drähte oder Bleche vom Querschnitt q mm² und dem Umfang u mm durch den Dauerstrom i A läſst sich schätzen nach der Formel $\tau = i^2\cdot C/(qu)$, wenn man für C einsetzt: bei Cu 0,35, Fe 2, Neusilber 6, Konstantan oder Manganin 10. — Soll also z. B. ein Konstantanblech von 0,5 mm Dicke sich durch den Strom i A nicht über 20° erwärmen, so ist seine Breite x in mm bestimmt durch $20 = i^2\cdot 10/[0{,}5\cdot x\cdot 2(x+0{,}5)]$, oder wenn 0,5 in $x+0{,}5$ vernachlässigt wird, durch $20 = i^2\cdot 10/(0{,}5\cdot 2\cdot x^2)$, woraus $x = i/\sqrt{2} = i/1{,}4$; für $i = 50$ A z. B. 36 mm breites Blech. Ausführlichere Angaben bei Ayrton u. Kilgour, Phil. Trans. 183 A, 376. 1892.

Abzweigungen. Die häufig vorkommende Aufgabe, Ströme zu verzweigen, läſst sich meistens mit einem Rheostaten erfüllen, indem

man die Ströme in denselben teilweise an den geeigneten Metallklötzen einführt. Es sollen deswegen Vorkehrungen zu diesem Zweck vorhanden sein; nützlich sind zum mindesten einige Stöpsel mit Klemmschrauben. Die Figur zeigt, wie man mit einem gewöhnlichen Rheostaten an eine Galvanometerleitung, unter Einschaltung eines Widerstandes (z. B. 900 Ω) in diese, eine Nebenschliefsung (z. B. 10 Ω) anlegt. Die Pfeile bezeichnen den Hauptstrom. — Wenn die einzelnen Dekaden durch überzählige Stöpsellöcher getrennt sind, so ist z. B. mittels eines Rheostaten möglich, in einen Stromkreis einen Widerstand einzuschalten, von einem Teile des Hauptweges eine Leitung abzuzweigen und in die letztere auch noch einen Widerstand einzuschalten.



V. Wirksamkeit der Säulen und Multiplikatoren.

Für starke Ströme in kleinen Widerständen sind vorzugsweise Gröfse und geringer Abstand der Metallplatten in den Elementen, sowie Leitvermögen und Koncentration der Kupferlösung oder der Salpetersäure mafsgebend. Für Ströme in Leitungen von grofsem Widerstande kommen diese Umstände weniger in Betracht, als die Anzahl der hinter einander verbundenen Becher.

Mehrere konstante Elemente hat man, um die gröfste Stromstärke in einer gegebenen äufseren Leitung zu erzielen, so neben oder hinter einander zu verbinden, dafs der innere Widerstand dem äufseren nahe kommt. Wegen der Polarisation ist es praktisch meist besser, den inneren Widerstand etwas kleiner zu wählen. — Der Widerstand von n Elementen oder Gruppen neben einander ist n^2 mal kleiner als von allen hinter einander.

Wasserzersetzung verlangt mindestens 2 Akkumulatoren, Bunsen- oder Grove'sche oder 3 Daniell'sche Becher.

Als Drahtstärke bei der Herstellung von Multiplikatoren (oder Elektromagneten) von gegebener Gestalt ist im allgemeinen die Stärke zu wählen, welche den Widerstand des Multiplikators dem übrigen Widerstande ungefähr gleich macht. Nach demselben Gesichtspunkte hat man auch die auf den Multiplikatoren oft zur Verfügung stehenden verschiedenen Windungslagen hinter oder neben einander zu verbinden, wenn die gröfstmögliche Empfindlichkeit verlangt wird. — Über „Normalempfindlichkeit" eines Galvanometers vgl. 88.

Näheres über Konstruktionen, Methoden oder Theorie wird man vielfach in den Werken finden: Wiedemann, Elektricität, 4. Aufl. 1893 bis 1898; Maxwell, Electricity and Magnetism, deutsch v. Weinstein; Mascart et Joubert, l'Electricité et le Magnétisme, deutsch v. Levy.

Messungen in vollständigerer Aufzählung und Darstellung bei Heydweiller, Hilfsbuch für elektrische Messungen, Leipz. 1892.

Über Methoden für technische Zwecke siehe u. A. Kittler, Hdb. d. Elektrotechnik, 2. Aufl. Stuttgart 1892; Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker; besonders auch Strecker, Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik 6. Aufl. Berlin 1900. — Wechselströme betr. s. Feldmann, Wechselstromtransformatoren; Kapp, Transformatoren; derselbe, Dynamomaschinen; Heinke, Wechselstrommessungen etc. S. auch die Literatur in **119—122**.

81. Absolute Messung der Stromstärke, W. Weber 1840. Tangentenbussole, Pouillet 1837.

Der Messung einer elektrischen Stromstärke legt man entweder die ursprüngliche Weber'sche Definition zu Grunde (vgl. Anh. 24):

Der Strom 1[C.G.S] übt die Einheit der magnetischen Wirkung aus und: der Strom 1 A ist der 10te Teil des Stromes 1[C.G.S].

Oder: der Strom 1 A scheidet in 1 sec die Silbermenge 1,118 mg ab;

oder: der Strom 1 A entsteht durch die elektromotorische Kraft 1 V im Widerstande 1 Ω.

Den beiden letzteren Definitionen entspricht der Gebrauch des Voltameters oder des Normalelements. Zur ersteren gehört die, den Ausgangspunkt absoluter Strommessung bildende Tangentenbussole, ein weiter kreisförmiger Stromleiter um eine kurze Magnetnadel.

Die ersten folgenden Bemerkungen beziehen sich allgemein auf Galvanometrie.

Zuleitungen. Es ist zu beachten, daſs auch äuſsere Leitungen auf das Galvanometer wirken können. Zu- und Ableitdrähte werden, wo dies vermieden werden muſs, dicht neben einander oder um einander geführt.

Kommutator. Ist die Windungsebene ungenau orientirt, so werden insbesondere groſse Ausschläge nach der einen Seite zu groſs, nach der anderen zu klein. (Man erkennt hieran die richtige Aufstellung oft besser, als an der Einstellung auf den Nullpunkt, welche bei einer kurzen Nadel unzuverlässig ist.) Das Mittel aus beiden liefert den richtigen Ausschlag. Man schaltet also einen Kommutator (**80** III) ein, welcher die Stromrichtung im Multiplikator umkehrt, ohne in der übrigen Leitung etwas zu verändern. Hiermit ist zugleich eine erhöhte Genauigkeit verbunden. Ein gut eingerichteter Kommutator dient ferner zum bequemen Schlieſsen und Öffnen des Stromes.

Zum Beruhigen der Nadel kann ein kleiner Magnet dienen, welcher nach dem Gebrauch hinreichend entfernt wird, oder auch der Kommutator selbst. Bei dem Umkehren des Stromes unterbricht man zunächst nur und schlieſst erst wieder, wann die Nadel auf der anderen Seite umkehrt.

Ablesung. Bequem sind zwei zu der Nadelaxe senkrechte Zeiger. Behufs genauer Messung werden jedesmal beide einander gegenüberliegende Spitzen abgelesen. Vgl. S. 322. Zur Vermeidung der Parallaxe legt man auf die Bussole ein Stückchen Spiegelglas.

Über Spiegelablesung s. **25**.

Die Windungsebene soll im magnetischen Meridian stehen, d. h. mit der nicht abgelenkten Nadel zusammenfallen.

Eine Tangentenbussole mit n kreisförmigen Windungen vom mittleren Halbmesser R cm an einem Orte von der magnetischen Horizontal-Intensität H (**73**; Tab. 38) ergibt aus ihrem Ablenkungswinkel α die Stromstärke in Weber'scher Einheit

$$i = \frac{RH}{2n\pi} \cdot \operatorname{tg}\alpha = C \cdot \operatorname{tg}\alpha \;[\mathrm{C.G.S}].$$

$C = RH/(2n\pi)$ ist der Reduktionsfaktor auf elektromagnetische [C.G.S]-Einheiten. $\operatorname{tg}\alpha$ siehe in Tab. 54; log tg in Bremiker's fünfstelligen Tafeln. Über Korrektionen vgl. folg. S.

Beweis. Der Strom i durchfliefst die Länge $n \cdot 2R\pi$ im Abstande R von der kurzen Nadel M. Er sucht letztere senkrecht zur Windungsebene zu stellen und übt, wenn sie um den Winkel α abgelenkt ist, das Drehmoment $i \cdot 2nR\pi/R^2 \cdot M\cos\alpha = i \cdot 2n\pi/R \cdot M\cos\alpha$ aus. Das erdmagnetische rücktreibende Drehmoment beträgt $HM\sin\alpha$; vgl. Anh. **24** u. **21**. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke entsteht die Formel.

Da der Strom 1 Ampere der 10te Teil von 1 [C.G.S] ist, so wird der Reduktionsfaktor der Tangentenbussole auf Ampere, wenn man R und H in [cm, gr, sec] gemessen hat,

$$C_A = 5\frac{RH}{n\pi}.$$

Fadentorsion. Hängt die Nadel am Faden vom Torsionsverhältnis Θ (**77**), so ist $H(1+\Theta)$ statt H zu setzen.

Bestimmung von R. Man mifst den Durchmesser direkt mit Mafsstab, Zirkel, Bandmafs oder Komparator, oder bestimmt den Radius aus der Länge l des Drahtes, welcher die n Windungen bildet, als $R = l/(2n\pi)$. Dünnere Drähte mifst und wickelt man unter derselben Spannung.

Intensität des Erdmagnetismus. Der Reduktionsfaktor ist durch den Erdmagnetismus nach Ort und Zeit veränderlich. Wo H nicht bestimmt worden ist, kann man es angenähert aus Tab. 38 entnehmen; selbstverständlich unter dem Vorbehalt der Vermeidung von magnetischen Lokaleinflüssen, insbesondere auch durch längere Eisenmassen. Nach **75** kann man das Zimmer auf Konstanz von H prüfen, sowie auch Beobachtungsorte mit einem Platz im Freien etc. vergleichen.

Beispiel. Ein 1948,0 cm langer Draht ist in 24 kreisförmigen Windungen aufgewunden. Dann ist $R = 1948/(48 \cdot 3{,}1416) = 12{,}92$ cm. Ferner

war H (für 51,5° geogr. Breite und 9,9° geogr. Länge; Tab. 38) gleich 0,1909, so ist die Stärke eines Stromes, welcher den Ablenkungswinkel α hervorbringt, nach elektromagnetischem Mafse

$$= \frac{12{,}92 \cdot 0{,}1909}{2 \cdot 24 \cdot 3{,}1416} \operatorname{tg}\alpha = 0{,}01636 \cdot \operatorname{tg}\alpha \, [\text{C.G.S}], \quad \text{oder } = 0{,}1636 \cdot \operatorname{tg}\alpha \text{ A}.$$

Günstigster Ausschlag. Ein Fehler von 0,1° bewirkt (vgl. S. 6)

bei einem Ausschlag von	5	10	15	20	30	40°
	85	80	75	70	60	50°
einen Fehler im Resultat von	2	1	0,7	0,55	0,4	0,35%.

Also sind sowohl sehr kleine wie sehr grofse Ausschläge der Genauigkeit nachteilig. Für 30 cm Weite sind für Ströme $= i$ A etwa $n = 5/i$ Windungen zweckmäfsig. — Für sehr verschiedene Stromstärken mufs man verschieden empfindliche Tangentenbussolen mit Windungen von ungleicher Weite oder Anzahl anwenden. Oder die Windungen sind so angeordnet, dafs man eine gröfsere oder eine geringere Anzahl einschalten kann. Sind mehrere Drähte mit einander aufgewunden und so angeordnet, dafs alle Windungen hinter einander oder in n Gruppen neben einander geschaltet werden können, so ist der Reduktionsfaktor im letzteren Falle $n$mal gröfser als im ersteren. — Empirisch werden zwei Instrumente auf einander reducirt, indem man an beiden den Ausschlag mifst, welchen ein und derselbe Strom hervorbringt. Ist der Ausschlag $= \alpha_1$ am Instrument I und $= \alpha_2$ an II, so sind die Tangenten der Winkel an I mit $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1$ zu multipliciren, um sie mit den an II gemessenen vergleichbar zu machen. Windungslagen desselben Instrumentes vergleicht man nach S. 384, e.

Man hat Tangentenbussolen mit Multiplikatoren versehen, welche man neigen kann; dann vergröfsert man C im Verhältnis des reciproken Cosinus des Neigungswinkels (Obach).

Korrektion wegen des Querschnittes der Windungen und der Nadellänge. 1. Wenn die Dimensionen des Querschnittes der Windungslage nicht klein gegen den mittleren Halbmesser R der Windungen sind, so ist die vorige Formel nicht genau. Bildet der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Dicke h, so kann man die davon herrührende Korrektion erster Ordnung durch Multiplikation von C mit $1 + \frac{1}{8} b^2/R^2 - \frac{1}{12} h^2/R^2$ anbringen.

2. Für nicht sehr kurze Nadeln kommt erstens zu obigem Ausdruck noch der Faktor $(1 - \frac{3}{16} \mathfrak{l}^2/R^2)$ hinzu. Zweitens ist anstatt $\operatorname{tg}\alpha$ zu setzen $(1 + \frac{15}{16}(\mathfrak{l}^2/R^2)\sin^2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$. $\mathfrak{l}$ bedeutet den Polabstand der Magnetnadel, d. h. bei gestreckten Nadeln etwa $^5/_6$ der geometrischen Länge (72b und Anh. 20).

Die vollständige Formel wird also unter Berücksichtigung der Kleinheit der Korrektionsglieder (vgl. Pogg. Ann. 141, 457. 1870):

$$i = \frac{RH}{2n\pi}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{b^2}{R^2} - \frac{1}{12}\frac{h^2}{R^2} - \frac{3}{16}\frac{\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)\left(1 + \frac{15}{16}\frac{\mathfrak{l}^2}{R^2}\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Die von der Nadellänge herrührenden Korrektionen heben sich für $\alpha = 27^0$ auf. Eine Nadellänge $l = \frac{1}{6} R$ gibt noch Abweichungen vom Tangentengesetz bis zu $1\%_0$.

Tangentenbussole mit einem kreisförmigen Reif von rechteckigem Querschnitt. R bedeutet das Mittel aus dem inneren und äufseren Halbmesser, h die Dicke.

1. Statt $-\frac{1}{12} h^2/R^2$ ist in der vorigen Formel wegen der Stromverteilung zu setzen $-\frac{1}{6} h^2/R^2$.

2. Der Reif sei aufgeschnitten und habe dem mittleren Radius parallele Zuleitungsstücke von der Länge l mit einem gegenseitigen Abstand a ihrer Mittellinien: In die Korrektionsklammer ist noch zuzufügen

$$+ al/2\pi R \cdot (R + \tfrac{1}{2} l)/(R + l)^2.$$

F. u. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 27, 21. 1886. Siehe dort auch das Verfahren genauer Messung von R.

Den Kreisleiter kann ein Draht bilden, welcher auf eine flache Nut einer abgedrehten Glas- oder Marmorplatte aufgezogen ist. Dann verschwinden die von b und h herrührenden Korrektionen.

Relative Messungen.

Für manche Zwecke braucht man nur die Verhältnisse von Stromstärken zu kennen. Zwei Ströme verhalten sich wie die Tangenten ihrer Ablenkungswinkel

$$i : i' = \mathrm{tg}\varphi : \mathrm{tg}\varphi'.$$

Die Abweichungen vom Tangentengesetz werden durch excentrische Aufhängung der Nadel um $\frac{1}{4}$ des Windungsdurchmessers viel kleiner (Gaugain, Helmholtz).

82. Sinusbussole (Pouillet).

Der Strom im Multiplikator wird durch Nachdrehen um den Winkel α immer in die ursprüngliche Stellung zu der, alsdann ebenfalls um α abgelenkten, Nadel gebracht. Dann ist offenbar

$$i = C \cdot \sin \alpha.$$

Weil der Sinus höchstens $= 1$ ist, so sind die Grenzen der Anwendbarkeit eng. Hat die Nadel noch eine besondere Teilung, so kann man stärkere Ströme mit geneigter Stellung der Nadel (etwa 45^0 und 70^0) beobachten. Um den gegenseitigen Reduktionsfaktor der Angaben bei verschiedener Neigung zu bestimmen, werden die Ablenkungswinkel α_1 und α_2 desselben Stromes bei beiden zu vergleichenden Neigungen gemessen. Dann ist $p = \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2$ dieser Faktor.

Gegenüber der Tangentenbussole besteht ein Vorteil der Sinusbussole darin, daſs die Giltigkeit des Sinusgesetzes streng ist, ein Nachteil in zeitraubender Einstellung und doppelter Fehlerquelle.

83. Spiegelgalvanometer.

Der drehbare Spiegel ist entweder mit einer Magnetnadel verbunden, die von dem Strom in feststehenden Multiplikatoren umkreist wird; in diesem Falle soll die Windungsebene der nicht abgelenkten Nadel parallel stehen. Oder die Stromspule ist mit Spiegel in einem magnetischen Felde drehbar (neuere Formen als „Deprez-d'Arsonval" bezeichnet); die Windungsebene der nicht abgelenkten Spule soll mit der Feldrichtung zusammenfallen.

Die Ablesung geschieht an einer Skale entweder mit dem Fernrohr oder objektiv mittels eines vom Spiegel entworfenen wandernden Lichtpunktes (**25**).

Über Kommutator vgl. S. 353, über Aufhängung von Nadeln, Astasirung und Astasirungsfaktor **72b**, über Messung starker Ströme mit Abzweigung s. **86**.

Empfindlichkeit eines Galvanometers. Der Ausschlag durch eine bestimmte Stromstärke hängt, auſser von der Konstruktion des Instruments, noch von der Wahl der Drahtsorte, von der Astasirung, bez. bei Spulengalvanometern vom Aufhängedraht und vom Skalenabstand ab. Um eine vergleichbare Charakteristik der Konstruktionen als solcher zu haben, kann man als Norm annehmen: eine Drahtsorte, welche 1 Θ Multiplikatorwiderstand ergeben würde, ein magnetisches Feld, welches der gegebenen Nadel eine einfache Schwingungsdauer von 5 sec erteilt, endlich einen Skalenabstand von 1000 mm, und den Ausschlag e_0 mm angeben, welchen unter diesen Umständen der Strom 10^{-6} A geben würde, wenn der Ausschlag der Stromstärke proportional wäre. Gilt nun für ein vorhandenes Instrument vom Widerstande w Θ, der Schwingungsdauer t sec und dem Skalenabstande A mm die Empfindlichkeit e mm/10^{-6} A, so ist die Normalempfindlichkeit dieser Konstruktion $e_0 = e \cdot 1/\sqrt{w} \cdot 5^2/t^2 \cdot 1000/A$. — Vgl. Du Bois u. Rubens, Ann. der Phys. 2, 91. 1900.

Für kleine, mit Spiegel und Skale (**25**) beobachtete Ablenkungen pflegt der Strom bis zu Ausschlägen von einigen Graden merklich dem in Skalenteilen gemessenen Ausschlage e proportional zu sein, also $i = C \cdot \alpha$ oder $= C/(2A) \cdot e$, wenn A den Skalenabstand vorstellt. Bei ungeändertem Skalenabstand ist dann also

$$i = \mathfrak{C} \cdot e.$$

Über die Bestimmung des Reduktionsfaktors in absolutem Maſse vgl. **89**.

Abweichung von der Proportionalität. Die Grenze, bis zu der die Proportionalität gilt, hängt von der Gestalt ab. Bei Nadelgalvanometern reicht sie im allgemeinen um so weiter, je kürzer die Nadel und je weiter der Multiplikator ist. Doch sind auch enge Multiplikatoren günstig, wenn sie zugleich breit sind. Die Abweichung von der Proportionalität ist nahe dem Quadrate des Ausschlags proportional, also $i = \mathfrak{C} e(1 + \mathfrak{C}' e^2)$. Um die Konstanz zu prüfen, bez. den Korrektionsfaktor $\mathfrak{C}'$ oder auch tabellarisch die Korrektionen zu ermitteln, die man an den Ausschlägen anbringen mufs, um sie der Stromstärke proportional zu machen, bewirkt man verschiedene Ablenkungen (circa 100, 200 etc. mm) dadurch, dafs man dieselbe konstante Säule (Akkumulator, Daniell), durch das Galvanometer und verschiedene Rheostatenwiderstände schliefst. Die Stromstärke ist dem Gesamtwiderstande (Säule + Galvanometer + Rheostat) umgekehrt proportional. Bei der Prüfung empfindlicher Instrumente werden die Rheostatenwiderstände so grofs, dafs die ersten beiden Teile nur genähert bekannt zu sein brauchen.

Schliefslich wird entweder $\mathfrak{C}'$ berechnet, oder man trägt die Stromstärken als Abscissen, die Ausschläge als Ordinaten auf (**6**); die Abweichungen der entstehenden Kurve von einer Geraden geben die an den Skalenausschlägen anzubringende Korrektion. Vgl. auch **89**.

Über ein genaues Verfahren mittels Nachdrehens des Multiplikators vgl. F. K., Wied. Ann. 26, 431. 1885.

Spiegelbussolen mit verschiebbaren Multiplikatoren (Wiedemann) werden empirisch geaicht. Man vergleicht die Ausschläge durch einen und denselben Strom bei mehreren Stellungen der Multiplikatoren auf dem Mafsstabe und stellt die Ausschläge etwa graphisch dar. Wenn r der Halbmesser des Multiplikators, a sein Abstand von der kurzen Nadel, so steht die Empfindlichkeit ungefähr mit $(a^2 + r^2)^{-3/2}$ im Verhältnis.

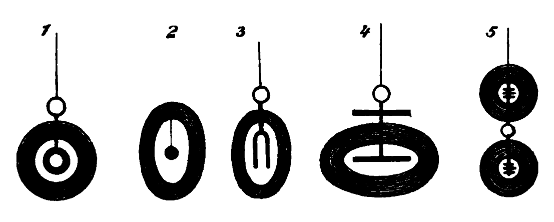
In Galvanometerteilen, die einer Magnetnadel sehr nahe liegen, kann schon ein geringer Eisengehalt erheblich stören, insofern die Ruhelage inkonstant, oder der Ausschlag nach beiden Seiten ungleich wird. Äufserliche Spuren von Eisen werden durch Behandeln mit heifser Schwefelsäure beseitigt, die man nachher mit heifsem Wasser abspült. Auch Lacke sowie Hartkautschuk und selbst Pigmente von Umspinnungen können durch Magnetismus stören.

Formen von Spiegelgalvanometern.

Nadelgalvanometer.

Der kleine Ausschlagswinkel ist gleich dem ablenkenden Moment des Stromes, geteilt durch die Direktionskraft der Nadel. Ersteres ist der Stromstärke proportional und setzt sich aufserdem aus der Windungszahl, Gestalt und Lage des Multiplikators (Galvanometerfunktion) und dem Nadelmagnetismus zusammen. Letztere wird durch das magnetische Feld in seiner Wirkung auf den Nadelmagnetismus und durch die Fadentorsion bewirkt. — Bei einfachen, mit relativ verschwindendem Fadeneinflufs aufgehängten Nadeln hebt der Nadelmagnetismus sich heraus. Im Nenner steht dann nur die magnetische Feldstärke. — Über „Normalempfindlichkeit" vgl. S. 361.

Einige gebräuchliche Formen sind hierneben skizzirt. Die empfindlichsten Instrumente entstehen aus der Verbindung der Spiegelablesung mit einer in sich astatischen oder von aufsen astasirten Doppelnadel im Doppelmultiplikator (Fig. 5; Formen von Lord Kelvin, du Bois und Rubens, Paschen). Die



gröfste erreichte „Normal"empfindlichkeit beträgt 7000. — Astatischen Systemen darf man, ohne eine Änderung der Empfindlichkeit befürchten zu müssen, keine starken Ströme zumuten.

Vollkommene innere Astasirung eines Nadelpaares ist schwer zu erreichen. Man hat vorgeschlagen, die paarweise Gleichheit der Pole durch die entgegengesetzte Verbindung zweier vertikaler Nadeln zu verbürgen, die man aber nur zwischen Multiplikatorhälften bringen kann; schwierig ist, sie genau parallel zu richten.

Will man einen engen Multiplikator mit gröfserem Ausschlage benutzen, so mufs man das Instrument empirisch (89) graduiren. Eine einfache Funktion von dem Ausschlage ist die Stromstärke im allgemeinen nicht.

Über die der Empfindlichkeit günstigsten Begrenzungsformen der Multiplikatoren siehe u. a. W. Weber, W. Thomson, Mather.

Drehbare Spule im Magnetfeld.

(Gewöhnlich als Deprez-d'Arsonval-Galvanometer bezeichnet.) Die Windungsebene der nicht abgelenkten Spule soll mit den Kraftlinien zusammenfallen. Das magn. Feld wird zwischen den Polen eines Stahlmagnets bewirkt, zuweilen unter Einschiebung eines feststehenden weichen Eisenkerns im Innern der Spule. Ein Strom i erfährt ein ablenkendes Drehmoment $i \cdot fH$; die Empfindlichkeit ist also proportional

der Spulenfläche f und der Feldstärke H und natürlich umgekehrt proportional der elastischen Direktionskraft D der Aufhängung, bei gestreckten Drähten also der 4ten Potenz der Dicke geteilt durch die Länge (55). Teilweise tritt noch die Elasticität von Spiralfedern dazu. Die Aufhängung und eine untere Leitung führen den Strom zu.

Dem kleinen, mit Spiegel und Skale gemessenen Ausschlage α entspricht der Strom $i = \alpha \cdot D/(fH)$. Die Proportionalität mit dem Ausschlage besteht im allgemeinen nur innerhalb enger Grenzen. Konstante Empfindlichkeit setzt ferner Konstanz des Stahlmagnetismus voraus; sie hängt auch von der Vertikalstellung ab. Fehlerquellen bilden die elastische Nachwirkung und leicht auch eine nicht zuverlässige Klemmung des Aufhängedrahtes.

Als Vorzug kommt den Instrumenten ihre geringe Abhängigkeit von äufseren magnetischen Störungen zu, die um so weniger einwirken, je stärker das Magnetfeld ist.

Geschlossen erfährt die Spule durch die in ihr inducirten Ströme eine Dämpfung, deren Gröfse aber nicht konstant, sondern dem Gesamtwiderstande umgekehrt proportional ist (vgl. unten).

Ein starkes Feld und feindrähtige Aufhängung, die freilich einen kleinen inneren Widerstand des Instrumentes ausschliefst, lassen eine fast unbegrenzt grofse Empfindlichkeit erzielen. Eine Grenze aber ist dadurch gesetzt, dafs die gleichzeitig gesteigerte Dämpfung bis zur Unbrauchbarkeit des Instrumentes wächst, indem das Erreichen der Gleichgewichtslage Stunden beanspruchen kann. Empfindlichkeit durch feindrähtige Aufhängung dämpft weniger, als solche durch grofse Feldstärke oder Windungsfläche, wie sich aus dem folgenden mit ergibt.

Bei sehr grofser Dämpfung nämlich, wo die Trägheit der Masse nicht mehr von Bedeutung ist, gilt (108) für den Abstand x von der Gleichgewichtslage zur Zeit t die Bewegungsgleichung $-\frac{dx}{dt} = D\frac{w}{q^2} \cdot x$, wo $q = f \cdot H$ und w der Leitungswiderstand ist. $D \cdot w/q^2$ stellt also die relative Annäherungs-Geschwindigkeit an den Gleichgewichtsstand dar, welche hiernach mit abnehmendem q quadratisch, mit steigendem D nur in erster Potenz wächst.

Z. B. bewirke der Strom $i = 10^{-6}$ A $= 10^{-7}$ [C.G.S] bei dem Skalenabstande 1000 mm den auf den normalen Galvanometerwiderstand $w = 1\,\Theta = 10^9$ [C.G.S] berechneten (S. 361) Ausschlag 50 mm, d. h. $\alpha = 0{,}025$, eine im Vergleich mit andern Galvanometern mäfsige Empfindlichkeit. Dann ist also $10^{-7} = 0{,}025 \cdot D/(fH)$ oder $D/(fH) = 4 \cdot 10^{-6}$. Zur Aufhängung diene ein 10 cm langer Silberdraht vom Durchmesser $2r = 0{,}01$ cm. Der Torsionsmodul des Silbers ist (55) $[F] = 29 \cdot 10^{10}$, also

$$D = \tfrac{1}{2}\pi [F] r^4/l = 28 \text{ [C.G.S]}.$$

Danach mufs fH oder $q = 28/(4 \cdot 10^{-6}) = 7 \cdot 10^6$ sein, also $q^2 = 49 \cdot 10^{12}$. Die relative Annäherungsgeschwindigkeit wird also

$$= D \cdot w/q^2 = 28 \cdot 10^9/(49 \cdot 10^{12}) = 1/(1800 \text{ sec}) = 1/(30 \text{ min}).$$

In 1 min nähert sich die Spule der Gleichgewichtslage um 1/30, sie gebraucht, um auf den halben Abstand zu kommen, etwa 20 min. Ein solches Instrument ist also, kurz geschlossen, unbrauchbar und verlangt einen äufsern, mehr als hundertmal gröfseren Widerstand, um brauchbar zu werden. Deswegen sind den empfindlichen Formen Vorschaltwiderstände beigegeben.

Neue Bestrebungen gehen darauf hinaus, das magn. Feld regulirbar zu machen.

Ballistische Galvanometer (z. B. Fig. 4). Die Schwingungen sind hinreichend langsam, dafs Ausschläge der bewegten Nadel und Schwingungsdauern gemessen werden können. Über die Aichung, Theorie und Anwendung des Instruments s. **109** bis **114**.

83a. Absolutes Bifilargalvanometer (Weber).

Der Strom i geht durch einen an zwei Zuleitungsdrähten aufgehangenen Multiplikator mit nordsüdlicher Windungsebene; die Fadenebene ist ostwestlich zu denken. Mit dem Instrument wurde von Weber 1840 das elektrochemische Äquivalent zuerst bestimmt.

Ist f die Gesamtfläche der Windungen (**106**), so ist fi das magnetische Moment der Stromspule und der Erdmagnetismus H (**73**) bewirkt das Drehmoment fiH.

D sei die Direktionskraft der bifilaren Aufhängung (**27a**). f, H und D seien in [C.G.S] gemessen. Einer Ablenkung α entspricht der Strom

$$i = D/(fH) \cdot \operatorname{tg}\alpha \, [\text{C.G.S}].$$

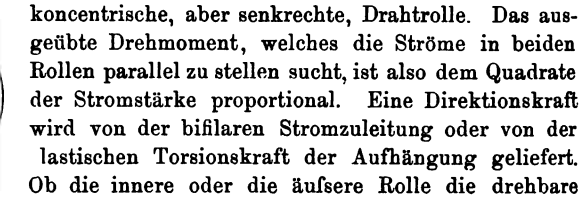
Absolute Strommessung mit Tangentenbussole und Bifilargalvanometer. Da H im Reduktionsfaktor der Tangentenbussole (**81**) im Zähler vorkommt, so läfst die gleichzeitige Anwendung beider Instrumente einen Strom ohne Kenntnis des Erdmagnetismus absolut messen. Vgl. **105**.

Auch f fällt heraus, wenn man so verfährt: Die Tangentenbussole mit n Windungen vom Halbmesser R sei im Abstande a nördlich oder südlich vom Bifilargalvanometer aufgestellt. Die Nadel werde um Φ abgelenkt, wenn die Wirkungen des Stromes im Bifilar und der Tangentenbussole sich summiren, um φ dagegen, wenn der Strom in der Tangentenbussole allein gewendet wird. Dann erhält man i aus

$$i^2 = \frac{R^2 D}{8\pi^2 n^2 a^3} \frac{(\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\varphi)^2}{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\varphi} \operatorname{tg}\alpha.$$

Beweis einfach; vgl. **106**. Über einige Korrektionen s. **105**.

84. Elektrodynamometer; W. Weber 1846. Messung von Wechselströmen.



Der Strom durchfliefst eine feste und eine drehbare, zur festen koncentrische, aber senkrechte, Drahtrolle. Das ausgeübte Drehmoment, welches die Ströme in beiden Rollen parallel zu stellen sucht, ist also dem Quadrate der Stromstärke proportional. Eine Direktionskraft wird von der bifilaren Stromzuleitung oder von der lastischen Torsionskraft der Aufhängung geliefert. Ob die innere oder die äufsere Rolle die drehbare ist, macht im Princip keinen Unterschied.

I. Dynamometer mit Ausschlägen.

Kleine Ausschlagswinkel α oder Skalenablenkungen e der beweglichen Rolle sind dem Quadrate der Stromstärke i proportional, also ist

$$i = C \cdot \sqrt{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \mathfrak{C} \cdot \sqrt{e},$$

wo C oder $\mathfrak{C} = C/\sqrt{2A}$ ein Faktor für das betreffende Instrument ist. Die Empfindlichkeit des Instrumentes ändert man durch Verstellung des Abstandes der Bifilaraufhängung oder bei eindrähtiger Aufhängung durch Auswechseln des Aufhängedrahtes. C ist der Schwingungsdauer umgekehrt proportional. Über die absolute Bestimmung von C vgl. **89**.

Stromwechsel im ganzen Instrument ändert die Richtung des Ausschlages nicht. Mit einem Kommutator verbindet man daher nur die eine der Rollen. Für schwache Ströme wird das Dynamometer unempfindlich, da der Ausschlag dem Quadrate der Stromstärke proportional ist.

Genaue Messungen verlangen Vorsichtsmafsregeln wegen des Erdmagnetismus und der elastischen Nachwirkung.

S e n k r e c h t s t e l l u n g. Wenn die beiden Rollen nicht genau senkrecht aufeinander stehen, so üben Wechselströme in der einen eine Induktion auf die andere aus. Um die senkrechte Stellung zu prüfen, leite man also Wechselströme nur durch die äufsere Rolle, während die innere in sich geschlossen ist. Die letztere darf dann nicht abgelenkt werden.

Bei e i n d r ä h t i g e r A u f h ä n g u n g der beweglichen Rolle kann man für schwache Wechselströme die untere Zuleitung

durch ein platinirtes (8, 18) Platinblech bewirken, welches in verdünnte Schwefelsäure untertaucht und zugleich zur Dämpfung dient. Den dünnen Stiel platinirt und glüht man.

S. auch **120** II das Dynamometer von Raps.

II. Dynamometer mit Null-Ablesung (Siemens).

Dasselbe gewährt einen gröfseren Spielraum. Die Stromstärke wird durch den Torsionswinkel φ einer elastischen Aufhängefeder bestimmt, indem man die abgelenkte bewegliche Rolle mittels eines Torsionskopfes auf Null zurückführt. Die Stromstärke ist $i = C \cdot \sqrt{\varphi}$.

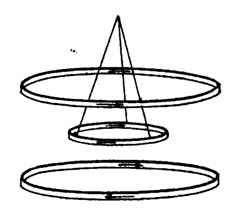
Die Axe der beweglichen Rolle soll nordsüdlich stehen, damit der Erdmagnetismus nicht einwirkt. — Das Quecksilber der Zuleitnäpfe soll rein sein; durch etwas aufgegossene Lösung von Quecksilbernitrat wird dies befördert.

Über die Bestimmung bez. die Kontrole von C vgl. **89**.

III. Elektrodynamische Wage.

Zu den Dynamometern sind auch die mit einem Wagebalken verbundenen Spulen zu rechnen (Rayleigh, Helmholtz, Kelvin), auf die derselbe Strom von einer feststehenden Spule aus wirkt. Die durch aufgelegte oder Lauf-Gewichte gemessene Kraft ist auch hier der Stromleistung d. h. dem mittleren Quadrate der Stromstärke proportional.

Wage von Lord Rayleigh. Eine flache, an einer Wage aufgehangene Spule vom Halbmesser r befindet sich in der Mitte zwischen zwei gröfseren, einander gleichen, flachen Spulen vom Halbmesser R. Die Ströme in den beiden äufseren Spulen fliefsen einander entgegengesetzt, so dafs die auf die bewegliche Spule ausgeübten Kräfte sich addiren. Man wählt für absolute Messungen r/R etwa $= 1/2$.



Der Abstand der Spulen ist so regulirt, dafs die Kraft ein Maximum wird; theoretisch ist er dann

$$= \tfrac{1}{2} R \left[1 - \tfrac{9}{10} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \tfrac{1}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^4 \cdots \right],$$

also wenn die bewegliche Spule sehr klein wäre, $= \frac{1}{2} R$, in Wirklichkeit kleiner. In dieser Maximumlage enthält nun die Kraft aufser dem Quadrate der Stromstärke und dem Produkte der

beiden Windungszahlen nur noch einen Faktor, zu dessen Ermittelung wesentlich nur das Verhältnis r/R bekannt sein mufs, welches aus der Galvanometerwirkung der Spulen auf eine kurze Magnetnadel (**106**) abgeleitet werden kann. Der Faktor beträgt in erster Annäherung etwa $17\, r^2/R^2$. — Die Stromzuleitung zur beweglichen Spule geschieht durch weichen Draht. Man mifst an der Wage durch Kommutiren des Stromes in der aufgehangenen oder in den festen Spulen die doppelte Kraft.

Näheres bei Rayleigh und Sidgwick, Electroch. Equival. of Silver, Ph. Trans. 175, 411. 1884; Heydweiller, Wied. Ann. 44, 533. 1891.

An der in der Technik häufig gebrauchten Stromwage von W. Thomson trägt ein Wagebalken beiderseitig bewegliche Spulen zwischen je einem Paar von, in der Rayleigh'schen Weise angeordneten festen Spulen. Vgl. **120**.

Wage von Helmholtz. Eine gröfsere Spule wirkt drehend auf eine, mit einem Wagebalken verbundene kleine Spule, deren Windungsfläche nach **106** bestimmt wird. Der Balken rollt auf Bändern, die zugleich den Strom zuleiten. Die Konstante des Instruments wird durch Vergleichung mit einer grofsen quadratischen Windung aus dünnem Blech, deren Wirkung auf die drehbare Spule man berechnen kann, empirisch bestimmt.

Vgl. Kahle, Wied. Ann. 59, 532, 1896.

Eine andere Form bei Mascart, Exn. Rep. 19, 220. 1883.

Zu dem Typus von Instrumenten mit einem, dem Quadrate der Stromstärke proportionalen Ausschlag, dessen Richtung von der Stromrichtung unabhängig ist, gehören auch (85) die Stromzeiger mit weichem Eisen und die Hitzdrahtinstrumente. Auch sie sind auf Wechselströme anwendbar, zeigen im grofsen und ganzen die effektive Stromstärke an und lassen sich, richtig behandelt, zu deren genäherter Messung gebrauchen.

Wechselströme. Stromleistung; effektive Stromstärke.

Die häufigste Anwendung des Dynamometers bezieht sich wegen der Unabhängigkeit der Ausschlags- von der Stromrichtung auf Wechselströme, d. h. auf Ströme, die, einzeln von gleichem Stromintegral, rasch hinter einander in abwechselnder Richtung folgen. Der Ausschlag des Dynamometers mifst die mittlere Leistung, d. h. Energie des Stromes in der Zeiteinheit, insofern die Leistung in jedem Augenblick dem Quadrate der Stromstärke, im Mittel über die Zeitdauer t einer oder mehrerer

ganzer Perioden also dem Ausdruck $\frac{1}{t}\int_0^t i^2 dt$ proportional ist. Gerade diese Gröfse mifst der Dynamometerausschlag. Die Quadratwurzel aus dem Ausdruck heifst, seinem Verhältnis zur Leistung entsprechend, die (mittlere) effektive Stromstärke; vgl. noch **120** I.

Bei Wechselströmen ist auf die Induktion, und zwar in erster Linie auf die Selbstinduktion der Rollen Rücksicht zu nehmen. Insbesondere kann die Verteilung des Stromes zwischen dem Instrument und einer Abzweigung (**86**) für rasch wechselnde Ströme von der aus den Widerständen berechneten Verteilung stark abweichen. Auch die Induktion auf benachbarte Leiter, wie etwa auf metallische Rahmen der Spulen, kann in Betracht kommen und in dicken Stromleitungen sogar die Wechselinduktion zwischen ihren verschiedenen Stromfäden, wobei der Strom mit steigender Wechselfrequenz immer mehr nach der Oberfläche gedrängt wird. Beliebig rasch schwingende Ströme laufen schliefslich nicht mehr merklich durch den inneren Teil von Leitungen. Vgl. auch Leistungsmesser (Wattmeter) **120**.

85. Verschiedene Formen von Stromzeigern.

Vorzüge der neueren, den technischen Bedürfnissen entsprungenen Formen von Strommessern bezüglich bequemen und ausgiebigen Gebrauchs sind:

1. Die Graduirung nach einer unmittelbar verständlichen Einheit. Die hohe Unabhängigkeit von äufseren magnetischen Einflüssen und die Haltbarkeit der Konstruktion und der in ihr enthaltenen Magnete verbürgen die zeitliche Konstanz des Skalenwertes in einem früher nicht erreichten Mafs, womit indessen Nachprüfungen keineswegs für überflüssig erklärt werden sollen.

2. Der, auf die Anwendung temperaturunabhängigen Leitungsmaterials gegründete, konstante und meist auf eine runde Zahl, z. B. 1 oder 100 Θ, zurückgeführte Galvanometerwiderstand. Die genaue Abgleichung geschieht in der Regel durch eine Nebenleitung.

3. Die erhöhte Empfindlichkeit auch ohne Spiegelablesung.

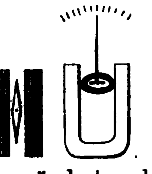
4. Die rasche, sichere Einstellung, welche grofsenteils mit der Weston'schen Aufhängung zwischen Spitzen und der dabei angewandten elektromagnetischen Dämpfung zusammenhängt.

5. Die Erweiterung des Empfindlichkeitsbereiches für Strommessung durch nebengeschaltete (**86**), für Spannungsmessung durch vorgeschaltete (**101**) Widerstände. Die Nebenschlüsse können in der Regel gleich zu dem Instrument mitbezogen werden, meistens in Beträgen, welche den

Skalenwert mit 10, 100, 1000, 10000 aber auch Zwischenstufen multipliciren. Zum Vorschalten können Rheostaten, und zwar wegen der runden Zahl des Hauptwiderstandes in bequemer Weise gebraucht werden. Das Instrument gewinnt so einen weiten Umfang seines Gebrauchsgebietes.

1. Feststehender Multiplikator und Magnetnadel mit Zeiger.

Ältere Instrumente haben meistens diese Form. Die Empfindlichkeit ist der magn. Feldstärke umgekehrt proportional, welche deswegen bei Instrumenten für starke Ströme wohl durch genäherte Magnetpole vergröfsert wird (Fig.). An einer vertikal drehbaren Nadel kommt die Schwere hinzu. Konstanz der Angaben setzt also voraus, dafs der Nadelmagnetismus und die Lage des Schwerpunkts gegen die Drehaxe, im allgemeinen auch die Stellung gegen den Meridian ungeändert geblieben ist. Die Skale mufs also kontrolirt werden. In jedem Fall soll die nicht abgelenkte Nadel den Windungen parallel stehen.

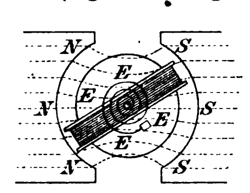


Die Abhängigkeit des Ausschlages von der Stromstärke ist nach der Gestalt verschieden und stellt häufig eine komplicirte Funktion dar, so dafs man aus der Ablenkung nur auf ein Mehr oder Weniger der Stromstärke schliefsen kann, was aber für eine Reihe von Anwendungen genügt. Teilungen, welche wirklich die Stromstärke angeben sollen, müssen empirisch hergestellt und geprüft werden (89).

2. Weston-Strom- und Spannungsmesser.

Gerade diese bürgern sich vermöge der oben genannten Eigenschaften immer mehr ein und haben bereits auch einen grofsen wissenschaftlichen Wert gewonnen. Dämpfung liefern die in dem Metallrähmchen der Spule durch die Bewegung im Magnetfeld inducirten Ströme.

Im starken Magnetfelde ist zwischen Spitzen eine Spule drehbar (Fig. von oben gesehen). Elastische Spiralfedern geben Stromzuführung und Direktionskraft, welche die nicht abgelenkten Windungen in die geeignete Stellung zu den Kraftlinien richtet. Der Strom erteilt dann ein Drehmoment, welches die Windungen zu den Kraftlinien senkrecht zu stellen sucht. Halbcylindrische Magnetpole und ein feststehender Eisencylinder E innerhalb der Spule, der die Kraftlinien in dem zwischenliegenden Luftraum fast radial richtet (Fig.), lassen den Ausschlag ziemlich gleichmäfsig mit der Stromstärke wachsen. Die Empfindlichkeit ist cet. par. der Feldstärke proportional. Über die Herstellung anderer Skalenwerte durch Abzweigung vgl. 86. — Das Instrument mufs vor starken magnetischen Einflüssen von aufsen behütet werden. — Bei dem Ankauf oder bei dem Gebrauch beachte man, ob die elastische Nachwirkung unmerklich ist, d. h. ob nach länger dauernden Ablenkungen der Nullpunkt sich wiederherstellt.



Vgl. z. B. Raps, El.-tech. ZS. 1896, 264.

3. Strommesser mit weichem Eisen.

Unveränderlich und, geeignet gebraucht, für manche Messungen genügend genau sind die Instrumente, bei denen der Strom auf *weiches* Eisen in mannigfach ersonnener Weise zunächst magnetisirend und dann drehend oder ziehend wirkt. Für mäfsige Ströme sind die Kräfte beiläufig dem Quadrate der Stromstärke proportional. Die Ausschläge durch schwache Ströme werden unbrauchbar klein. Wechselströme (S. 368) wirken auf solche Instrumente. Eine Graduirung für Wechselstrom mufs die Wechselfrequenz berücksichtigen.

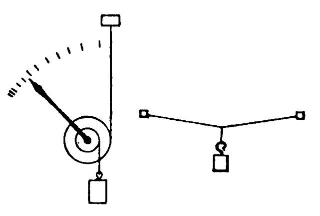
Multiplikator mit weichem Eisendraht (Bellati). Ein aufgehängter Eisendraht bilde mit der Windungsebene einen Winkel von etwa 45°. Ein Strom magnetisirt das Eisen und lenkt es infolge dessen zugleich ab. Die Ausschlagsrichtung ist von der Stromrichtung unabhängig, also kann man das Instrument für Wechselströme gebrauchen. Auch ein gewöhnliches Galvanometer mit schräg gestellter Nadel reagirt auf Wechselströme (Cheesman).

Vgl. Giltay, Wied. Ann. 25, 325. 1885.

Feder-Stromwagen (Fig.). Eine vertikale Spule zieht einen an einer elastischen Feder aufgehangenen Eisenkörper je nach der Stromstärke mehr oder weniger tief in sich hinein. Die Ablesung erfolgt an dem Eisenkörper selbst oder an einem von ihm bewegten Zeiger. Die Graduirung des Instrumentes geschieht empirisch (89). Die Angaben sind konstant, wenn man vor der Ablesung das Eisen tiefer in die Spule eintaucht, sonst bleiben sie bei ansteigender Stromstärke ein wenig hinter derselben zurück. Für schwache Ströme und Wechselströme gilt das oben gesagte. — Permanent magnetische Stahlnadeln sind auch für schwache Ströme geeignet. Nach längerem Nichtgebrauch magnetisirt man sie zuvörderst durch einen kräftigen Strom in der Spule.

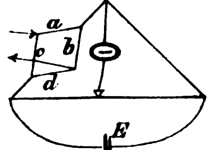
4. Hitzdraht-Strommesser. (Hankel; Cardew.)

Die durch einen Strom in einem Widerstande entwickelte Wärme ist dem Quadrate der Stromstärke proportional. In den Grenzen, innerhalb deren die abgegebene Wärmemenge dem Temperaturüberschusse über die Umgebung proportional und der Widerstand hinreichend konstant ist, mifst also die Temperaturerhöhung eines Drahtes das Quadrat der Stromstärke (wie bei dem Dynamometer). Die Erwärmung wird aus der Ausdehnung (Schema s. Figg.), ev. durch eine Übertragung auf einen drehbaren Zeiger oder Spiegel, auch wohl thermoelektrisch, beurteilt. Für weitere Stromgrenzen wird empirisch geaicht. Als Leiter eignen sich Eisen, Nickel, reines Platin.



Ausgeführte Hitzdrahtinstrumente z. B. bei Hartmann u. Braun.

Hitzdraht in der Doppelbrücke nach dem „Bolometerprincip“ (Paalzow und Rubens, Wied. Ann. 37, 529. 1889). In der grofsen Verzweigung, welche durch ein, einige Zeit zuvor geschlossenes, konstantes Element E gespeist wird, sind die Widerstände so abgeglichen (93), dafs das Galvanoskop keinen Strom zeigt. Der zu messende, konstante oder Wechsel-Strom wird dann durch das Viereck $abcd$ geschickt, in welchem $a:b = c:d$ (z. B. $a = b = c = d$) gemacht ist, damit die beiden Stromquellen sich gegenseitig nicht beeinflussen. Durch die Stromwärme ändert sich der Widerstand des Vierecks und das Galvanometer zeigt einen der Energie des zu messenden Stromes proportionalen Ausschlag.



Um von äufseren Änderungen ungestört zu bleiben, gestaltet man einen Nachbarzweig der grofsen Verzweigung dem Viereck kongruent und schliefst beide Zweige in dasselbe Kästchen ein.

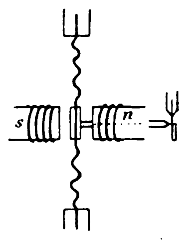
Das äufserst empfindliche Verfahren dient z. B. zur Beobachtung der Strahlungsenergie Hertz'scher elektrischer Wellen.

85a. Hörtelephon, optisches Telephon, Vibrationsgalvanometer.

Die durch elektromagnetisch bewegte Membrane auf das Ohr oder einen Lichtstrahl wirkenden Instrumente reagiren auf Wechselströme und dienen hier vorwiegend, das Hörtelephon ausschliefslich, bei Nullmethoden.

I. Hörtelephon (Bell 1876). Die Brauchbarkeit mufs ausprobirt werden. Ein aus dem Verkehr übernommenes Instrument wird man oft durch eine Wickelung von kleinerem Widerstande verbessern können. Das Telephon wird mäfsig fest ans Ohr (ev. an das empfindlichere) angedrückt, das andere Ohr vielleicht mit Watte oder „Antiphon“ verstopft.

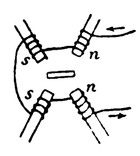
II. Optisches Telephon (M. Wien). Eine gewellte Membran mit Eisenplättchen ist zwischen zwei Hufeisen-Elektromagneten aus magnetisirtem Stahl ausgespannt. Durch deren periodische Erregung gerät die Membran in Schwingungen, die durch einen Stift auf einen Kontaktspiegel an einer Feder übertragen werden. Das in diesem beobachtete schmale Bild eines Spaltes oder einer Glühlampe geht bei der Bewegung in ein, der erregenden Stromstärke ungefähr proportional breites Band über. Das Instrument spricht wesentlich nur auf die eigene Schwingungszahl der Membran an. Um es einzustimmen, dienen auswechselbare Membrane, ferner kleine Änderungen durch Variiren der aufgeschraubten Eisenplatten oder der Dämpfung durch Verstellen des Magnets. Auch darf man den Eigenton der Feder, welcher dem der



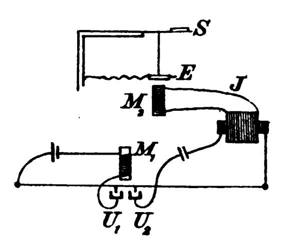
Membran gleich ist, in engen Grenzen verstimmen, ohne die Empfindlichkeit zu schwächen.

Störende Obertöne vermindert man 1. durch einen Unterbrecher aus amalgamirtem Kupfer an Quecksilber; 2. durch einen Nebenschlufs zum Unterbrecher; 3. durch eine Induktionsrolle mit Eisenkern im sekundären Kreis; 4. durch einen zum opt. Telephon parallel geschalteten induktionsfreien Widerstand oder einen Kondensator von einigen Mikrofarad.

III. Vibrationsgalvanometer (Rubens). Dasselbe benutzt Torsionsschwingungen einer gespannten Saite, deren Eigenton durch Länge oder Dicke variirt wird. Die Erregung geschieht durch Eisenstäbchen, die an der Saite in der Nähe von vier über Kreuz stehenden Telephon-Elektromagnetpolen befestigt sind. Der Wechselstrom ist so geführt, dafs seine elektromagnetische Wirkung das durch die Stahlpole magnetische Eisenstäbchen zum Vibriren bringt. — Beobachtet wird wie am opt. Telephon.



Zur Erzeugung der Wechselströme dient für das Hörtelephon ein kleines Induktorium (Neeff'scher Hammer; vgl. S. 410) von möglichst geräuschlosem Gang, für die anderen Instrumente ein Saitenunterbrecher mit Regulirung seiner Schwingungszahl durch verschiebbare Stege oder Anspannen. Die Saite hat zwei Platin- oder Quecksilberkontakte, von denen der eine U_1 zum Antrieb der Saite dient, während U_2 zum primären Kreis des Induktoriums J gehört. M_2 deutet die, das opt. Telephon (oder das Vibrationsgalvanometer) bewegende, elektromagnetische Vorrichtung an.



M. Wien, Wied. Ann. 42, 593; 44, 681. 1891; Rubens, ib. 56, 27. 1895.

86. Messung stärkerer Ströme mit Abzweigung.

Dieses Verfahren, welches für alle Galvanometer Bedeutung hat, ist für sehr grofse Stromstärken unersetzlich geworden. Ist das Instrument für die zu messenden Ströme zu empfindlich, so führt man einen Teil des Stromes durch eine konstante Nebenleitung unwirksam (was besonders bei starken Strömen zu beachten ist) an dem Galvanometer vorüber. Das Galvanometer erhält dadurch nur einen gröfseren Reduktionsfaktor. Das Metall des Zweigwiderstandes mufs gegen Temperatur unempfindlich (Tab. 30) oder so dick sein, dafs es nicht durch den Strom in störender Weise erwärmt wird.

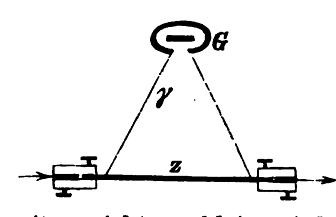
Jede von dem Instrument an sich angezeigte Stromstärke ist dann, um den ganzen Strom zu geben, mit einem konstanten „Abzweigungsfaktor“ a zu multipliciren, der aus dem

Widerstande der Galvanometerleitung γ und dem der Nebenleitung z erhalten wird. (Beweis in Beisp. 1, S. 347.)

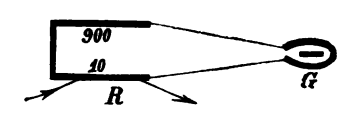
$$a = (z + \gamma)/z \quad \text{oder} \quad = 1 + \gamma/z.$$

Die Rechnung wird am einfachsten, wenn $z = \frac{1}{9}\gamma$ oder $\frac{1}{99}\gamma$ etc., denn alsdann wird $a = 10$, 100 etc.

Solche Abzweigungen sind häufig z. B. mit den Weston-Strommessern gleich verbunden. Zeigt die Teilung ohne Abzweigung etwa 0,01 A an, so bedeutet sie mit $\frac{1}{9}$ 0,1 A und mit $\frac{1}{99}$ ganze Ampere.



Kleine Zweigwiderstände müssen so in die Leitung eingeschaltet werden, daſs die Verbindungswiderstände unschädlich bleiben (vgl. S. 353), z. B. in der durch die Figur angedeuteten Weise. Damit z nicht zu klein wird, kann man zum Galvanometer einen Ballastwiderstand zufügen, der dann in γ mit inbegriffen ist.



Die Figur zeigt, wie aus einem Rheostaten sowohl Zweigwiderstand wie Ballast entnommen wird. Vgl. auch S. 356.

87. Strommessung durch Elektrolyse (Faraday). Voltameter.

Die mit einem Voltameter gemessenen chemischen Zersetzungsprodukte lassen die Stromstärke mit Hilfe der folgenden Sätze bestimmen.

1. Die durch verschiedene Ströme in derselben Zeit zersetzten Mengen sind der Stromstärke proportional.

2. Die Zersetzungsprodukte eines und desselben Stromes in verschiedenen Elektrolyten sind einander chemisch äquivalent (Faraday'sches Gesetz. 1833).

3. Die elektromagnetisch gemessene Elektricitätsmenge 1 [C.G.S] = 10 A·sec scheidet in 1 sec 0,01118 gr Silber aus. Mit 1 gr Silber wandert demnach die El.-Menge 1/0,01118 = 89,45; da das (auf $\frac{1}{2}$ O = $\frac{1}{2}$ 16,00 = 8,00 bezogene) Äqu.-Gewicht Ag = 107,93 ist, so wandert also mit der gr-Einheit des chemischen Äquivalents die Elektricitäts-Menge 89,45 × 107,93 = 9654 [C.G.S] = 96540 Amperesekunden (Coulomb). Oder man kann sagen: die El.-Menge 1 [C.G.S] = 10 A · sec befördert 1/9654 = 0,0001036 gr-Äquivalente.

Hiernach ist das elektrochemische Äquivalent (W. Weber 1840) E.

für	Silber	Kupfer	Wasserstoff	Sauerstoff	Wasser
Äqu.-Gew. =	107,93	31,8	1,008	8,00	9,01
E =	1,118	0,3294	0,01044	0,08287	0,0933 mg/A·sec.

0,0933 mg Wasser geben 0,1740 cm³ Knallgas von 0° u. 760 mm.

Vgl. auch Tab. 32.

Der zu messende Strom i gehe während einer Zeit τ durch die Flüssigkeit; die dadurch zersetzte oder ausgeschiedene Menge sei m. Dann ist die Stromstärke (über E siehe oben)

$$i = \frac{1}{E}\frac{m}{\tau} \text{ A} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{10E}\frac{m}{\tau} \text{ [C.G.S]-Einheiten.}$$

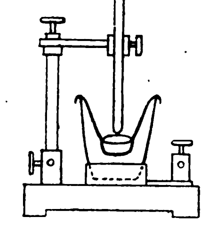
Die voltametrische Strommessung wird meistens dazu dienen, die Skale eines Stromzeigers zu prüfen. Als Übungsaufgabe kann auch das elektrochemische Äquivalent bestimmt werden, indem man mit einer in denselben Stromkreis eingeschalteten Tangentenbussole (**81**) oder einem geprüften Westonzeiger den Strom in absolutem Mafse mifst.

Unbequem ist die, durch die Widerstandsänderung der Lösungen besonders in den Metallvoltametern bewirkte Inkonstanz des Stromes, die man nötigenfalls mit einem Rheostaten korrigiren mufs. Durch Anwendung einer starken elektromotorischen Kraft, deren Strom man mittels Ballastwiderstandes auf die gewünschte Stärke bringt, vermindert sich die Inkonstanz.

Die Versuchsverhältnisse, unter denen die beabsichtigte Stromstärke entsteht, sind vor der eigentlichen Messung auszuprobiren.

I. Silber-Voltameter.

15- bis 30-procentige Lösung von neutralem Silbernitrat vom spec. Gew. 1,15 bis 1,33 mit einer Anode aus Silber. Gewogen wird der Niederschlag auf der Kathode. Bequeme Form ist ein Silber- oder Platintiegel als Kathode; reines Silber bildet die Anode. Gegen Herabfallen von Teilen der Anode schützt am besten ein eingehängtes Glasschälchen.



Der Niederschlag wird zuerst mit chlorfreiem destillirtem Wasser gewaschen, bis das Waschwasser bei dem Zusatz eines Tropfens Salzsäure keine Trübung zeigt, dann 10 min lang mit destillirtem Wasser von 70 bis 90° ausgelaugt und schliefslich mit dest.

Wasser gespült. Das letzte Waschwasser darf kalt durch Salzsäure nicht getrübt werden. Die Kathode wird warm getrocknet, bis zur Wägung im Trockengefäſs aufbewahrt und nicht früher als 10 min nach dem Erkalten gewogen.

Die Stromdichte soll an der Kathode, um das Herauswachsen von Silberfäden zu vermeiden $\frac{1}{50}$ A/cm², an der Anode etwa $\frac{1}{5}$ A/cm² nicht überschreiten. — Ferner soll, um das Auswaschen zu erleichtern, die abgesetzte Silberschicht nicht zu dick werden, also etwa, wenn sie 0,1 gr/cm² beträgt, mit Salpetersäure entfernt werden.

Das elektrochemische Äquivalent des Silbers 1,118 mg/A.sec (Lord Rayleigh, F. u. W. Kohlrausch) ist mit neutralen Lösungen erhalten worden, die in freier Luft kurze Zeit elektrolysirt wurden. Sowohl in sauerstofffreier Umgebung, z. B. im Vakuum (A. Schuster u. Crossley, Myers), wie bei schwachem Ansäuern oder lange dauernder Anwendung derselben Lösung (Kahle, Richards) erhält man bis zu $\frac{1}{1000}$ mehr Silber. Praktisch sind selbstverständlich die Verhältnisse herzustellen, die der angenommenen Zahl 1,118 entsprechen. Demgemäſs sind für genaue Versuche neutrale Lösungen mit Luftzutritt zu verwenden und wenn man ganz sicher gehen will, nicht länger, als bis etwa 3 gr Silber auf 100 cm³ Lösung ausgeschieden sind.[1])

Mit diesen Maſsregeln bietet das Silbervoltameter, wenn richtig gewogen wird, sicher eine Konstanz seiner Anzeigen auf $\frac{1}{2000}$.[2])

II. Kupfer-Voltameter.

Starke Ströme werden der Kosten wegen mit dem Kupfervoltameter bestimmt.

Man wendet eine nicht gesättigte Lösung von reinem Kupfersulfat in destillirtem Wasser an: durchschnittlich etwa 10 gr krystallisirtes Salz in 40 ccm Wasser gelöst; spec. Gewicht ungefähr = 1,14. Anode aus reinem Kupfer; Kathode Kupfer oder Platin. Gemessen wird ebenfalls die Gewichtszunahme der Kathode, welche abgespült und rasch zwischen Flieſspapier und dann wenn möglich unter der Luftpumpe oder im Exsikkator getrocknet wird.

1) Diese Vorschriften schlieſsen sich an die in Deutschland geltenden gesetzlichen Bestimmungen an.

2) Infolge der, übrigens sehr verdienstlichen Aufdeckung von Fehlerquellen durch ihre absichtliche Steigerung, wird die Genauigkeit des Silbervoltameters jetzt zuweilen unterschätzt. Die Bedenken sind aber bei richtiger Behandlung nicht begründet.

Der Stromstärke mufs die Gröfse der Elektroden angemessen sein. Damit der Niederschlag fest haftet, darf die Stromdichte an der Kathode nicht mehr als etwa 1 A auf 25 cm^2 betragen.

Bei grofser Stromdichte kann eine zu starke Lösung eine Salzabscheidung an der Kathode und erhebliche Stromschwankungen, zu schwache eine Verdünnung und ein nicht zusammenhängendes, mit Gasausscheidung verbundenes Niederschlagen des Kupfers veranlassen.

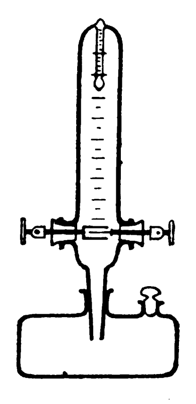
Bei schwachem Strome können im Gegenteil grofse Elektroden Fehler veranlassen. Die meistens etwas saure Kupferlösung bewirkt nämlich durch Auflösung einen der Zeit proportionalen, oft recht merklichen Verlust der Elektroden.

Vgl. hierüber Gray, Phil. Mag. 25, 179. 1888; Vanni, Wied. Ann. 44, 214. 1891. Auch die eingehenden Untersuchungen von Förster, ZS. f. El.-Chem. 3, 479 u. 493. 1899; Richards, Collins u. Heimrod, ZS. f. physik. Ch. 32, 321. 1900.

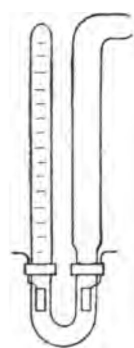
III. Wasser-Voltameter.

Dasselbe arbeitet, weil es keine Wägung beansprucht, bequemer als die vorigen und, verständig behandelt, auf einige Tausendtel genau.

10- bis 20procentige **reine** Schwefelsäurelösung (1,07 bis 1,14 spec. Gew.) wird zwischen blanken Platinelektroden zersetzt. Da die Polarisation Wasserstoff-Sauerstoff auf Platin fast 3 V beträgt, so verlangt die Zersetzung mindestens 3 Daniell- oder 2 Bunsen-Elemente oder 2 Akkumulatoren.



Bei **starkem** Strome mifst man das entwickelte Knallgas als Ganzes. Mit dicht aneinander stehenden Elektroden von etwa je 15 cm^2 wirksamer Fläche können Ströme bis 40 A noch ohne lästige Erwärmungen gemessen werden. Das neben gezeichnete Instrument wird nach dem Gebrauch (während dessen der kleine Stöpsel zu entfernen ist!) durch Umkehren wieder gefüllt. Die Elektroden sind in Wirklichkeit gegen die Stellung der Figur um 90° zu drehen. Das Knallgas soll nicht so weit entwickelt werden, dafs Stromunterbrechung eintritt, weil sonst durch einen Funken Explosion entstehen kann.



Bei schwachen Strömen ist, weil der Sauerstoff infolge von Ozonbildung teilweise vom Wasser absorbirt wird, nur das entwickelte Wasserstoffgas aufzufangen; durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$ berechnet sich das Volumen des Knallgases. Das abgebildete Voltameter läfst den geteilten Schenkel durch blofses Umkehren wieder mit der Flüssigkeit anfüllen.

Der mafsgebende Schenkel kann behufs genauerer Temperaturbestimmung von einem kleinen, mittels Kautschukstopfens dicht übergeschobenen Thermometerbade umgeben sein. Ist dieses auch oben geschlossen, so läfst es sich mit umkehren.

Formen, die eine genaue Messung, sowie u. a. bezwecken, die Druckdifferenz h (vgl. unten) wegzuschaffen, s. Brüggemann ZS. f. Instr. 1893, 417; Naber, Electrician 1894, Aug.; Elektrochem. ZS. 5, 45. 1898.

Berechnung. Das bei der Temperatur t unter dem Drucke p_0 mm Hg von 0^0 gemessene Volumen v würde bei 0^0 und 760 mm betragen haben (Tab. 7):

$$m = \frac{v}{1+0{,}00367\,t} \cdot \frac{p_0}{760}.$$

Der Quecksilberdruck, unter welchem das Gas steht, ist der Barometerstand b, vermindert um die in Quecksilber umgerechnete Höhe h der Schwefelsäure, d. h. um $h \cdot 1{,}1/13{,}6 = \frac{1}{12}h$ ausreichend genau. h mifst man mit einem Mafsstabe aus freier Hand. Von dem Drucke $b - \frac{1}{12}h$ ist aber noch abzurechnen die Spannkraft des Wasserdampfs im Knallgase. Wäre dieses aus Wasser entwickelt, so würde die Spannkraft e zur Temperatur t aus Tab. 13 entnommen werden. Über der Schwefelsäure ist die Spannkraft kleiner $= k \cdot e$, wo k ein echter Bruch ist. Es ist für

	0%	18	27	33% H_2SO_4
$k =$	1,0	0,9	0,8	0,7.

Der Druck des trockenen Gases ist also $p_0 = b - hs/13{,}6 - k \cdot e$ oder praktisch nahe $p_0 = b - \frac{1}{12}h - 0{,}9\,e$. (Sollte, etwa in der zweiten Figur, die äufsere Flüssigkeit höher stehen, als die innere, so ist natürlich $+\frac{1}{12}h$ zu setzen.)

Schliefslich berechnet man die Stromstärke i, wenn die Zersetzung τ sec gedauert hatte (vgl. den Eingang)

$$i = \frac{1}{0{,}1740}\frac{m}{\tau} \quad \text{oder} \quad = 5{,}75\,\frac{m}{\tau}\,\text{A}.$$

Bequeme Tabelle für 15- bis 20-proc. Schwefelsäure. Die von dem Strom 1 A entwickelte Menge feucht gemessenen Knallgases beträgt bei gewöhnlicher Temperatur nicht weit von $\frac{1}{5}$ ccm/sec. Die folgende Tabelle gibt für verschiedene Drucke p (d. i. $b - \frac{1}{12}h$) und Temperaturen t die Korrektion, welche man an dem gemessenen Volumen anbringen mufs, um mit dem korrigirten Volumen v_0 nach der Formel rechnen zu können:

$$i = 5{,}0 \cdot \frac{v_0}{\tau} \text{ A}.$$

Ist nämlich δ die zu p und t entnommene Zahl der Tabelle, so hat man zu setzen $v_0 = v(1 + \delta)$.

t	p = 700	710	720	730	740	750	760 mm
10°	+ 0,009	+ ,024	+ ,038	+ ,053	+ ,068	+ ,082	+ ,097
15°	— ,013	+ ,002	+ ,016	+ ,030	+ ,044	+ ,059	+ ,073
20°	— ,035	— ,021	— ,007	+ ,007	+ ,021	+ ,035	+ ,049
25°	— ,058	— ,045	— ,031	— ,017	— ,004	+ ,010	+ ,024

Beispiel. $v = 198$ cm³ Knallgas in $\tau = 117$ sec bei $t = 17{,}8^0$ und $b = 754$ mm. Flüssigkeitssäule (20% H_2SO_4) unter dem Gase $h = 112$ mm. Also Druck des feuchten Gases $p = 754 - 112/12 = 745$ mm Hg. Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei $17{,}8^0$ (Tab. 13) $e = 15{,}1$, also Druck des trockenen Gases $p_0 = 745 - 0{,}88 \cdot 15{,}1 = 732$ mm. Das auf 0° und 760 mm reducirte Volumen trockenen Knallgases also

$$m = \frac{198}{1 + 0{,}00367 \cdot 17{,}8} \cdot \frac{732}{760} = 179{,}0 \text{ ccm}$$

und

$$i = \frac{1}{0{,}1740} \frac{179{,}0}{117} = 8{,}79 \text{ A}.$$

Oder: Die Tabelle gibt für 745 mm bei 15° $\delta = + 0{,}051$, bei 20° $+ 0{,}029$, also bei $17^0{,}8 = + 0{,}038$. Also

$$v_0 = 198 \cdot 1{,}038 = 205{,}5 \quad \text{und} \quad i = 5 \cdot 205{,}5/117 = 8{,}78 \text{ A}.$$

IV. Jodvoltameter.

In 10 bis 15% Lösung von ZnJ_2 befindet sich ein amalgamirter Zinkstab, mit Pergamentpapier umhüllt, als Kathode, ein Platinblech als Anode am Boden. Das ausgeschiedene Jod wird mit Natriumthiosulfatlösung ($Na_2S_2O_3$) titrirt (Herroun). Von 0,1 normaler Lösung entsprechen 0,1036 verbrauchte ccm der Silbermenge 1,118 mg, d. h. der durchgegangenen Strommenge 1 A.sec.

Vgl. hierüber und über Quecksilbervoltameter Danneel, ZS. f. Elektroch. 4, 154. 1897.

88. Strommessung durch Kompensation eines Normalelementes.

In der Leitung eines Stromes i mögen zwei Punkte, zwischen denen keine elektromotorische Kraft liegt, mit A und B bezeichnet werden; der (positive) Strom trete bei A in diese Strecke der Leitung ein und R sei der Widerstand zwischen beiden Punkten. Dann ist nach **80** I, 4 die Spannung in A um Ri gröfser als in B; es besteht zwischen den Punkten eine Spannungsdifferenz $E = Ri$. Diese Beziehung wird zur absoluten Messung von i jetzt meistens, und zwar in der Weise gebraucht, dafs man den Widerstand im Stromkreise sucht, zwischen dessen Enden eine bekannte Spannungsdifferenz herrscht, die z. B. durch ein Normalelement (S. 350) gegeben ist. — Vgl. auch **103**, Kompensationsapparat.

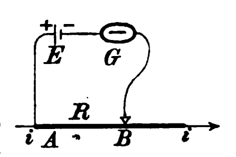
Das Normalelement E nebst einem Galvanoskop G wird an die Enden eines Teiles der Stromleitung, dessen Widerstand man in beliebiger, bekannter Weise reguliren kann, so angelegt, dafs es dem Strome entgegenwirkt, welcher ohne das Element in der Nebenleitung entstehen würde. Der Zink- oder Cadmiumpol des Elementes ist also mit dem Punkte B zu verbinden. Jetzt wird der Widerstand R gesucht, welcher zwischen den beiden Punkten bestehen mufs, um den Strom in dem Galvanoskop der Nebenleitung zum Verschwinden zu bringen. Dann ist also die gesuchte Stromstärke i in der Hauptleitung $i = E/R$, wo E die Spannung (el. Kraft) des Normalelements bedeutet. Den veränderlichen Widerstand R liefert ein Schleifkontakt oder für genaue Messungen ein Rheostat.

Als Normalelement kann mit mäfsigem Anspruch an die Genauigkeit ein Akkumulator ($E = 2{,}02$ V) auch wohl ein Daniell-Element ($E = 1{,}1$ V) dienen. In diesem Fall besteht keine Schwierigkeit. Bei den Quecksilberelementen mit Zink (Clark) oder Cadmium (Weston; vgl. S. 350) mufs man aber bei dem Ausprobiren des kompensirenden Widerstandes beachten, dafs diese Elemente nur sehr geringe Ströme vertragen, ohne ihre el. Kraft für einige Zeit zu ändern. Während des Ausprobirens ist also einem solchen Normalelement ein grofser Widerstand so lange vorzuschalten, bis man der Kompensation nahe gekommen ist.

Zu vermeiden sind Fehler aus der Stromwärme in R.

I. Verfahren mit einem Schleifkontakt. In der Stromleitung befinde sich ein blanker Draht, dessen Widerstand für

seine Längeneinheit in Ohm bekannt ist. An das eine Ende des Drahtes und an den Schleifkontakt legt man Normalelement und Galvanoskop in der beschriebenen Weise an und sucht die Stellung des Kontaktes, bei welcher der Strom verschwindet. Nennt man R den Widerstand der alsdann eingeschalteten Drahtstrecke, so ist $i = E/R$.



Dies folgt auch aus der zweiten Kirchhoff'schen Regel (**80** I). Es mufs nämlich in dem Kreise, welcher E und R enthält, da in der Nebenleitung der Strom Null ist, $iR = E$ sein.

II. Verfahren mit einem Rheostaten. In der Leitung des zu messenden Stroms i befinde sich ein Rheostat, an dessen Enden die Nebenleitung mit E und G angelegt wird. Man zieht nun so viel Widerstand R, dafs der Strom in G verschwindet, dann ist $i = E/R$.

Hier ist jedoch zu beachten, dafs durch das Ziehen von R der Hauptstrom selbst geändert wird. Um dies zu verhindern mufs aus der Hauptleitung jedesmal so viel Widerstand ausgeschaltet werden, wie man in R einschaltet; in den Hauptstrom mufs also zu diesem Zweck noch ein Rheostat eingeschaltet sein.

Eine gewöhnliche Anwendung des Verfahrens wird die Prüfung eines Strommessers sein. In diesem Falle kommt es nicht auf ganz bestimmte Stromstärken an, also bedarf man im Hauptkreise nur einiger Regulirwiderstände für die Stromstärke.

III. Nebenschaltung; besonders für starke Ströme. An einen bekannten Widerstand R der Hauptleitung, welcher so grofs sein mufs, dafs $Ri > E$ (also wenn E ein Normalelement, für $i = 100$ A z. B. $R = 0{,}02$ Θ), wird eine Abzweigung zu einem Rheostaten gelegt. Der Übergangswiderstand braucht nur klein zu sein gegen den Gesamtwiderstand der Abzweigung. Der letztere heifse R', während r' der Widerstand ist, an den man nun eine zweite Abzweigung mit Element und Gal-

vanoskop anlegen mufs, um hier den Strom Null zu erhalten. Dann ist

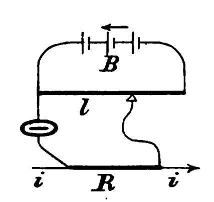
$$i = E(R + R')/(Rr').$$

Folgt aus $(i - i')R = i'R'$ und $i'r' = E$, wenn i' der Strom in der Abzweigung.

Wenn R' grofs gegen R, so wird durch Stöpseln in R' der Strom i wenig geändert.

IV. Übertragung. Irgend eine konstante Säule B (Akkumulatoren) wird durch einen konstanten Widerstand mit Schleifkontakt geschlossen. An diesen Strom legt man zunächst ein Normalelement (E) und ein Galvanoskop so an, dafs der Zweig stromlos ist; die Drahtlänge zwischen den Abzweigungspunkten sei für diesen Fall $= l_0$, also E/l_0 das Potentialgefälle auf dem Draht. Das Normalelement wird nun entfernt.

Nunmehr kann derselbe Draht mit dem Strome seiner Hilfsbatterie B, dessen Konstanz nötigenfalls mit irgend einem Strommesser geprüft wird, zur Messung eines anderen Stromes i gebraucht werden. Von einem bekannten Widerstande R in der Leitung des letzteren zweigt man nämlich durch das Galvanoskop und ein solches Stück l des Rheostatendrahtes ab, dafs der Strom im Galvanoskop verschwindet (Fig.). Dann hat man offenbar



$$i = \frac{E}{l_0} \cdot \frac{l}{R}.$$

Über die Strommessung mit Kompensationsapparaten, welche den Gesamtwiderstand automatisch konstant halten, vgl. **103**.

89. Prüfung eines Strommessers. Empirische Bestimmung eines Reduktionsfaktors.

Die in der Überschrift genannten Aufgaben sind identisch mit der Aufgabe, eine Stromstärke in einer Leitung zu messen, in die ein zu prüfender Strommesser eingeschaltet ist. Die Aufgabe ist also eigentlich in **81**, **87** und **88** enthalten. — Strommesser von geeigneter Beschaffenheit werden auch von der P. T. Reichsanstalt geprüft.

Die Teilung auf dem Zifferblatt eines Stromzeigers prüft man an einer den Umständen entsprechenden Anzahl von Punkten. Daraus wird eine Tabelle für die ganze Teilung am einfachsten graphisch abgeleitet (**6**), indem man die beobachteten

Teilstriche als Abscissen, die zugehörigen Stromstärken oder auch die Korrektionen der Angaben auf Stromstärke als Ordinaten einträgt. Die so festgelegten Punkte in der Zeichnung, welche einen regelmäfsigen Verlauf zeigen werden, verbindet man durch eine Kurve und entnimmt aus dieser eine Tabelle für jeden Teilstrich oder von 10 zu 10 Teilstrichen etc.

Ist das Gesetz bekannt, nach welchem die Stromstärke mit dem Ausschlage wächst, so braucht nur der Reduktionsfaktor $\mathfrak{C}$ durch eine einzige Beobachtung eines Ausschlages e bei einer bekannten Stromstärke i ermittelt zu werden. Bei dem Spiegelgalvanometer (83) ist z. B. $i = \mathfrak{C} \cdot e$, also $\mathfrak{C} = i/e$; bei einem Tangentengalvanometer $i = \mathfrak{C} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, also $\mathfrak{C} = i/\operatorname{tg} \alpha$; bei einem Dynamometer $i = \mathfrak{C} \cdot \sqrt{e}$, also $\mathfrak{C} = i/\sqrt{e}$ zu berechnen.

Über Abweichungen von der Proportionalität vgl. 83.

$\mathfrak{C}$ ist bei demselben Spiegelgalvanometer natürlich dem Skalenabstande A umgekehrt proportional. Absoluter Reduktionsfaktor $\mathfrak{F}$ heifst der Faktor, welcher mit einer in absolutem Winkelmafs gemessenen (Anh. 3) Ablenkung φ multiplicirt die Stromstärke gibt. Da nach 25 $\varphi = e/(2A)$, so ist also $\mathfrak{F} = \mathfrak{C} \cdot 2A$ oder $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}/(2A)$. Aus dem ein für allemal bestimmten $\mathfrak{F}$ wird hieraus $\mathfrak{C}$ für den jeweiligen Skalenabstand gefunden.

Es kommt vor, dafs man ohne Anspruch auf eine definirte Einheit der Stromstärke, zwei Galvanometer nur auf einander reduciren will. Die Aufgabe ist durch diese Vorschriften in leicht ersichtlicher Weise mit erledigt.

Prüfung durch ein Normalinstrument von ungefähr gleicher Empfindlichkeit.

a) In gewöhnlicher Schaltung. Man schaltet das zu prüfende und das Normalinstrument hinter einander, ev. mit einem Rheostaten in den Stromkreis einer geeigneten Batterie und regulirt den Strom mittels der Anzahl der Elemente und mit dem Rheostaten auf die gewünschten Stärken.

b) Durch successives Einschalten; nur für empfindliche Galvanometer genau und bequem. Es werde dieselbe konstante Säule folgeweise durch das eine und das andere Instrument geschlossen. Die beiden Gesamtwiderstände seien W und W_1 etc. Dann ist $C : C_1 = \alpha_1 W_1 : \alpha W$.

Prüfung durch ein Normalinstrument von sehr abweichender Empfindlichkeit.

c) Mit Abzweigung. Man verfährt wie oben, versieht aber das empfindlichere der beiden Instrumente mit einer Abzweigung (**86**), die von dem Strome nur einen bekannten Bruchteil durch das Instrument fliefsen läfst. Dieser Bruchteil beträgt $z/(z+\gamma)$, wenn z den Widerstand der Abzweigung, γ den des abgezweigten Galvanometers bedeutet, wobei in γ zugleich ein dem Galvanometer ev. zugeschalteter Widerstand mit inbegriffen sei. Die Angaben dieses Instruments sind also mit $\frac{(z+\gamma)}{z}$ oder $1+\frac{\gamma}{z}$ zu multipliciren und dann mit denen des anderen Instruments zu vergleichen.

d) Im Nebenschlufs. Ein Strom werde durch beide Galvanometer nebeneinander verzweigt, nötigenfalls unter Einschaltung von Rheostatenwiderständen. Die Gesamtwiderstände der Zweige seien w und w_1 u. s. w. Es ist

$$C : C_1 = \alpha_1 w_1 : \alpha w.$$

Meistens empfiehlt sich die Anwendung von Kommutatoren, besonders auch, um Wechselwirkungen der Galvanometer zu eliminiren.

e) Zwei Windungslagen I und II desselben Instruments reducirt man auf einander, indem man denselben Strom durch beide hintereinander schickt: erstens gleichsinnig, Ausschlag $=\alpha$; alsdann II kommutirt, Ausschlag $=\alpha'$. Es ist dann $\alpha : \alpha' = (C_1 + C_2) : (C_1 - C_2)$, also

$$C_1 : C_2 = (\alpha + \alpha') : (\alpha - \alpha').$$

Mit dem Voltameter.

Man läfst durch das Galvanometer und ein Voltameter denselben Strom eine gemessene Zeit lang hindurchgehen. Die Stromstärke findet sich nach **87**. Da der Strom nicht konstant sein wird, so beobachtet man das Galvanometer z. B. von Minute zu Minute, und nimmt schliefslich das Mittel aus den Ablesungen. Das Galvanometer (nicht das Voltameter) kann hierbei durch einen rasch wirkenden Stromwender kommutirt werden.

Zu stärkeren Strömen ist das Kupfer- oder das Knallgasvoltameter (Fig. S. 377), zu schwächeren das Silber- oder das Wasserstoffvoltameter (Fig. S. 378) geeignet. Am Galvanometer (nicht am Voltameter!) kann auch mit Abzweigung beobachtet werden, wie vor. S. unter *c*) beschrieben wurde.

Mit einer bekannten elektromotorischen Kraft.

1. Direkt. Für einen empfindlichen Strommesser hat man ein oft genügendes sehr einfaches Verfahren, indem man ihn mit einem Element von bekannter el. Kraft (**80** II) (Daniell, Akkumulator, für die allerempfindlichsten Instrumente auch Normalelemente) und mit einem bekannten grofsen Widerstande zum Strome schliefst. Beträgt die el. Kraft E V, der Gesamtwiderstand w Θ, so ist die Stromstärke $i = E/w$ A.

w besteht aus eingeschaltetem Widerstand, Galvanometer und Säule. Der letztere Teil kann oft vernachlässigt werden.

Stehen keine ausreichend grofsen Widerstände zur Verfügung, so legt man das Galvanometer an einen Nebenschlufs. z sei der Widerstand des letzteren, W der Gesamtwiderstand der Leitung ohne den Galvanometerzweig, welcher selbst den Widerstand γ habe, dann ist (aus den Kirchhoff'schen Regeln leicht abzuleiten; **80** I)

$$i = E \cdot z / (W\gamma + Wz - z^2).$$

2. Mit Kompensation. Das Verfahren ist in **88** beschrieben; s. auch **103**.

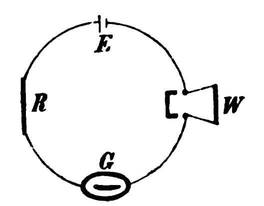
Über die ballistische Konstante eines Strommessers s. **109**.

90. Widerstandsbestimmung durch Vertauschung.

Über Widerstands-Einheiten und Rheostaten s. **80** I und IV, über sichere Verbindungen **80** III. — Über Messung sehr grofser Widerstände vgl. **94a**.

Widerstände auf ihre Gleichheit zu prüfen, wird verlangt sowohl bei der Kopierung eines Widerstandes, als auch bei der Bestimmung eines unbekannten Widerstandes mittels eines Satzes von bekannten Widerständen. Wir nehmen diese letztere Aufgabe an.

Widerstände sind gleich, wenn sie, einzeln in denselben Stromkreis eingeschaltet, dieselbe Stromstärke geben.



Man stellt also einen Stromkreis[1]) her, bestehend aus der **konstanten** Säule E (Akkumulator, Daniell), dem Stromzeiger G, dem Rheostaten R. Der zu bestimmende Widerstand W ist in der Zeichnung eingeschaltet, kann aber, etwa durch eine widerstandsfreie Nebenschliefsung (die gewöhnlichen Stromschlüssel sind oft unzuverlässig), ausgeschaltet werden. Zuerst wird die Einstellung beobachtet, während W eingeschaltet, der Rheostat aber gestöpselt, d. h. ausgeschaltet ist. Dann wird W ausgeschaltet; der Rheostatenwiderstand, welcher statt dessen eingeschaltet werden muſs, um die Nadel auf dieselbe Einstellung zurückzuführen, ist gleich dem gesuchten Widerstande W.

Wenn der Rheostat nicht erlaubt, Widerstände in genügend kleinen Intervallen herzustellen, so **interpolirt** man (5) aus den Nadeleinstellungen bei dem nächst kleineren und dem nächst gröfseren Widerstand. Sind die **Unterschiede klein**, so kann man Proportionalität zwischen Vergröfserung des Widerstandes und Verringerung des Ausschlages annehmen. Werden also die Einstellungen beobachtet:

α bei dem gesuchten Widerstande W,
α_1 und α_2 bei den Rheostatenwiderständen R_1 und R_2,

so ist $$W = R_1 + (R_2 - R_1)(\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Beispiel. Eingeschaltet W $R_1 = 14$ $R_2 = 15$ Θ
Nadeleinstellung $\alpha = 45{,}3$ $\alpha_1 = 47{,}9$ $\alpha_2 = 44{,}5$
Dann ist $W = 14 + 2{,}6/3{,}4 = 14{,}76$ Θ.

Die Methode gibt bei nicht zu kleinen Widerständen eine mäfsige Genauigkeit. Kleine Veränderungen des Elements lassen sich durch passende Wiederholung der Beobachtung und Mittelnehmen eliminiren, oder durch **rasche** Beobachtung verringern.

Wenn der zu messende Widerstand **klein** ist, so schlägt die Nadel vielleicht über die Teilung hinaus. Man kann dies

---

1) Bei den **Figurenskizzen** hat man im allgemeinen die **untere Seite nach dem Beobachter zu gerichtet** zu denken. Im vorliegenden Falle z. B. wird man das Galvanometer sich zunächst aufstellen und R und W so, dafs sie mit beiden Händen bequem zu erreichen sind. — Ovale bez. runde Leiter mit Magnetnadel deuten Stromzeiger bez. Strommesser an.

verhindern, indem man einen Teil des Rheostaten konstant als Ballast einschaltet; die Messung wird aber hierdurch unempfindlicher. Besser ist es deswegen, die Nadel z. B. durch einen konstant hingelegten Magnet zurückzutreiben. Oder man verschafft sich eine angemessen kleinere el. Kraft nach Fig. S. 352.

Zweigschaltung. Das genannte Hindernis kann auch dadurch wegfallen, dafs man, statt Galvanometer und Widerstände in denselben Strom hintereinander zu schalten, den Strom durch beide Teile verzweigt, etwa nach dem nebengezeichneten Schema. Die Gleichheit des Ausschlages zeigt wie oben die Gleichheit der ausgewechselten Widerstände an.

Ganz kleine Widerstände, die durch Abzweigpunkte definirt werden (S. 353), sind von der Methode ausgeschlossen.

91. Widerstandsbestimmung durch Strommessung.

I. Direkte Methoden.

Nr. 1 kann in Ermangelung eines Rheostaten Wert haben, Nr. 2 ist nur von historischem oder pädagogischem Interesse.

1. Eine Batterie von der bekannten el. Kraft E V werde durch den zu bestimmenden Widerstand w und ein Galvanometer geschlossen, welches die Stromstärke in Ampere anzeigt. Beobachtet werde der Strom i A, dann ist E/i der Widerstand W der gesamten Leitung in Ohm, von welchem der des Galvanometers und der Batterie abzuziehen ist, um w zu ergeben. Das Verfahren kann mit einem hinreichend empfindlichen Galvanometer besonders auf sehr grofse Widerstände angewandt werden, bei denen dann die beiden anderen Widerstände oft zu vernachlässigen sind.

Beispiel: Ein Akkumulator ($E = 2{,}02$ V, Widerstand zu vernachlässigen; vgl. S. 351), durch einen Weston-Strommesser von 1,0 Ω und den Widerstand w geschlossen, gab den Strom 0,043 A. Also ist $w = 2{,}02/0{,}043 - 1 = 46{,}0$ Ω.

2. „Ohm'sche Methode". Diese verlangt nur relative Strommessungen. Der Widerstand Batterie + Galvanometer wird eliminirt. Man schliefst, nötigenfalls unter Zufügung eines Widerstandsballastes, ein konstantes Element erstens durch das Gal-

vanometer allein; Stromstärke $= J$. Zweitens unter Zuschaltung des zu bestimmenden Widerstandes w; Stromstärke $= i_0$. Drittens, indem man w durch einen bekannten Widerstand R ersetzt; Stromstärke $= i$. Dann ist

$$w = R \frac{J - i_0}{J - i} \frac{i}{i_0}.$$

Für J, i_0, i werden die Ablenkungswinkel bez. deren Tangenten etc. gesetzt.

Die Gleichung folgt aus $E = J \cdot \gamma = i_0(\gamma + w) = i(\gamma + R)$.

II. Abzweigmethode. Sehr kleine Widerstände.

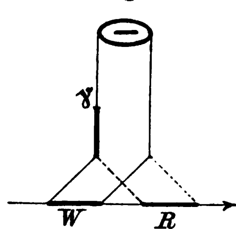
Grundlage. Besteht zwischen den Enden eines metallischen Leiters, während er von dem Strome i durchflossen wird, die Spannung e, so ist sein Widerstand $w = e/i$.

Die Abzweigmethoden sind u. A. von Bedeutung, um Widerstände von Leitern zu bestimmen, während sie durch den Strom beeinflufst werden, z. B. von elektrischen Lampen, während sie leuchten.

Nr. 2 u. 3 werden besonders auf sehr kleine Widerstände angewandt, die in der Starkstromtechnik bis zu 0,001 Ω abwärts gebraucht werden. Die Abzweigungen sind nach **80**, S. 353 einzurichten.

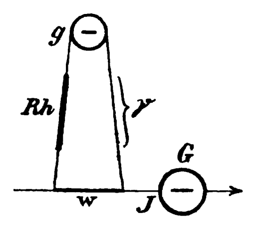
Über die Benutzung des Kompensationsapparats s. **103**.

1. Sehr oft und gut brauchbar ist das folgende Verfahren. Die zu vergleichenden Widerstände W und R werden in denselben konstanten Stromkreis hinter einander geschaltet. Man legt erst an die Endpunkte des einen, dann an die des anderen Widerstandes eine Ableitung mit sehr grofsem Widerstande durch ein empfindliches Galvanometer oder einen Spannungsmesser an. Vorausgesetzt, dafs die zu vergleichenden Widerstände gegen den Widerstand γ der Zweigleitung sehr klein sind, verhalten sie sich zu einander direkt wie die zugehörigen Stromstärken i_w und i_r oder Spannungen in den angelegten Ableitungen. Andernfalls genügt es, i_w/i_r mit $1 + R(i_w - i_r)/\gamma i_r$ zu multipliciren.



Zweckmäfsig ist die Anwendung eines Kommutators am Galvanometer, oder auch an der ganzen Leitung; aber das letztere nur, wenn man sicher ist, dafs die Galvanometernadel keine Fernwirkung von dem Hauptstrom erfährt.

2. Man leitet einen konstanten Strom durch einen Strommesser G und den zu messenden Widerstand w hinter einander. An die Enden des letzteren wird eine Ableitung durch ein empfindliches Galvanometer g und durch einen zugefügten grofsen Rheostatenwiderstand gelegt. γ sei der bekannte Gesamtwiderstand dieser Ableitung; J sei die Stärke des Stammstromes, i diejenige in der Ableitung. Dann ist der gesuchte Widerstand $w = \gamma i/(J - i)$.



Es genügt, wenn die Angaben beider Strommesser relativ zu einander richtig sind.

3. Die obige Ableitung enthalte einen Spannungsmesser (**101, 102**) vom Widerstande γ Θ und zeige die Spannung P V. Die Stärke des Stammstromes betrage J A. Dann ist der gesuchte Widerstand gleich $\frac{P}{J - P/\gamma}$ Θ. Die Methode unterscheidet sich von Nr. 2 nur durch den Namen Spannungsmesser.

Obige Gleichungen werden durch die Ohm-Kirchhoff'schen Gesetze (**80** I) bewiesen.

Elektrometrische Methoden siehe **126** sowie **130**.

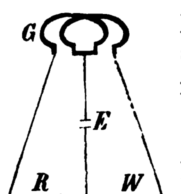
92. Widerstandsbestimmung mit dem Differentialgalvanometer.

Die Methoden **92** und **93** sind empfindlicher als die vorigen und von der Konstanz einer Batterie unabhängig.

Zwei Widerstände sind gleich, wenn sie, als Zweig-Leitungen neben einander in einen Stromkreis eingeschaltet, den Strom in zwei gleiche Teile spalten. Die Gleichheit beider Ströme wird mittels des Differentialmultiplikators (Becquerel) untersucht, der aus zwei gleich langen, mit einander aufgewundenen Drähten besteht. Leitet man durch den einen Draht einen Strom, durch den zweiten Draht einen anderen Strom in entgegengesetzter Richtung, so bleibt die Nadel in Ruhe, wenn die Ströme gleich sind.

I. Vergleichung gleicher Widerstände.

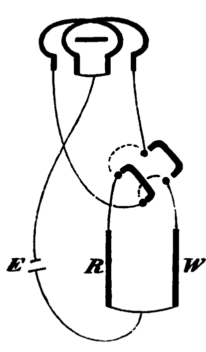
Gewöhnliche Schaltung. Die Verbindungen zum Zwecke der Widerstandsbestimmung zeigt die Figur. Bei G sind schematisch die beiden Windungen des Galvanometers mit ihren End-



punkten angegeben (welche letztere auch anders angeordnet sein können, was man ausprobiren mufs). In die beiden mittleren Enden verzweigt sich der Strom des Elements E, so dafs die Zweigströme die Windungen in entgegengesetzter Richtung durchfliefsen. Von den anderen Enden aus ist der eine Zweigstrom durch den zu bestimmenden Widerstand W, der andere durch den Rheostaten R geführt, worauf beide sich am anderen Pol des Elements wieder vereinigen. Die Verbindungsdrähte nach W und diejenigen nach R wählt man von gleichem Widerstande.

Der Rheostatenwiderstand, welchen man einschalten mufs, um die Galvanometernadel auf ihre Ruhelage zu bringen, ist gleich dem Widerstande W. Gibt der Rheostat nicht genau den gleichen Widerstand, so wendet man das Interpolationsverfahren von S. 386 an.

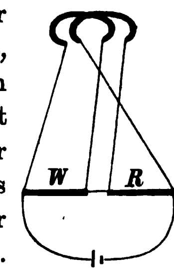
Prüfung des Differentialgalvanometers. 1) Die Bedingung, dafs die Ströme gleich sind, wenn die Nadel keinen Ausschlag gibt, prüft man dadurch, dafs man denselben Strom durch beide Windungen in entgegengesetzter Richtung leitet, indem man (von links nach rechts gezählt) die Drahtenden Nr. 1 und 2 mit einander, 3 und 4 je mit einem Pole der Säule verbindet. Die Nadel mufs dann ruhig bleiben. 2) Die Widerstände der beiden Windungen, die ja zu den abzugleichenden Stücken hinzukommen, müssen gleich sein. Dies konstatirt man nach der vorigen Prüfung dadurch, dafs man den Strom einer Säule sich nach dem in der obigen Figur gegebenen Schema, aber ohne die Einschaltung von Widerständen, nur durch die beiden Windungen verzweigen läfst. Die Nadel mufs wieder in Ruhe bleiben. — Eine Berichtigung des Instrumentes mittels Hinzufügens ad 1) von Windungen, ad 2) von Widerständen ist in der angegebenen Reihenfolge auszuführen.



Kommutator. Von der genauen Richtigkeit macht ein Kommutator unabhängig, welcher W und R mit einander vertauschen läfst. W und R sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung die Einstellung der Nadel sich nicht ändert. Oder auch: Ist R ein Rheostat, und findet man, dafs die Nadel ruhig bleibt, wenn R_1 eingeschaltet ist, bei umgelegtem Kommutator aber R_2, so ist

$$W = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

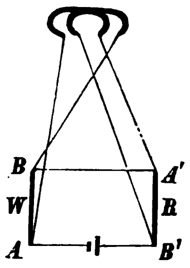
Differentialmultiplikator im Nebenschlufs. Wenn der zu messende Widerstand kleiner ist als der Widerstand in einem Zweige des Multiplikators, so erreicht man eine gröfsere Empfindlichkeit durch folgende Anordnung. Man schaltet W und R nicht neben, sondern hinter einander in den Strom einer Säule. Die beiden Multiplikatorzweige werden als Nebenschliefsungen eingeschaltet, aber so, dafs der Strom sie entgegengesetzt durchläuft (Heaviside).



Über Abgleichung kleiner Widerstände durch Nebenschalten grofser Widerstände vgl. S. 354.

Gerade für kleine Widerstände ist die Messung mit dem Diff.-Multiplikator im Nebenschlufs nützlich, da Übergangswiderstände durch die Anwendung von Multiplikatoren von erheblichem Widerstande unwirksam werden.

Übergreifender Nebenschlufs (F. K.). Dieser eliminirt Übergangswiderstände völlig. Man vertausche in der vorigen Figur die beiden mittleren Ableitungen, so dafs jeder Multiplikator mit beiden Widerständen verbunden ist. Der Ausschlag verschwinde bei der Einschaltung von W und R_1, sodann, nachdem die Stromquelle aus AB' in BA' verlegt worden ist, bei Einschaltung von W und R_2; dann ist $W = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

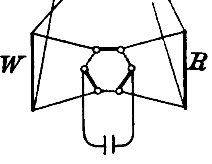


Zum Auswechseln dient ein sechsnäpfiger Kommutator, dessen Quecksilbernäpfe durch drei Kupferbügel paarweise verbunden werden, entweder so, wie die ausgezogenen, oder so, wie die punktirten Linien angeben.

Auch kleine Fehler des Differentialgalvanometers fallen mit heraus. Man kann Stücke von 0,01 Θ leicht bis auf $^1/_{10000}$ ihres Betrages vergleichen.

F. K., Wied. Ann. 20, 76. 1883.

Differentialschaltung der Stromquelle. E_1 und E_2 seien zwei gleiche Elemente (Akkumulatoren). Das Ausbleiben eines Ausschlages in G zeigt an, dafs $W = R$ ist. Kleine Unsymmetrien der Elemente werden durch ihre Vertauschung und Mittelnehmen aus beiden Resultaten eliminirt. Das für gröfsere



Widerstände gut brauchbare Verfahren kann ebenso genau arbeiten, wie das Differentialgalvanometer.

Differential-Induktor. E_1 und E_2 können zwei mit einander aufgespulte Drähte einer Induktionsrolle (**112**) sein. Mit dem einen Pol eines ballistischen Galvanometers (**109**) sind zwei einander entgegengerichtete Enden beider Drähte verbunden. — Selbstinduktion oder Kapacität in W oder R veranlassen Korrektionen.

II. Vergleichung ungleicher Widerstände (Kirchhoff).

Man schaltet die beiden zu vergleichenden Widerstände W und R hinter einander in einen Stromkreis und legt an jeden von ihnen eine Ableitung nach je einer Hälfte des Differentialmultiplikators, so, dafs beide Hälften entgegengesetzt durchströmt werden. Man schaltet zuerst in die an den gröfseren Widerstand angelegte Ableitung so viel Widerstand ein, dafs die Nadel keinen Ausschlag zeigt.

W R

Wenn man alsdann einer der Ableitungen einen Widerstand γ zufügt, so wird man der anderen einen Zuwachs ϱ geben müssen, damit wieder die Nadel in Ruhe bleibt. Dann verhält sich $W:R = \gamma:\varrho$.

Denn die Ströme in den Ableitungen sind gleich, wenn ihre Widerstände sich wie $W:R$ verhalten. Sind diese Zweigwiderstände bei dem ersten Versuch w und r, bei dem zweiten $w+\gamma$ und $r+\varrho$, so ist

$$W:R = w:r = (w+\gamma):(r+\varrho) = \gamma:\varrho.$$

Das Verfahren eliminirt zugleich die Übergangswiderstände. — Die Multiplikatoren müssen genau auf gleiche Stromstärke justirt sein. Gleicher Widerstand wird nicht verlangt. — Bei momentanem Stromschlufs können Extraströme stören.

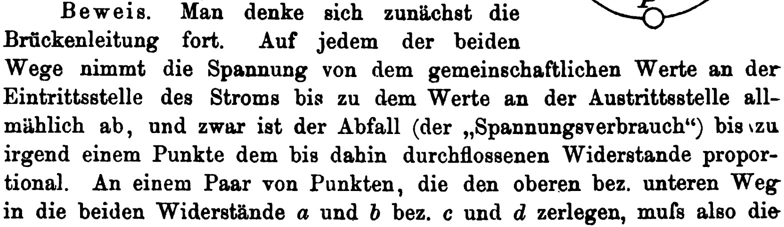
Vgl. Strecker, Wied. Ann. 25, 464. 1885.

93. Widerstandsbestimmung in der Wheatstone'schen Brücke (1843).

Wheatstone'sche Kombination nennt man die Verzweigung eines Stromes durch zwei Leitungen, zwischen welche eine Querverbindung, die „Brücke", gelegt ist, so dafs also die vier „Zweige" a, b, c, d entstehen. P bedeute den Stromerreger, dann ist der Leiter mit Q, welches einen Strom-

zeiger vorstellt, die Brücke. Durch diese fliefst im allgemeinen ein Strom, dessen Richtung und Stärke von dem Verhältnis der vier Zweigwiderstände abhängt. Der Brückenstrom verschwindet nur dann, wenn die Proportion besteht

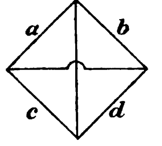
$$a : b = c : d.$$



Beweis. Man denke sich zunächst die Brückenleitung fort. Auf jedem der beiden Wege nimmt die Spannung von dem gemeinschaftlichen Werte an der Eintrittsstelle des Stroms bis zu dem Werte an der Austrittsstelle allmählich ab, und zwar ist der Abfall (der „Spannungsverbrauch") bis zu irgend einem Punkte dem bis dahin durchflossenen Widerstande proportional. An einem Paar von Punkten, die den oberen bez. unteren Weg in die beiden Widerstände a und b bez. c und d zerlegen, mufs also die gleiche Spannung bestehen, sobald $a : b = c : d$ ist; folglich wird die Brücke, an diese Punkte angelegt, stromlos sein.

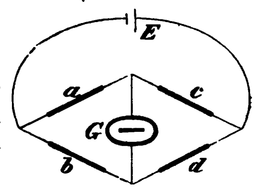
Einen anderen Beweis s. 80 I S. 347.

Durch eine leichte Überlegung sieht man, dafs diese Beziehung giltig bleibt, wenn Stromquelle und Stromzeiger mit einander vertauscht werden; am unmittelbarsten folgt dies, wenn man die Figur so umzeichnet wie hierneben. Der horizontale Durchmesser enthält das Element, der (von ihm isolirte) vertikale bildet die Brücke. Der Brücken-Strom verschwindet, wenn $a : b = c : d$, d. h. wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist. Die relative Lage der Widerstände a, d und b, c ist aber gegen beide Durchmesser dieselbe und es mufs also auch, wenn im vertikalen die Stromquelle liegt, bei dem Bestehen jener Gleichung der Strom im horizontalen Durchmesser verschwinden.



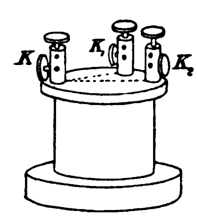
I. Brücke mit gleichen Widerstandspaaren.

a und *b* seien zwei als gleich bekannte Widerstände, c und d die beiden auf Gleichheit zu prüfenden, z. B. c ein zu bestimmender Widerstand, d ein Rheostat; E bedeutet die Stromquelle, G ein Galvanoskop in der Brücke. Dann ist c gleich dem Rheostatenwiderstand, welchen man einschalten mufs, damit der Strom in G verschwindet.



Man kann auch in die Zweige a und c die als gleich bekannten, in b und d die zu vergleichenden Widerstände bringen.

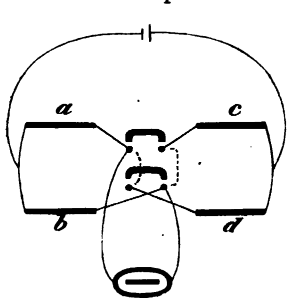
Die beiden gleichen Verzweigungswiderstände können aus zwei mit einander aufgewickelten gleichen Drähten bestehen. Zwei Enden liegen an der



Klemme K, die anderen sind mit K_1 und K_2 verbunden. Stücke von 10 bis 100 Θ etwa werden zu den meisten Zwecken passen.

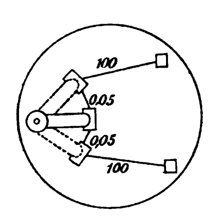
Empfindlichkeit. Je nachdem der Widerstand in der unverzweigten Leitung gröfser oder kleiner ist als in der Brücke, bietet die Anordnung $a=b$ oder $a=c$ die gröfsere Empfindlichkeit. Aufserdem hängt diese von der Gröfse der Zweigwiderstände ab, sowie von deren Verhältnis zu den abzugleichenden Widerständen und zum Widerstande des Galvanometers. Zweckmäfsig ist deswegen, über verschiedene Paare von gleichen Widerständen (z. B. 1 10 100 1000) zu verfügen, aus denen man die passenden wählt. Cet. par. ist ein Paar grofser Widerstände vorzuziehen, weil die Zuleitungen in diesem Falle weniger Sorgfalt erheischen.

Über empfindliche Anordnung vgl. z. B. Pogg. Ann. 142, 428. 1872.



Kommutator. Von der genauen Gleichheit der Widerstände a und b macht wieder die Vertauschung unabhängig: c und d sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung das Galvanoskop seine Einstellung nicht ändert. — Oder man verfährt so: d sei ein Rheostat. Um die Nadel auf Null zu bringen müsse bei der einen Schaltung der Widerstand R_1, nach der Vertauschung R_2 gezogen werden, dann ist $c=\frac{1}{2}(R_1+R_2)$. Wie man den Kommutator anzuordnen hat, zeigt die Figur.

Interpolation. Die Prüfung auf strenge Gleichheit erschöpft die wirklich vorkommenden Aufgaben nicht, die vielmehr oft darin bestehen, zwischen den beiden nahe gleichen Widerständen W und R den kleinen Unterschied zu ermitteln. Ebenso liefert der Rheostat im allgemeinen nicht den genau gleichen Widerstand, sondern es ist auch da die Differenz von W gegen das nächstliegende R zu bestimmen. In beiden Fällen wird dann, nachdem einer der Widerstände um einen bekannten kleinen Betrag abgeändert worden ist, eine zweite Beobachtung angestellt und die gesuchte Differenz nach der Regel de tri berechnet (5).

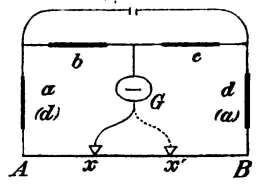


Eine zur Vergleichung nahe gleicher Widerstände bequeme Verzweigungsbüchse mit zwei Hundertern nebst einem beiderseitig vorschaltbaren Zehntel deutet die Figur an. Die Einstellungen seien: ohne Strom e_0; mit Strom ohne Vorschaltung e_1; wenn in dem zu W benachbarten Zweige 0,1 vorgeschaltet ist, e_2. Dann gilt $W/R = 1 + 0{,}001(e_0 - e_1)/(e_2 - e_1)$. — Vgl. Feufsner und Lindeck, ZS. f. Instr. 1895, 426.

Das Interpoliren mit Anwendung des Kommutators geschieht folgendermafsen. Man beobachtet bei Einschaltung von W und R die Einstellungen e_1 und e_2. Man ändert R um die relativ kleine Gröfse ϱ und beobachtet die Einstellungen e_1' und e_2'. Die Indices 1 und 2 sollen die Kommutatorstellungen bezeichnen. Dann ist (Vorzeichen beachten!)

$$W = R + \varrho \cdot \frac{e_1 - e_2}{(e_1 - e_2) - (e_1' - e_2')}.$$

Vergleichung nach Foster. a und d bedeuten die zu vergleichenden Widerstände, b und c zwei andere nahe gleiche Widerstände. AB ist ein längs einer Teilung ausgespannter Draht mit Gleitkontakt nach dem Galvanoskop. Der Strom in G verschwinde, wenn der Kontakt bei x steht. Vertauscht man a und d, so verschwinde er bei einer neuen Einstellung x'. Bedeutet r den Widerstand von 1 Sk.-Teil des Mefsdrahtes und wächst die Bezifferung von A nach B, so ist offenbar $a - d = r(x' - x)$.



r bestimmt man nach Matthiessen und Hockin, S. 398, oder man mifst einmal als a einen bekannten Widerstand, während man für d einen dicken Kupferbügel setzt.

Der Gleitkontakt arbeitet sicherer, wenn in der Figur Element und Galvanometer vertauscht werden.

Bestimmung sehr grofser oder sehr kleiner Widerstände. Hierbei kann es notwendig oder vorteilhaft sein, die Zweige a und b der ersten Figur unter I in bekanntem Verhältnis (1:10, 1:100, bei Widerständen von Millionen Ohm auch wohl 1:1000) ungleich zu wählen. Die Möglichkeit einer Kontrole durch Vertauschung fällt dann fort. Vgl. auch **94a.**

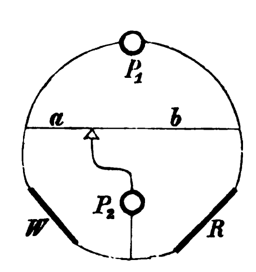
Die Thomson'sche Brückenschaltung siehe unter II.

Über Induktion oder Kapacität vgl. S. 398.

II. Vergleichung von Widerständen in der Wheatstone-Kirchhoff'schen Drahtbrücke.

Eingehende Anweisungen zum genauen Gebrauch z. B. bei Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte, 1898, S. 38—51.

In der Zeichnung sollen W und R die zu vergleichenden Widerstände, a und b zusammen einen ausgespannten gut cylindrischen



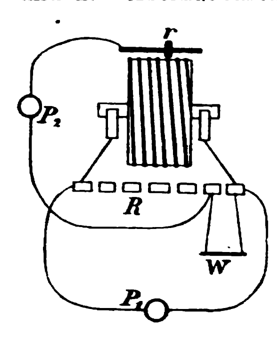
Draht bedeuten, bei welchem man die Widerstände den Längen proportional setzen kann. An dem Drahte liegt ein Gleitkontakt, von welchem die Leitung nach P_2 und von da zwischen die Widerstände W und R geführt ist.

P_1 und P_2 bedeuten die Stromquelle und das Galvanoskop. Es ist im Princip gleichgiltig, welcher von beiden Punkten das Galvanoskop, und welcher die Stromquelle enthält. Unter Umständen kann die Empfindlichkeit in dem einen oder anderen Falle größser sein; vgl. S. 394. Bringt man die Stromquelle nach P_2, so funktionirt der Schleifkontakt sicherer, was eine grofse Annehmlichkeit beim Arbeiten ist; auch bleiben Thermokräfte des Kontaktes unschädlich. Fehler von einer Erwärmung des Drahtes durch den Strom werden bei der anderen Anordnung leichter vermieden.

Durch Probiren wird nun das Verhältnis zwischen a und b gesucht, bei welchem das Galvanoskop keinen Strom anzeigt. Dann ist $W:R = a:b$.

Den Quotienten a/b s. in Tab. 52 oder in den ausführlicheren Obach'schen Hilfstafeln, München 1879; $\lg a/b$ auch bei Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte, Tab. 18. Die Teilung am Mefsdraht kann auch gleich das Zahlenverhältnis a/b geben, vgl. S. 412.

Die Widerstände der Anschlufsdrähte, die zu R und W hinzukommen, haben offenbar keinen Einflufs, wenn sie sich wie $R:W$ verhalten. Nach einem Vorversuch gleicht man daher die beiderseitigen Gesamtlängen der Drähte (von derselben Sorte) ungefähr diesem Verhältnis entsprechend ab; bequem ist hierfür, die Leitung nach P_2 von einer auf einem blanken Drahte zwischen W und R verschiebbaren Klemme aus zu führen.



Walzenbrücke. Bequemer und genauer als der gestreckte Mefsdraht arbeitet ein Draht, der in 10 Windungen mit je 100, an einer Trommelteilung abzulesenden Unterteilen auf eine isolirende drehbare Walze gewunden und mit deren Axenlagern leitend verbunden ist. An diese Enden kommen erstens der zu bestimmende Widerstand W und der Rheostat R (der oft gleich fest mit dem Instrument verbunden ist), und zweitens die Leitungen zu dem Stromprüfer P_1. Die Stromquelle P_2 wird an

den Schleifkontakt (das Kontaktröllchen r) und die Verbindungsstelle von R und W gelegt.

Zusatzwiderstände. Die Genauigkeit läfst sich durch Anschaltung von Widerständen erhöhen, die zur Bequemlichkeit der Rechnung passende Vielfache des Drahtwiderstandes sind. Um die Genauigkeit bei Vergleichungen in der Gegend von 1:1 sowie 1:10 zu verzehnfachen, genügen z. B. zwei Widerstände, jeder gleich dem 4,5fachen des Drahtwiderstandes, die man entweder beiderseitig oder beide einseitig zuschaltet. Vgl. F. K., Wied. Ann. 56, 177. 1895.

S. auch z. B. die Anordnung des Brückendrahtes von Siemens & Halske.

Vergleichung nahe gleicher Widerstände. Man eliminirt die im allgemeinen vorhandene Ungleichheit beider Drahthälften, indem man auswechselt und aus den beiden abgelesenen a/b und b/a das Mittel nimmt.

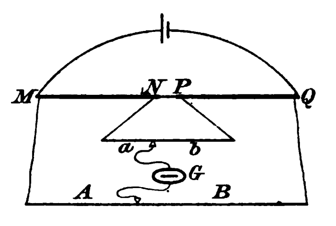
Kalibrirung des Drahtes. Hierüber vgl. **95** II.

Anwendung eines Rheostaten. Es kann an die Stelle von b ein Rheostat, an die Stelle von a ein bekannter Widerstand (1 10 100) gesetzt werden.

Sehr kleine Widerstände.

Die nicht erfüllbare Forderung, Verbindungen ganz widerstandsfrei herzustellen, wird in den folgenden Anordnungen umgangen.

a) Thomson'sche Brückenschaltung. Die zu vergleichenden Widerstände MN und PQ, z. B. zwei mit einander zu vergleichende Metallcylinder, sind an ihren Enden N und P sowohl kurz mit einander verbunden, wie mit den mefsbar veränderlichen Rheostaten- oder Schleifdraht-Widerständen ab, ebenso die Enden M und Q mit AB. Die Zuleitwiderstände brauchen nur gegen ab bez. AB klein zu sein. Die Quotienten a/b und A/B werden immer gleich grofs gehalten. Dann zeigt die Stromlosigkeit von G wieder das Verhältnis an

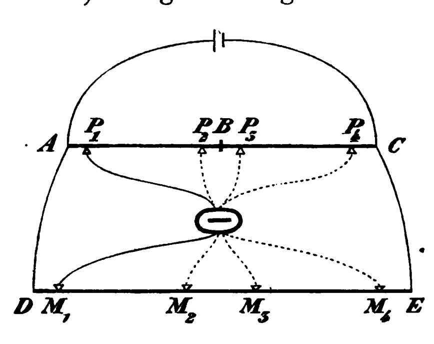


$$MN:PQ = A:B.$$

Denn die Ströme in MN und PQ, a und b, A und B sind dann offenbar paarweise gleich, etwa gleich J_0, i, J. Es folgt nun aus **80** I, B S. 347 $MN \cdot J_0 + a \cdot i = A \cdot J$ oder $MN/A \cdot J_0/J + a/A \cdot i/J = 1$. Ebenso wird gefunden $PQ/B \cdot J_0/J + b/B \cdot i/J = 1$, also, da $a/A = b/B$, folgt

$$MN/A = PQ/B, \quad \text{q. e. d.}$$

b) Vergleichung kleiner Widerstände nach A. Matthiessen und Hockin. AB und BC seien die zu vergleichenden Leiter, DE sei ein gespannter Draht. Man sucht zu einem Kontaktpunkte P_1 einen Punkt M_1, welcher den Strom im Galvanometer verschwinden läfst. Denselben Erfolg sollen die Paare P_2M_2, P_3M_3 und P_4M_4 geben. Dann verhalten sich die Widerstände



$$P_1P_2:P_3P_4 = M_1M_2:M_3M_4.$$

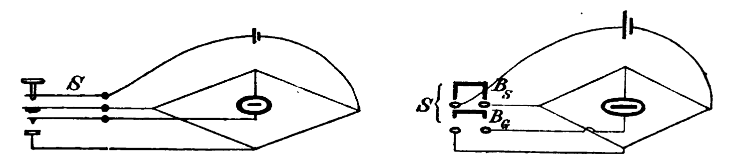
Auch hier werden Element und Galvanometer besser vertauscht.

Beweis. Der Strom Null zeigt an, dafs in den zusammengehörigen Kontaktpunkten gleiches Potential herrscht (**80** I, Nr. 4).

S. auch das Verfahren von Foster, Wied. Ann. 26, 240. 1885.

Momentaner Schlufs. Wegen der Stromwärme ist es bei Brücke (oder Differentialgalvanometer) oft geboten, kurz dauernde Ströme anzuwenden (wofür auch Induktionsstöfse (**112**) dienen können). Dieses Verfahren kann wegen Selbstinduktion oder Kapacität in aufgespulten längeren Widerständen oder gar bei der Anwesenheit von Eisenkernen Fehler bewirken.

Man vermeidet bei Batterieströmen die Fehler, wenn man durch einen Doppelschlüssel S die Verbindung in der Brücke einen Augenblick später schliefst als an der Säule. An dem Brücken-Doppelschlüssel mit Kontaktknöpfen drückt der zweite Federkontakt auf den dritten durch einen isolirenden Knopf.



Sicherer arbeitet die Quecksilberverbindung des anderen Schlüssels (Dorn), von dessen zwei Bügeln (auf demselben isolirenden Brettchen an einem Federkontakt mit Druckknopf zu denken) der eine, längere, B_S den Strom etwas früher schliefst, als B_G das Galvanometer einschaltet.

Telephon. Dieses läfst sich anstatt des Galvanometers anwenden, falls die Widerstände genügend induktions- und kapacitätsfrei sind. Vgl. **96,** I 1.

94. Widerstandsvergleichung durch Dämpfung (F. K.).

Eine innerhalb eines geschlossenen Multiplikators schwingende Magnetnadel inducirt Ströme, welche auf die Bewegung der Nadel verzögernd wirken. Das logarithmische Dekrement (**27**) kleiner Schwingungen in einem breiten Multiplikator ist konstant und dem Gesamtwiderstande $\gamma + w$ des Multiplikators und des Schliefsungsdrahtes umgekehrt proportional (**108** Gl. 8).

w_1 und w_2 mögen die zu vergleichenden Widerstände bedeuten. Beobachtet man die logarithmischen Dekremente:

λ_0, wenn der Multiplikator kurz geschlossen ist,
λ_1 bez. λ_2, wenn er durch w_1 bez. w_2 geschlossen ist,
λ' bei geöffnetem Multiplikator, also z. B. durch den mechanischen Luftwiderstand,

so ist
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_2} \frac{\lambda_2 - \lambda'}{\lambda_1 - \lambda'}.$$

Folgt aus $(\lambda_0 - \lambda'):(\lambda_1 - \lambda'):(\lambda_2 - \lambda') = 1/\gamma : 1/(\gamma + w_1) : 1/(\gamma + w_2)$.

Auch kann man aus $\gamma : w_1 = (\lambda_1 - \lambda'):(\lambda_0 - \lambda_1)$, wenn w_1 bekannt ist, einen Multiplikatorwiderstand bestimmen oder umgekehrt einen Widerstand w_1 auf γ zurückführen.

Schwingungsdauer und Dämpfung lassen sich durch Astasirung von aufsen vergröfsern (**72b**).

Bei sehr starker Dämpfung hat man eine Korrektion anzubringen, nämlich von jedem beobachteten λ abzuziehen $\frac{1}{4}\lambda^3$.

94a. Sehr grofse Widerstände; Isolationsmessungen.

Zur Messung sehr grofser Widerstände, z. B. auch der Isolationswiderstände von Kabeln oder von Isolirmaterial in Plattenform, welchem man weiche Elektroden anschmiegt, sind oft besondere Methoden notwendig. Dabei ist praktisch zu beachten, dafs die angewandten starken Batterien, falls mit den grofsen Widerständen erhebliche Kapacitäten verbunden sind, recht konstant sein müssen, wenn nicht die zur Beobachtung kommenden schwachen Ströme von Ladungs- und Entladungsströmen gestört werden sollen. Wegen der Kapacitäten darf man oft nicht mit kurzem Stromschlufs arbeiten.

Vgl. die Werke von Frölich und Raphael-Apt über Isolationsmessung.

1. Direkte Messung. Wenn genügend empfindliche Galvanometer, bez. starke Säulen sowie grofse Vergleichswiderstände zur Verfügung stehen, so können die Methoden **90** bis **93** angewendet werden; insbesondere die Brückenschaltung (**93** I) mit Zweigleitungen etwa im Verhältnis 1:1000, für Widerstände bis zu 10 Millionen, falls man Vergleichswiderstände bis 10000 besitzt.

2. Durch Teilung einer Batterie. Dieses Verfahren ist meistens am einfachsten. Eine Batterie vom Widerstande w gebe durch den zu messenden Widerstand W und ein Galvanometer vom Widerstand γ geschlossen den Ausschlag e. Der n^{te} Teil der Batterie, durch den bekannten Widerstand R ebenso geschlossen, gebe e'. Dann ist

$$W = (nR + n\gamma + w)e'/e - (\gamma + w).$$

Teilt man die Batterie so, dafs e nahe $= e'$ wird, so fällt w heraus und es wird

$$W = n(R + \gamma)e'/e - \gamma.$$

γ wird meistens nur genähert bekannt zu sein brauchen.

Zum Zwecke genauer Messung bestimmt man e' für alle n Teile der Batterie und nimmt das Mittel.

3. Aus Spannung und Stromstärke. Beträgt die Spannung einer Batterie E V und erzeugt sie, durch den Widerstand und einen Strommesser geschlossen, den Strom i A, so bekommt man den Gesamtwiderstand der Leitung $W = E/i$ Θ. Meistens wird ein Spiegelgalvanometer gebraucht werden, dann ist also $i = \mathfrak{C} \cdot e$, wenn e der Ausschlag, und $W = 1/e \cdot E/\mathfrak{C}$ Θ.

4. Mit einer Abzweigung am Galvanometer. Eine Batterie, durch den zu messenden Widerstand w und das Galvanometer vom Widerstande γ ohne Abzweigung geschlossen, gebe den Ausschlag e. Sie gebe ferner, durch den bekannten grofsen Widerstand R und das mit einem Nebenschlufs z versehene Galvanometer geschlossen, e'. Ist w_0 der Widerstand der Batterie, so hat man genau

$$w = e'/e \cdot [(R + w_0)(z + \gamma)/z + \gamma] - \gamma - w_0.$$

Bei sehr grofsen Widerständen kann γ und w_0 meistens gegen R und w vernachlässigt werden. Dann ist einfach

$$w = e'/e \cdot R(z + \gamma)/z.$$

5. Mit dem Kondensator (Siemens). Widerstände von sogenannten „Nichtleitern", z. B. von verschiedenen Sorten Guttapercha u. dgl., sind unter Umständen für galvanometrische Methoden zu grofs. Dann läfst sich die Ladungs- oder Entladungszeit eines Kondensators benutzen. Sinkt das Potential (**127**) eines Kondensators von der Kapacität c (**132**) in der Zeit t von dem Werte V_1 auf V_2, so ist der Widerstand des Entladungsweges

$$W = \frac{1}{c} \frac{t}{\lg\text{nat}\, V_1 - \lg\text{nat}\, V_2}.$$

Findet man hiernach den Wert W, wenn der Kondensator für sich allein steht, und dann W', wenn die beiden Belegungen durch den zu bestimmenden Widerstand w mit einander verbunden sind, so beträgt der letztere allein (**80**)

$$w = W\, W'/(W - W').$$

Ist c in absolutem Mafse (Farad) gegeben, so erhält man den Widerstand in ebensolchem Mafse (Ohm). Das Mafs von V ist gleichgiltig.

Beweis. Dem Potentiale V entspricht die Ladungsmenge $Q = c \cdot V$. In dem Zeitelement dt geht hiervon verloren $dt \cdot V/W = -dQ$ oder $= -c\,dV$. Hieraus erfolgt durch Integration der obige Ausdruck.

Umgekehrt kann man aus bekanntem W und der Entladungsdauer die Kapacität des Kondensators bestimmen (Siemens & Halske).

Verfeinerungen der Methode und Formeln für den Verlauf der Entladung s. bei Klemenčič, Wien. Ber. 93, 470. 1886.

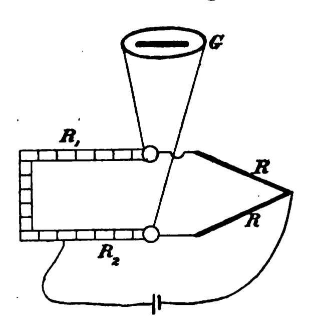
95. Kalibrirung eines Rheostaten oder eines Brückendrahtes.

I. Stöpselrheostat.

Zur Prüfung bez. Fehlerbestimmung eines Rheostaten vergleicht man diesen natürlich am einfachsten mit einem Normalrheostaten. In Ermangelung eines solchen wird man die Stücke bez. Summen von gleichem Nennwert mit einander vergleichen.

Wir nehmen zu letzterem Zwecke Brückenschaltung an. Man verbindet einen Pol des Elementes mit einem Klotz der Stöpselvorrichtung. Fehlt dem Rheostaten die Vorkehrung zu diesem Zwecke, so findet man an der Befestigungsstelle der Drähte eine Gelegenheit oder man schabt eine Stelle zu diesem Zwecke blank. Es ist nicht notwendig, dafs dieser Kontakt ganz widerstandsfrei sei.

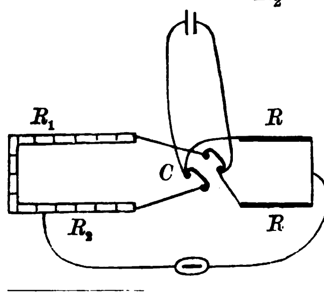
Vom anderen Pole des Elementes führt man eine Verbindung zwischen zwei gleiche Verzweigungswiderstände R und R (s. die Fig. S. 394, oben). Die kurzen Drähte von R nach R_1 und R_2 sollen gleichen Widerstand haben, bez. sie können ev. benutzt werden, um eine Ungleichheit von R und R auszugleichen. Beiderseitig von der Verzweigungsstelle am Rheostaten werden nun die zu vergleichenden, dem Nennwerte nach gleichen Widerstände R_1 und R_2 gezogen. Man beobachtet die Nadeleinstellung e. Man schaltet zu dem Widerstande R_1 (womöglich dem kleineren) einen relativ kleinen bekannten Widerstand δ (1 oder 0,1 oder 0,01) zu und beobachtet die Nadeleinstellung e'. e_0 sei die Ruhelage ohne Strom. Dann ist



$$R_2 = R_1 + \delta \frac{e - e_0}{e - e'}.$$

Bequem ist es, die kleine Änderung statt an R_1 in konstantem Verhältnis an den R vornehmen zu können; vgl. die Verzweigungsbüchse S. 394, unten.

Für RR kann endlich auch ein Draht mit Schleifkontakt benutzt werden, dann findet man (vgl. S. 396) $R_1 : R_2$ durch eine einzige Einstellung. Anstatt mit der Obach'schen Tafel zu rechnen, läfst sich aus einer Einstellung, die um ε T.Str. von der (richtigen) Mitte der Brücke abweicht, dieses Verhältnis auch berechnen als $\frac{R_1}{R_2} = \frac{500+\varepsilon}{500-\varepsilon} = 1 + 0{,}004 \cdot \varepsilon$ (vgl. S. 9).



Kommutator (C in der Figur[1]). Dieser eliminirt Ungleichheiten der R durch Auswechseln von R_1 und R_2. Seine Kontakte müssen widerstandsfrei sein; die kurzen Drähte von C nach R_1 und R_2 sollen gleichen Widerstand haben. Man beobachte die Einstellungen e_1 und e_2 bei den

1) Die Drähte waren in früheren Auflagen an unrichtige Verzweigungspunkte von C geführt.

Kommutatorstellungen I und II, schalte nun zu R_1 einen relativ kleinen bekannten Widerstand δ zu und beobachte die Einstellungen e_1' und e_2'; dann ist

$$R_2 = R_1 + \delta \frac{e_1 - e_2}{(e_1 - e_2) - (e_1' - e_2')}.$$

Etwaige Thermokräfte fallen in obiger Anordnung heraus.

Auch auf eine Schleifbrücke läfst sich der Kommutator anwenden; der halbe Unterschied der Einstellungen vor und nach dem Kommutiren gibt die Abweichung der richtigen Einstellung von dem Brückenmittelpunkt.

Das Differentialgalvanometer vertritt die Brücke mit etwa gleicher Genauigkeit. Die Anordnung siehe **92** I bei „Kommutator". *RW* ist der Rheostat.

Kleine Widerstände. Für Stücke von 0,1 bis 1 oder 2 ist am besten das Differentialgalvanometer im Nebenschlufs oder im übergreifenden Nebenschlufs (S. 391; s. auch die Herstellung kleiner Widerstandsänderungen S. 354). Einfacher und hier meist genau genug ist die Abzweigungsmethode **91** II 1, welche den Vorteil bietet, alle notwendigen Bestimmungen ausführen zu können, auch wenn der kleinste Widerstand nicht doppelt vorhanden ist. Man kann z. B. $1+4$ mit $2+3$ oder auch 1 mit 2 vergleichen.

Verschraubungen an den Widerständen sind sorgfältig zu überwachen. Über die Behandlung der Stöpsel s. **80** IV. — Von Zeit zu Zeit ist die Kalibrirung, besonders wenn starke Ströme durchgegangen sind, zu wiederholen.

Berechnung der Korrektionstabelle. Es werde die übliche Anordnung 5, 2, 2, 1 vorausgesetzt; die einzelnen Stücke werden durch Indices bezeichnet und unterschieden. Wir nehmen noch einen zweiten Einer an, wofür etwa die Summe der Zehntel genommen werden kann. Die Beobachtung habe nun ergeben:

$$\begin{aligned} 5' &= 2' + 2'' + 1' + \alpha \\ 2'' &= 2' \qquad\qquad\; + \beta \\ 2' &= 1' + 1'' \qquad + \gamma \\ 1' &= 1'' \qquad\qquad\; + \delta. \end{aligned}$$

Aufserdem sei anderweitig, nämlich durch eine Vergleichung mit einem Normalwiderstand oder mit der höheren Reihe des Rheostaten gefunden, dafs die Summe einen Fehler ϱ besitzt,

$$5' + 2' + 2'' + 1' = 10 + \varrho.$$

Man berechne $\sigma = \frac{1}{15}(\alpha + 2\beta + 4\gamma + 6\delta - \varrho)$, so wird (vgl. **14**) die Korrektionstabelle

$$5' = 5 - 5\sigma + \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta$$
$$2'' = 2 - 2\sigma + \beta + \gamma + \delta$$
$$2' = 2 - 2\sigma + \gamma + \delta$$
$$1' = 1 - \sigma \quad + \delta$$
$$\text{und } 1'' = 1 - \sigma.$$

Ebenso verfährt man mit den Zehnern, Hundertern u. s. w. — Bei Rheostaten, welche von der Temperatur beeinflufst werden, wird es sich im Interesse kleiner Korrektionszahlen empfehlen, die Summe der sämtlichen Widerstände (oder auch der vier gröfsten) als richtig anzunehmen; ein gemeinsamer Korrektionsfaktor reducirt, wenn nötig, die aus der Tabelle korrigirten Resultate auf absolute Werte. Über den Einflufs der Temperatur siehe **95a** und Tab. 30.

Bei der Anordnung 4, 3, 2, 1 vergleicht man 4 mit 3 + 1, 3 mit 2 + 1, 2 mit 1 + 1′ und 1 mit 1′, wo unter 1′ die Summe der Zehntel verstanden ist, oder auch 4 + 1 mit 3 + 2 (vgl. oben).

Für Dekaden mit 10 gleichen Widerständen ergibt sich das Verfahren von selbst.

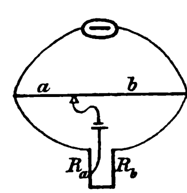
Über eine Fehlerquelle wegen ungeeigneter Ableitungen von den Klötzen zu den Widerständen s. Dorn, Wied. Ann. 22, 558. 1884.

Drahtwiderstände werden von der P.-T. Reichsanstalt beglaubigt.

II. Kalibrirung eines Drahtes.

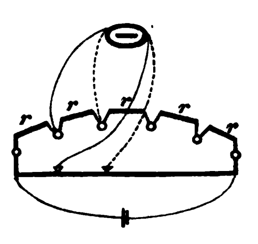
Ausführlicheres bei Kohlrausch u. Holborn, Elektrolyte S. 45—51.

1. Mit dem Rheostaten. Am einfachsten erzielt man mit einem kalibrirten Rheostaten die Korrektionstabelle für den Draht so: Man schaltet den Draht ab mit einem Rheostaten zusammen, wie die Figur anzeigt. Man zieht im Rheostaten Widerstandsverhältnisse $R_a : R_b$ (etwa nach und nach 1:9; 2:8; 3:7 etc.; nicht zu kleine Stücke) und bestimmt so je das entsprechende Verhältnis $a : b = R_a : R_b$. Einige Punkte nahe den Enden werden aufserdem mit $R_a : R_b = 1 : 99$ u. dgl. bestimmt. — Die Zuleitungen zu R_a und R_b wählt man hinreichend dick, dafs man sie vernachlässigen darf.



2. Mit wandernden Drahtstücken; vgl. S. 398 (Strouhal und Barus). Es werden einzelne, nahe gleiche Widerstände r

in der Anzahl der zu vergleichenden Drahtstrecken durch Quecksilbernäpfe hinter einander geschaltet. Man vergleicht eines jener Widerstandsstücke mit den verschiedenen Strecken des Drahtes, wozu man das erste Stück nach jeder Bestimmung um einen Platz vorschiebt. Wied. Ann. 10, 326. 1880.

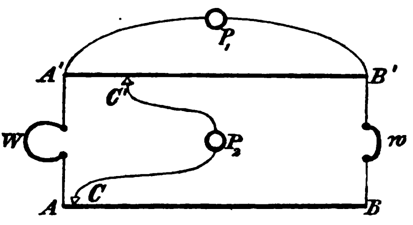


Dabei erhält man also auf dem Drahte lauter Stücke von gleichem Widerstande.

3. Mit einer Anzahl nahe gleicher Widerstände (Heerwagen). Eine Anzahl N (etwa 10) nahe gleicher Widerstände (Drahtstücke mit amalgamirten Kupferbügeln), mit Quecksilbernäpfen beliebig hinter einander zu verbinden, liefert jedes Verhältnis $m:n$ des Drahtes, wo $m+n=N$ ist, in folgender Weise. Zwei Gruppen von m und n Stücken werden mit den Drahtabschnitten verglichen. Man vertauscht dann zwischen den beiden Gruppen einzelne Stücke, vergleicht wieder, u. s. f., bis jedes Stück sich $n$mal in der einen, $m$mal in der anderen Gruppe befunden hat. Man erhält so $m+n$ unabhängige Einstellungen des Kontakts, deren Mittel den Draht genau im Verhältnisse $m:n$ teilt.

Heerwagen, ZS. f. Instr. 10, 170. 1889. Daselbst auch Erörterungen über die Genauigkeit verschiedener Methoden.

4. Nach Foster. AB ist der zu kalibrirende Draht, $A'B'$ ein Hilfsdraht. P_1 und P_2 bedeuten Galvanoskop und Stromquelle. Der Widerstand W ist gleich einem Bruchteil, etwa $1/10$ oder $1/20$ von AB; w bedeutet einen Bügel von dickem Kupferdraht. W und w lassen sich widerstandsfrei auswechseln.



Man setzt den Kontakt C nahe an A und schiebt den Kontakt C' so, dafs der Strom im Galvanoskop verschwindet. Man wechselt W und w aus, läfst C' stehen und verschiebt C, bis der Strom verschwindet: der Widerstand der Verschiebungsstrecke des Drahtes ist offenbar $=W-w$. Nun läfst man C stehen, bringt W und w an ihren früheren Ort, verschiebt C' bis zum Strome Null, wechselt dann

W und w wieder aus und bestimmt durch Verschieben von C die zweite Drahtstrecke, deren Widerstand $= W - w$ ist, u. s. f.

Foster, Wied. Ann. **26**, 239. 1885; früher J. Soc. Telegr. Eng.

5. Mit einem wandernden Schneidenpaar. Man sendet durch den Draht einen konstanten Strom. Ein empfindliches Galvanometer mit grofsem Widerstande sei mit zwei Schneiden verbunden, welche einen konstanten Abstand von einander haben. Man setzt das Schneidenpaar auf verschiedene Strecken des Drahtes; den beobachteten Galvanometerausschlägen sind die Widerstände der Strecken proportional (**91** II). Die Konstanz des Stromes mufs geprüft werden, am einfachsten, indem man von Zeit zu Zeit auf dieselbe Strecke zurückkommt. An Walzendrähten ist die Methode besonders leicht auf die einzelnen ganzen Windungen anzuwenden.

Um nur zu prüfen, ob ein Draht gutes Kaliber hat, bewegt man die beiden Schneiden längs des Drahtes und sieht, ob das Galvanometer konstant bleibt (Braun).

6. Mit dem Differentialgalvanometer. Man versieht die Zuleitungen zu jedem Multiplikator mit Schneiden und setzt die letzteren auf den Draht so auf, dafs die Nadel in Ruhe bleibt. Die beiden Strecken haben dann gleichen Widerstand (S. 391). Vorausgesetzt ist in Nr. 5 und 6 ein so grofser Widerstand der Multiplikatorzweige, dafs die Übergangswiderstände keine Fehler geben.

Korrektionstabelle. Der Brückendraht sei in 1000 Teile geteilt. Hat man durch eins der vorigen Verfahren ermittelt, dafs dem Punkte a des Drahtes, welchem also ohne Korrektion das Widerstandsverhältnis $a:(1000-a)$ entsprechen würde, in Wirklichkeit das Verhältnis $(a+\delta):[1000-(a+\delta)]$ entspricht, was die Tafeln von Obach bequem angeben, so ist also δ die zur Ablesung a zuzufügende Korrektion. Man trägt die δ zu den a in Koordinatenpapier ein und verbindet die Punkte durch eine Kurve, aus welcher die Korrektionen oder eine Korrektionstabelle genommen werden. Je dichter die Punkte, desto geringer ist die bleibende Unsicherheit.

Die dauernde Giltigkeit der Tabelle kontrolire man hauptsächlich an den Enden des Drahtes. Vgl. über einfache Kontrolen K. u. Holborn l. c. S. 50.

95a. Temperaturkoefficient eines Leiters.

Der Widerstand fast aller metallischen Leiter wächst mit der Temperatur. Hat ein Leiter bei t und t' die Widerstände w und w', so nennt man Temperaturkoefficient des Widerstandes zwischen t und t' den Faktor $\mathfrak{a}$ in der Gleichung $w' = w\,[1 + \mathfrak{a}\,(t' - t)]$.

Zur Temperaturänderung dient etwa ein mit Filz umhülltes Petroleumbad. Sind w, t und w', t' beobachtet (**92** und **93**), so ist also

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{t' - t}\,\frac{w' - w}{w}.$$

Für t wählt man meist 18^0 oder 0^0.

Soll der Koefficient genau bestimmt werden, so ist eine entsprechend empfindliche Methode erforderlich. Besonders hat man bei kleinen Widerständen auf Konstanz der Verbindungen zu sehen, auch Thermoströme auszuschliefsen.

Um eine Drahtsorte zu untersuchen, schneide man z. B. zwei Stücke Nr. 1 und Nr. 2 ab, Nr. 2 ein wenig länger. Nr. 1, dessen Widerstand $= w$ sei, wird in ein auf konstanter, gewöhnlicher Temperatur zu haltendes, Nr. 2 in ein zu erwärmendes Bad gebracht. Neben Nr. 2 wird ein Rheostat geschaltet und jedesmal dessen Widerstand R gesucht, der nun mit Nr. 2 zusammen dem konstanten Widerstande w_1 gleich ist. Findet man R für die Temperatur t und R' für t', so berechnet sich (aus den Beziehungen $1/w + 1/R = 1/w_1$ etc. leicht abzuleiten) die gesuchte Gröfse

$$\frac{w' - w}{w} = \frac{w_1}{R}\,\frac{R - R'}{R' - w_1}.$$

Stehen zwei Rheostaten zur Verfügung, so kann der eine von ihnen statt des Stückes w_1 dienen.

Besitzt man einen Normaldraht vom Widerstande W und bekanntem Temperaturkoefficienten $\mathfrak{A}$, so bringe man das zu bestimmende Drahtstück auf nahe denselben Widerstand und erwärme beide mit einander. Ist bei den Temperaturen t bez. t' der Widerstands-Unterschied, untersuchter minus Normaldraht, $= \gamma$ bez. γ', so gilt

$$\mathfrak{a} = \left(1 - \frac{\gamma}{W}\right)\left(\mathfrak{A} + \frac{1}{W}\,\frac{\gamma' - \gamma}{t' - t}\right).$$

Bei manchen Legirungen sowie für grofse Temperaturänderungen ist der Koefficient nicht konstant. Für genauere Darstellung setzt man $w_t = w_0(1 + \mathfrak{a}t + \mathfrak{b}t^2 \cdots)$.

Über Temperaturbestimmung durch Widerstandsänderung s. **48a** u. **72a**; über Elektrolyte S. 417.

Temperaturkoefficienten einiger Körper in Tab. 3a, 30 u. 31.

95b. Quecksilberwiderstände (Siemens).

Über Herstellung reinen Quecksilbers vgl. 8, 1.

Glasröhren. Der Querschnitt wird meist zwischen etwa $\frac{1}{2}$ und 3 qmm gewählt werden; man sucht durch eine vorläufige Kalibrirung mit einem Quecksilberfaden möglichst gleichmäfsige Röhren aus. Die Herstellung einer ebenen oder besser eine Spur konvexen Endfläche geschieht durch Schleifen auf einer mit der Drehbank rotirenden Kupferscheibe mit feinem wässrigem Schmirgel.

Ausmessung. Die Länge l des Kanales wird z. B. an zwei Glasplättchen gemessen, die man mit ganz dünner Kittschicht an die Endquerschnitte anklebt. Man mifst (**21**) den Abstand von zwei Punktpaaren am inneren Rande, die sich gegenüber liegen. Der mittlere Querschnitt q findet sich aus der Wägung einer eben abgegrenzten Quecksilberfüllung des ganzen Rohres (**23**, **24**).

Die Widerstandskapacität des Rohres würde bei streng cylindrischer Gestalt betragen l/q.

Kaliberkorrektion. Wegen des ungleichmäfsigen Querschnitts kommt ein Kaliberfaktor C hinzu, welcher gröfser als 1 ist. Ein Quecksilberfaden, welcher im Mittel nahe $n$mal kürzer ist als das Rohr, nehme in an einander stofsenden Strecken die Längen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ ein. In erster Annäherung ist dann

$$C = 1/n^2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \cdots + 1/\lambda_n).$$

Einen für die Rechnung bequemeren Ausdruck erhält man, wenn man $\lambda_1 = l/n + \delta_1$, $\lambda_2 = l/n + \delta_2 \cdots$ setzt, nämlich

$$C = 1 + n(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2)/l^2 - (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)^2/l^2.$$

Der Widerstand eines Quecksilberfadens von konstanter Gestalt bei der Temperatur t ist (Guillaume; Kreichgauer u. Jaeger)

$$\gamma_t = \gamma_0 (1 + 0{,}000885 \cdot t + 0{,}00000114 \cdot t^2).$$

Mit Rücksicht auf die Ausdehnung gewöhnlichen Glases hat eine Quecksilberfüllung des Rohres (l in m, q in mm^2 bei 0° gemessen) bei der Temperatur t den Widerstand

$$w = C \cdot l/q \cdot (1 + 0{,}000877 \cdot t + 0{,}00000114 \cdot t^2) \text{ Siem. E.}$$

Division durch 1,063 gibt w in Ohm [1]).

1) Anstatt einer Quecksilbersäule von 1,063 m und 1 qmm bei 0° kann man eine 1,063 m lange Säule von 0° setzen, welche 14,4521 gr wiegt.

Anordnung. Die Enden der Röhre werden mit Korken in kleine tubulirte Becher mit amalgamirten Elektroden gesteckt. Der Verschlufs wird mit Kollodium oder Guttapercha etc. gedichtet, das Ganze in ein Bad gestellt. Platinelektroden (8, 11) verunreinigen das Quecksilber nicht. Übergangswiderstände werden eliminirt, indem man den Quecksilberwiderstand zwischen zwei anderen Elektroden, die vor den stromzuführenden Elektroden stehen, mit übergreifendem Nebenschlufs (**92** I) bestimmt. — Wegen des langsamen Abflusses der Wärme durch die Glaswand sind schwache Ströme anzuwenden.

Ausbreitungswiderstand. Diesen setzt man nach **80** I. 1 in Rechnung, indem man zu der Länge des Kanales hinzufügt $0{,}80(r_1 + r_2)$, wenn r_1 und r_2 die End-Halbmesser des Kanales bedeuten.

Über genauere Formeln für Kalibrirung und praktische Regeln s. u. a. Siemens, Pogg. Ann. 110, 1. 1860; Rayleigh u. Sidgwick, Phil. Trans. 1883 I, 173; Strecker, Wied. Ann. 25, 252. 456. 1885; Benoît, Construct. des Étalons prototypes etc. Paris 1885; Weinstein, El.-techn. ZS. 1888 S. 25; Leman, Abh. d. Phys. Techn. Reichsanstalt II, 359. 1895; Jaeger, ib. S. 379; Jaeger u. Kahle, Wied. Ann. 64, 458. 1898. Besonders auch Dorn, Wahrsch. Wert des Ohm, Abh. d. P. T. Reichsanst. II, 261, auch ZS. f. Instr. 1893 Febr.-Beiheft.

96. Leitvermögen von Elektrolyten.

Ausführliches s. bei K. u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte.

Ein Cylinder von der Länge l und dem Querschnitt q aus einem Leiter vom Leitvermögen (auch wohl „spec. L.-V.") $\varkappa$ hat den Widerstand $w = 1/\varkappa \cdot l/q$.

Wir nehmen als Einheit des L.-V. das $\mathrm{cm}^{-1}\Theta^{-1}$, d. h. das L.-V. eines Körpers, dessen cm-Würfel den Widerstand 1 Θ hat; die bestleitenden wässrigen Säurelösungen kommen bei Blutwärme dieser Einheit nahe. Der Widerstand obigen Cylinders ist dann in Ohm ausgedrückt. Also wenn man, um ein L.-V. $\varkappa$ zu bestimmen, den Widerstand dieses Cylinders mifst und $= w\ \Theta$ findet, so ist

$$\varkappa = \frac{l}{q} \cdot \frac{1}{w}.$$

$1/\varkappa$ nennt man auch specifischen Widerstand des Leiters. l/q, d. h. der Faktor, welcher mit $1/\varkappa$ multiplicirt den Widerstand des cylindrischen Raumes liefert, heifst Widerstandskapacität dieses Raumes.

Jeder Raum zwischen zwei Elektroden hat in diesem Sinne eine bestimmte Widerstandskapacität, nämlich eine Zahl C, die den Widerstand zwischen den Elektroden dadurch finden läfst, dafs man sie durch das Leitvermögen des ausfüllenden Leiters dividirt. Also

$$w = C/\varkappa \quad \text{oder} \quad C = w \cdot \varkappa \quad \text{oder} \quad \varkappa = C/w.$$

Das Leitvermögen einer Flüssigkeit wird nun so bestimmt, dafs man einen

Raum von bekannter Widerstandskapacität C (vgl. S. 413) mit ihr füllt und dann seinen Widerstand w ermittelt, worauf man hat

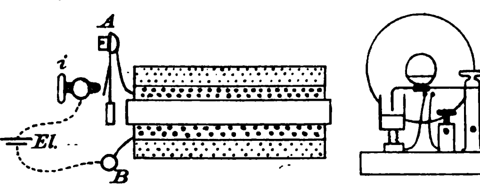
$$\varkappa = C \cdot \frac{1}{w} \, .$$

Da ein cm-Würfel Hg von 0° den Widerstand 1/10630 Θ hat, so ist ein nach dem früheren Gebrauch auf Quecksilber bezogenes Leitvermögen, um es auf $cm^{-1}\Theta^{-1}$ umzurechnen, mit 10630 zu multipliciren. Unser C ist übrigens dieselbe Zahl, wie der in Siemens-Einheiten ausgedrückte Widerstand einer Füllung mit Quecksilber von 0°, mit 10000 multiplicirt.

Polarisation der Elektroden. Wechselströme. Jeder Strom in einem Elektrolyt ist mit Zersetzung verbunden, wobei die Jonen sich an den Elektroden abscheiden. Diese Abscheidung bewirkt im allgemeinen eine elektromotorische Gegenkraft gegen den Strom, die Polarisation der Elektroden, durch welche der Strom geschwächt, also der scheinbare Widerstand vergröſsert wird.

Die Polarisation wird unmerklich bei Wechselströmen rascher Periode zwischen Elektroden von einer hinreichend groſsen Oberfläche, die, ohne groſse Dimensionen anzuwenden, durch einen elektrolytischen Überzug der Elektrode mit fein verteiltem Platinmohr erzielt wird.

Stromerreger. Der einfachste Erreger von Wechselströmen ist ein kleiner Induktionsapparat, bestehend aus Eisenkern und einer primären Spule mit einem Neeff'schen Hammer als Unterbrecher und einer sekundären Spule, in welcher bei der Unterbrechung und Schlieſsung des Primärkreises kurz dauernde Ströme gleicher Gesamtstärke aber entgegengesetzter Richtung inducirt werden. In der Durchschnittsfigur ist als Hammer ein Platinunterbrecher, in der Seitenansicht ein Quecksilberunterbrecher gezeichnet. Die richtige Stellung des Unterbrechers wird mit der Regulirschraube ausprobirt; das Quecksilber ist zum Schutze gegen die Verbrennung durch die Unterbrechungsfunken mit einer Schicht destillirten Wassers bedeckt, welches zeitweilig erneuert wird. Als Stromerreger dient ein Akkumulator oder ein bis zwei Daniellelemente.

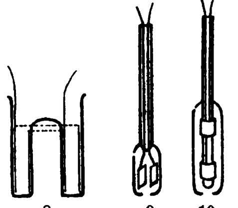


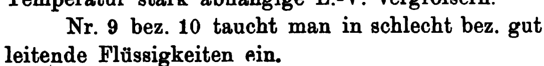
Ein richtig gebauter Unterbrecher hat, besonders wenn der Apparat auf Stückchen Kautschuk gestellt ist, einen leisen Gang. Sonst steckt man etwas Watte in das nicht beobachtende Ohr.

Das Telephon als Stromprüfer. Vgl. 85a. Ein Galvanometer reagirt nicht auf die Wechselströme. Gebraucht wird zuweilen das Dynamometer, meistens aber das Bell'sche Hörtelephon. Ein solches ist fest ans Ohr zu drücken; der Induktionsapparat soll in einiger Entfernung (1 m)

von ihm stehen, damit der Elektromagnet nicht etwa direkt wirkt. Die gewöhnlichen, überall käuflichen gestreckten Telephone in Hartkautschukfassung genügen meistens, besonders wenn man ihre dünndrähtige Bewicklung durch eine von kleinerem Widerstande, etwa 5 bis 10 Ω, ersetzt.

Widerstandsgefäfse. Für schlechte Leiter wie Wasser und verdünnte Lösungen dienen z. B. die Formen Nr. 1. 2. 3. 8. 9 mit breiten, einander nahe stehenden Elektroden, für bessere Leiter die übrigen. Die Gefäfse Nr. 3 bis 8 sind in ein Bad mit Thermometer zu stellen. Zu beachten ist, dafs durch die Badflüssigkeit nicht etwa Nebenschlufs entstehe, dafs auch nicht zu starke Ströme gebraucht werden, die durch Erwärmung das von der Temperatur stark abhängige L.-V. vergröfsern.





Nr. 9 bez. 10 taucht man in schlecht bez. gut leitende Flüssigkeiten ein.

I. Die Messung.

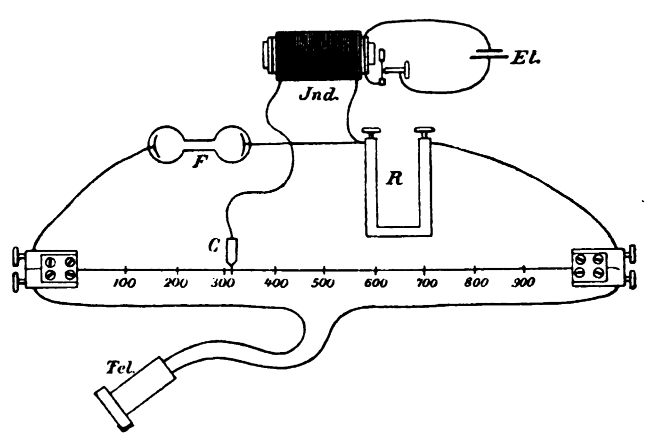
1. Mit Wechselstrom und Telephon; F. K.

Man wendet meistens die Wheatstone-Kirchhoff'sche Drahtbrücke an (**93** II); vgl. Fig. folg. S.

F ist das Elektrodengefäfs mit der Flüssigkeit, R der Satz von bekannten Drahtwiderständen, beide mit den Enden des Mefsdrahtes und andrerseits mit einander verbunden. An die letztere Verbindungsstelle kommt zugleich der eine, an den Schleifkontakt der andere Pol der sekundären Rolle des Induktoriums. Das Telephon liegt an den beiden Enden des Mefsdrahtes. Vgl. hierüber die Bemerkung zur Fig. S. 396.

Man stellt nun den Schleifkontakt durch Ausprobiren auf den Punkt der Teilung, an welchem der Ton im Telephon verschwindet bez. sein Minimum der Stärke annimmt. Ursachen eines schlechten Minimums können in der Polarisation bestehen, ferner bei kleinen Widerständen in der Selbstinduktion schlecht

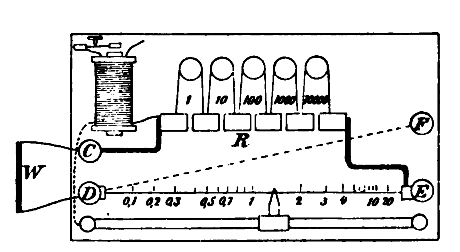
gewickelter Drahtrollen, bei grofsen in der elektrostatischen Kapacität der Drahtrollen oder der Flüssigkeitszelle. Nebenschaltung eines kleinen Kondensators kann letzteres korrigiren. Beträge zwischen etwa 30 und einigen 1000 Θ sind durchschnittlich am besten zu messen. Man sucht also womöglich Gefäfse aus, welche solche Widerstände geben. Bei Widerständen von mehreren 100000 Θ gelingt es nicht immer, die Quellen der Unschärfe genügend zu beseitigen.



Unter den Vergleichswiderständen R bevorzugt man diejenigen, welche eine von der Mitte des Mefsdrahtes nicht zu weit entfernte Einstellung ergeben.

Bequemer als der gestreckte Brückendraht ist die Walzenbrücke. In Fig. S. 396 würde W das Elektrodengefäfs vorstellen, P_1 das Telephon und P_2 die Stromquelle, d. h. die sekundäre Rolle des Induktoriums.

An der kleinen Brücke (Fig.) sind die zur Messung nötigen Teile vereinigt. Zwischen C und D kommt der zu bestimmende Widerstand, an E und D (ev. an E und das mit dem Drahtende D verbundene F) wird das Telephon angelegt. Die Induktionsrolle ist mit dem Schleifkontakt und mit einem Punkte zwischen C und den Rheostatenwiderständen in Verbindung.

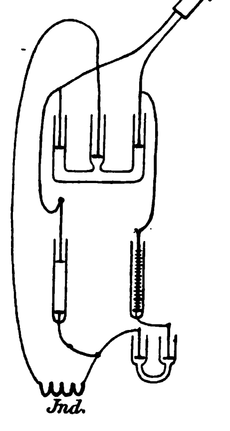


Das den Strom erregende Element kommt an zwei (nicht gezeichnete) Klemmen. Ein Um-

schalter an einer von diesen läfst sich so stellen, dafs das Induktorium ausgeschaltet wird und gewöhnliche Widerstandsbestimmungen mit konstantem Strome gemacht werden können. Dann wird also ein Galvanometer anstatt des Telephons angelegt.

Die Teilung unter dem Mefsdraht ist so ausgeführt und beziffert, dafs die abgelesene Zahl gleich das Verhältnis a/b darstellt.

Anordnung von Nernst. Eine Brückenverzweigung besteht aus vier paarweise gleichen Glasröhren, gefüllt mit einer Lösung, deren Leitvermögen von der Temperatur sehr wenig abhängt: 121 gr Mannit und 41 gr Borsäure mit 0,06 gr KCl in Wasser zu 1 l gelöst; $\varkappa_{18} = 0{,}00097$. Einer von den Zweigen mufs eine in mefsbarer Weise verschiebbare Elektrode enthalten. Als Widerstandseinheit dient der dem Skalenteil dieser Verschiebung entsprechende Widerstand, in welchem man auch die Widerstandskapacität des Mefsgefäfses ausdrückt.



Ein zu messender Flüssigkeitswiderstand, welchen man diesem Zweige hinzufügt, ist dann durch die Verschiebung der Elektrode gegeben, welche das Telephon wieder zum Schweigen bringt.

Die Anordnung ist wegen ihrer Symmetrie den Störungen des Minimums weniger ausgesetzt und infolge dessen auch für sehr grofse Widerstände zu benutzen.

Nernst, ZS. f. phys. Ch. 14, 642. 1894; M. E. Maltby, ib. 18, 133, 1895. Vgl. auch S. 421.

Optisches Telephon s. S. 372; elektrometrische Methoden **130**.

Über die Anwendung der sehr schnellen Schwingungen einer Funkenentladung vgl. Nernst, Wied. Ann. 60, 600. 1895.

Berechnung des Leitvermögens.

Wenn der Widerstand der Flüssigkeit in einem Gefäfs von der Kapacität C cm^{-1} gleich w Θ gefunden wurde, so ist ihr Leitvermögen $\varkappa = C/w$.

Die Temperatur mufs auf $\frac{1}{20}{}^0$ bekannt sein, wenn $\varkappa$ auf 1 Promille sicher sein soll.

Bestimmung der Widerstandskapacität C eines Gefäfses.

a) Mittels Normalflüssigkeiten. Geometrische Ausmessung des Raumes zwischen den Elektroden ist selten möglich. Man benutzt deswegen zur Ermittelung von C die Gleichung $C = \varkappa \cdot w$, indem man den Widerstand w Θ mifst, den eine

Normalflüssigkeiten von bekanntem Leitvermögen $\varkappa$ in dem Gefäfs ergiebt.

Solche Flüssigkeiten sind:

Maximalleitende Schwefelsäure, 30 Gewichtsprocente H_2SO_4 enthaltend; $s_{18} = 1,223$.

Gesättigte Chlornatriumlösung, etwa 26%. Man schüttelt die Flüssigkeit mit ihrem Überschufs von Salz vor dem Gebrauch hinreichend.

Maximalleitende Bittersalzlösung von 17,4 Gew.-Proc. $MgSO_4$; $s_{18} = 1,190$.

Normale Chlorkaliumlösung, d. h. 74,60 gr KCl im Liter Lösung enthaltend. Ferner $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{50}$ normale KCl-Lösung.

Gesättigte Gypslösung mit reinem Wasser angesetzt und vor dem Gebrauch hinreichend geschüttelt. Etwas Trübung schadet nichts.

Die letztgenannten Flüssigkeiten dienen für Gefäfse von sehr kleiner Kapacität.

Die Leitvermögen $\varkappa$ dieser Flüssigkeiten sind (K., Holborn u. Diesselhorst, Wied. Ann. 64, 440, 1898):

	H_2SO_4 max.	NaCl gesätt.	$MgSO_4$ max.	KCl normal	KCl $\frac{1}{10}$ norm.	KCl $\frac{1}{50}$ norm.	Gyps gesätt.	
15°	0,7028	0,2015	0,04555	0,09254	0,01048	0,002243	0,001742	15°
16	,7151	,2063	4675	,09443	1072	2294	1791	16
17	,7275	,2112	4799	,09633	1095	2345	1841	17
18	,7398	,2161	4922	,09824	1119	2397	1891	18
19	,7522	,2210	5046	,10016	1143	2449	1940	19
20	,7645	,2260	5171	,10209	1167	2501	1990	20
21	0,7768	0,2310	0,05297	0,10402	0,01191	0,002553	0,002039	21

Bei den letzten beiden kommt das L.-V. des lösenden Wassers in Betracht, welches zu den abgedruckten Zahlen addirt werden mufs.

Gutes Wasser soll ein L.-V. $\varkappa \cdot 10^6 = 1$ bis 2 haben. Das beste Destillat in Luft hat 0,7.

b) **Durch Vergleichung mit einem Gefäfs von bekannter Kapacität.** Man schaltet das unbekannte und das bekannte Gefäfs mit derselben Flüssigkeit gefüllt und in demselben Bade stehend, wie *F* und *R* Fig. S. 412 ein. Das Widerstandsverhältnis giebt dann das Verhältnis der beiden Kapacitäten. Lösungen von $KHSO_4$ oder für kleinere Kapacitäten solche von Mannit und Borsäure (vor. S.) sind wegen des geringen Temperatureinflusses zweckmäfsig.

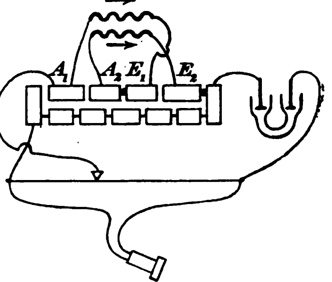
Über genaue Messungen, besonders auch an verdünnten Lösungen, vgl. F. K. u. Maltby, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 157, 1900.

Bestimmung des Leitvermögens mit einem Gefäſs von meſsbar veränderlicher Kapacität.

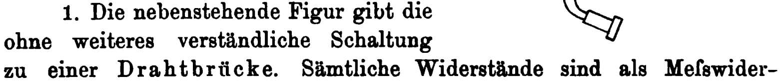
Eine U-förmige Röhre von etwa 1 oder $\frac{1}{2}$ cm² Querschnitt hat verschiebbare, gut platinirte Elektroden. Sie ist nach Kapacität geteilt, d. h. wenn die linke Elektrode auf dem Teilstrich c_l, die rechte zugleich auf c_r steht, so ist $C = c_l + c_r$ zu setzen. Eine genaue Messung verlangt natürlich, daſs das Gefäſs in einem Bade von bekannter Temperatur steht.

Eine Drahtbrücke ist hier überflüssig, es genügt eine Nullmethode für Widerstandsgleichheit, z. B. die Wheatstone'sche Verzweigung mit gleichen Widerstandspaaren (**93**) oder ein Differentialinduktor (folg. S.). Als Vergleichswiderstand nimmt man einen passenden Widerstand R von runder Zahl (50 100 200 1000 Θ), stellt die linke Elektrode auf c_l und sucht an der rechten die Stellung c_r, bei welcher der Ton verschwindet. Wird $c_l + c_r = C$ gesetzt, so giebt $\varkappa = C:R$ das Leitvermögen, also wenn R eine runde Zahl ist, ohne groſse Rechnung.

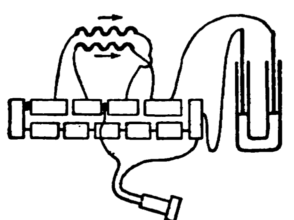
Universalinduktor mit Rheostat. Die sekundäre Rolle des Induktoriums besteht aus zwei gleichen Windungslagen. Zugefügt sind Stöpselklötze, welche erstens Vergleichswiderstände einzuschalten gestatten, zweitens eine Verwendung des Instrumentes sowohl zu Messungen mit der Drahtbrücke wie in der Wheatstone'schen Verzweigung mit gleichen Widerstandspaaren oder endlich als Differentialinduktor erlauben.



1. Die nebenstehende Figur gibt die ohne weiteres verständliche Schaltung zu einer Drahtbrücke. Sämtliche Widerstände sind als Meſswiderstände zu verwenden.



2. Verwendung als Brücke mit gleichen Widerstandspaaren. Die beiden 25er sind hierzu in Anspruch genommen. An ihnen liegt, wie an den Verzweigungswiderständen a und b in Fig. S. 393, das Telephon; ferner einerseits der Rheostat, andrerseits das Elektrodengefäſs.

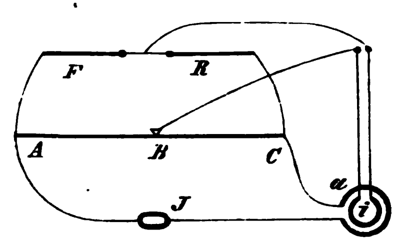


3. Verwendung als Differentialinduktor. Die beiden Lagen der Induktionsrolle sind nicht wie in den anderen Fällen einfach als Ganzes hintereinander geschaltet, sondern so, dafs ihre Ströme das Telephon in entgegengesetzter Richtung durchfliefsen, also es nicht erregen, sobald sie gleiche Stärke haben.

Bei Nr. 2 und 3 zieht man Widerstand R von passender Gröfse, verschiebt die Elektroden, bis der Ton verschwindet und liest c_l und c_r ab; vgl. vor. S.

2. Bestimmung mit Wechselstrom und Elektrodynamometer.

Man schaltet in die Brücke nicht das ganze Dynamometer ein, weil dann die Stromstärke Null nicht scharf zu erkennen ist, sondern man leitet durch die eine Dynamometerrolle den ungeteilten Strom des Induktors und schaltet nur die andere Rolle in die Brücke.



J bedeutet den Erzeuger der Wechselströme, a die äufsere, i die innere Rolle des Dynamometers, F den Flüssigkeitswiderstand, R den Rheostatenwiderstand, je nach Bedürfnis zwischen 10 und 1000 Ω. Die Strecke ABC soll die Verzweigungswiderstände bedeuten, entweder einen Draht mit Schleifkontakt oder zwei konstante Widerstände (vgl. **84** u. **98**).

3. Bestimmung mit Gleichstrom.

a) Die Polarisation wird durch Differenzbestimmung mit konstanter Stromstärke eliminirt, indem man mittels Elektrodenverschiebung (Fig. S. 415) verschieden lange Säulen einschaltet. Da die Polarisation nur bei gröfserer Stromdichte an den Elektroden konstant ist und da meist Gas entwickelt wird, so nimmt man ein Drahtnetz oder einen spiraligen Draht als Elektrode.

Die Wheatstone'sche Brücke oder die Substitution dient für die Widerstandsbestimmung.

Über Vermeidung der Polarisation durch Zinklösung siehe Paalzow, Pogg. Ann. 136, 489. 1869.

b) Sehr schlechte Leiter. Für sehr schlecht leitende Flüssigkeiten, z. B. auch ganz reines Wasser, kann der Gleichstrom Vorteile bieten. Man wählt etwa gewöhnliche Brückenschaltung, eine Säule von hoher Spannung und schliefst den Strom ganz kurz. Die Polarisation entwickelt sich bei der geringen Stromstärke so langsam, dafs sie dann meistens zu

vernachlässigen ist. — Längerer Stromschlufs kann übrigens, wenn in der Flüssigkeit nur wenige leitende Bestandteile gelöst sind, durch deren elektrolytische Verschiebung auch den Widerstand erheblich ändern, ihn sowohl durch Bildung von Hydroxyden und Säuren aus Salzen verkleinern, wie durch Hinaustreiben leitender Bestandteile vergröfsern. — Auf dem letzteren Wege lassen sich manche Flüssigkeiten also reinigen.

F. K. u. Heydweiller, Wied. Ann. 53, 219. 1894; 54, 385. 1895; Warburg, ib. 54, 396.

Temperaturkoefficient.

Das Leitvermögen eines Elektrolytes pflegt mit wachsender Temperatur stark zuzunehmen, und zwar für eine mäfsige Temperaturänderung in der Regel dieser Änderung nahe proportional. Die relative Änderung $\mathfrak{c}$ des L.-V. auf 1^0 heifst Temperaturkoefficient des L.-V. Es gilt also, wenn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ den Temperaturen t_1 und t_2 entsprechen,

$$\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa}=\mathfrak{c}(t_2-t_1) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{t_2-t_1}.$$

Als Temperatur des $\varkappa$, in dessen Bruchteilen sich $\mathfrak{c}$ ausdrücken soll, wird man je nach dem Zweck t_1 oder $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ oder auch 0^0 oder 18^0 wählen.

II. Äquivalentleitvermögen und Jonenbeweglichkeit in Lösungen (F. K.). Elektrolytische Dissociation (Arrhenius).

Äquivalentleitvermögen Λ. So nennt man das Leitvermögen $\varkappa$, geteilt durch die Äquivalent-Koncentration η der Lösung; η ist gleich der in der Volumeinheit der Lösung enthaltenen Masse, dividirt durch das Äquivalentgewicht des Elektrolytes zu setzen. Die gewöhnliche Definition rechnet die Koncentration, häufig unter der Bezeichnung m, nach gr-Äqu./Liter. $v=1/m$ ist die „Verdünnung" in Liter/gr-Äqu. — Wegen der theoretischen Beziehungen ist das 1000mal kleinere gr-Äqu./cm^3 hier vorzuziehen, so dafs eine gewöhnlich sog. „Normallösung" von 1 gr-Äqu./Lit. (Tab. 3a) dann die Äqu.-Koncentration $\eta=0{,}001$ hat. Wir setzen also in $\Lambda=\varkappa/\eta$ die Messung von η in gr-Äqu./cm^3 voraus. S. Tab. 33.

Beweglichkeit der Jonen. Ein Äquivalent-L.-V. ist die Summe der „Beweglichkeiten" l_K und l_A des Kations und des Anions, also $\Lambda=l_K+l_A$. Einzeln ergeben sich diese Gröfsen aus Λ und der durch Elektrolyse gemessenen relativen Jonen-Geschwindigkeit (Hittorf), gewöhnlich angegeben als das Überführverhältnis $\mathfrak{n}$ des Anions, so dafs $\mathfrak{n}=l_A/(l_K+l_A)$. Hiernach kommt

$$l_K=(1-\mathfrak{n})\Lambda \quad \text{und} \quad l_A=\mathfrak{n}\Lambda.$$

Die wirklichen mittleren Geschwindigkeiten U und V beider Jonen für das Normalgefälle der elektromot. Kraft von 1 V/cm leiten sich folgendermaßsen ab. Ein cm-Würfel hat den Widerstand $1/\varkappa$ Ω; 1 V erzeugt hierin also den Strom $\varkappa$ A. Der Strom 1 A scheidet 0,00001036 gr-Äqu./sec aus (S. 374), der obige Strom also $0{,}00001036 \cdot \varkappa$ gr-Äqu./sec. Nun enthält 1 cm^3 Lösung η gr-Äqu. Sollen $0{,}00001036\,\varkappa$ von diesen in 1 sec an den Endflächen frei werden, so ist die mittlere gegenseitige Geschwindigkeit der Jonen in cm/sec

$$U+V=0{,}00001036\,\varkappa/\eta \quad \text{oder} \quad =0{,}00001036\,\Lambda,$$

einzeln also $U=(1-\mathfrak{n})\cdot 0{,}00001036\,\Lambda$, $V=\mathfrak{n}\cdot 0{,}00001036\,\Lambda$.

Über $\mathfrak{n}$ vgl. z. B. K. u. Holborn l. c. Tab. 9.

Die Beweglichkeiten nehmen mit wachsender Koncentration ab. Tab. 34 gibt die Gröſsen für einige Jonen bei dem Grenzzustand äuſserster Verdünnung, so gut sie bekannt sind. Die Zahlen für H, OH und für mehrwertige Jonen sind weniger sicher.

Elektrolytische Dissociation. Unter der Annahme, daſs nur dissociirte Moleküle leiten, und zwar mit einem konstanten elektrolytischen Reibungskoefficienten, und daſs in unendlicher Verdünnung die Dissociation vollständig erfolgt ist, erhält man den Dissociationsgrad der Lösung eines binären Elektrolytes $\mathfrak{a}=\Lambda/\Lambda_0$, wenn Λ_0 das Äquivalent-Leitvermögen in unendlicher Verdünnung ist. $\mathfrak{a}\cdot\eta$ gibt dann die Koncentration der „freien Jonen".

Schlechte Leiter, wie die schwachen Säuren oder Basen in Lösung, sind hiernach schwach dissociirte Elektrolyte. Für solche gilt bis zu mäſsiger Koncentration η die Beziehung (Ostwald)

$$\frac{\mathfrak{a}^2}{1-\mathfrak{a}}=\frac{c}{\eta} \quad \text{oder} \quad \frac{\Lambda^2}{\Lambda_0-\Lambda}=\frac{C}{\eta},$$

wo c die betr. Dissociationskonstante und $C=c\cdot\Lambda_0$ ist.

Auf gute Leiter anwendbar erscheint der an eine Formel von Rudolphi angeschlossene Ausdruck

$$\frac{\Lambda_0-\Lambda}{\Lambda^p}=B\cdot\eta^{1/2}, \quad \text{wonach} \quad \frac{1-\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^p}=b\cdot\eta^{1/2}.$$

Rudolphi, ZS. f. phys. Ch. 17, 385. 1895; F. K., Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1900, S. 1002.

96a. Koncentration einer Lösung aus ihrem Leitvermögen. Löslichkeit.

1) Sehr verdünnte Lösungen. Löslichkeit schwer löslicher Elektrolyte.

1 mg eines Salzes in 1 Liter Wasser gelöst bewirkt eine Erhöhung des Leitvermögens von der Ordnung 10^{-6}, so daſs selbst Körper wie Chlorsilber oder Bariumsulfat eine gut meſsbare Vermehrung ergeben.

Tab. 34 gibt die auf Hg bezogenen Beweglichkeiten l_K und l_A

von Jonen in äußerst verdünnter wässriger Lösung bei 18°. Hat man nun das Leitvermögen der gesättigten Lösung bei 18° um $\varkappa$ größer gefunden als das L.-V. des lösenden Wassers, so berechnet man die in 1 cm³ gelösten gr-Äquivalente als $\eta = \varkappa/(l_K + l_A)$. Ist A das Äquivalentgewicht des gelösten Körpers, so gibt dann $A \cdot \eta$ oder $A \cdot \varkappa/(l_K + l_A)$ die Koncentration in gr/cm³ und 1000 $A \cdot \varkappa/(l_K + l_A)$ in gr/Liter.

Man wässert den gepulverten Körper aus, trocknet und zerreibt ihn noch einmal im Achatmörser, bringt ihn in das Gefäfs Nr. 2 S. 411, giefst vorsichtig Wasser von bekanntem Leitvermögen auf, schüttelt, und bestimmt das Leitvermögen abermals. Meistens wird wegen der Verunreinigungen noch einmal oder mehrere Male von dem Pulver abgegossen und Wasser aufgegossen werden müssen, bis konstante Leitvermögen entstehen.

Beispiel: $BaSO_4$; $l_K = 57$, $l_A = 69$, also $\varLambda = l_K + l_A = 126$. Gefunden wurde $\varkappa_{18} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$, also $\eta = 2{,}4 \cdot 10^{-6}/126 = 0{,}019 \cdot 10^{-6}$ gr-Äqu./cm³ $= 0{,}000019$ gr-Äqu./Liter. Äqu.-Gew. $\frac{1}{2}Ba = 68{,}7$, $\frac{1}{2}SO_4 = 48$, also $A = 116{,}7$, woraus der Gewichtsgehalt $= 116{,}7 \cdot 0{,}000019 = 0{,}0022$ gr/Liter.

Nur bei Anwendung sehr reinen Wassers (8 Nr. 2) und bei neutralen Salzen ist für so verdünnte Lösungen das Verfahren gestattet. — Bei etwas stärkeren Lösungen ist ferner die Abnahme von $\varLambda$ mit wachsender Koncentration zu berücksichtigen.

Nähere Anweisung bei K. u. Holborn l. c. S. 129 ff.

Über Löslichkeitsbestimmungen durch Spannungsmessung s. **104**.

2) Stärkere Lösungen. Man geht mit dem beobachteten L.-V. in Tab. 31 oder in K. u. Holborn, Tab. 1 u. 2 ein. Zweideutigkeiten, die etwa aus einem Maximum des L.-V. entspringen, sind besonders zu berücksichtigen.

Über die Bestimmung stärkerer Löslichkeiten auf chemischem Wege vgl. Ostwald, phys.-chem. Methoden S. 202.

97. Widerstand galvanischer Elemente.

Die Methoden 1 und 2 setzen sehr konstante Säulen von nicht zu kleinem Widerstande voraus, wenn sie brauchbare Ergebnisse liefern sollen. 3 und 4 sind in der Ausführung nicht einfach. 5 ist einfacher und meistens genauer. Allgemein anzuwenden, freilich bekannte Kondensatorkapacitäten voraussetzend, ist Nr. 6.

Mittels des eigenen Stromes.

1) In gewöhnlicher Schaltung. Man bewirkt mit dem Element oder der Batterie, nötigenfalls mit Widerstandsballast,

an einem Strommesser einen passenden Ausschlag; die Stromstärke sei J. Durch Zuschaltung von Rheostatenwiderstand R entstehe die ungefähr halb so grofse Stromstärke i. Dann hatte der Stromkreis bei der ersten Beobachtung den Widerstand

$$W = Ri/(J - i),$$

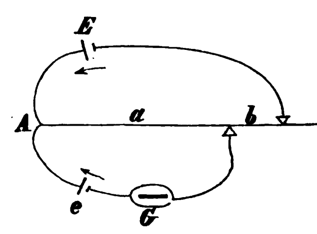
von dem man den Galvanometerwiderstand sowie ev. den konstanten Ballast abzieht.

2) Durch Paar- und Einzelschaltung. Eine gerade Anzahl gleicher Elemente wird einmal in Hinterschaltung, demnächst in paarweiser Nebenschaltung (Fig.) durch denselben Stromzeiger und je soviel Rheostatenwiderstand geschlossen, dafs dieselbe Nadelstellung entsteht. Die Gesamtwiderstände aufser der Batterie in beiden Fällen seien w_1 und w_2. Dann betrug der Batteriewiderstand bei der Hinterschaltung

$$4w_2 - 2w_1.$$

Durch momentanen Stromschlufs.

3) Kompensationsverfahren (v. Waltenhofen; Beetz). ab ist ein ausgespannter dünner Draht von bekanntem Widerstand mit zwei Gleitkontakten oder ein Rheostat mit zwei Abzweigungen. Der Widerstand W von E (wobei wir die nachher abzurechnenden Verbindungsdrähte einbegreifen) soll bestimmt werden. e ist eine schwächere konstante Hilfssäule. Man stellt die Kontakte so, dafs das Galvanoskop G stromlos ist. Die Abzweigwiderstände seien a und b. Man ändert beide Stücke in a' und b', so dafs G wieder stromlos ist; dann ist



$$W = (a'b - ab')/(a - a').$$

Beweis. Der Kreis $AabE$ habe den Strom i. Es ist (80, I, B.) $E = (W + a + b)i$; ferner $e = ai$, also $E/e = 1 + (W + b)/a$. Ebenso $E/e = 1 + (W + b')/a'$; also $(W + b')/a' = (W + b)/a$, woraus obiges folgt.

Gibt keine Stellung den Strom Null, so mufs der disponibele Widerstand vermehrt oder ein schwächeres e genommen werden.

Schliefst man nur sehr kurze Zeit (Stromschlüssel von Beetz), so kann man auch inkonstante Elemente untersuchen. Um den Widerstand mit Strom zu erhalten, legt man an E eine Nebenschliefsung, welche durch den Schlüssel bei A kurz vor der Verbindung der Säulen mit dem Rheostatendraht gelöst wird.

4) In der Wheatstone'schen Brücke (Mance). In der Figur auf S. 396 sei im Zweige W das Element, in P_1 das Galvanoskop, während der Zweig P_2 momentan geschlossen werden kann. Man verstellt die Brücke, bis der Ausschlag sich durch diesen Schlufs nicht ändert, dann ist der Widerstand des Elements $W = R \cdot a/b$. Durch einen konstant genäherten Magnet kann man die Galvanoskopnadel in der Nähe der Ruhelage halten.

Man mifst hier einwandsfrei den Widerstand des geschlossenen Elementes.

Durch Wechselströme.

5) Am einfachsten ist die Messung mit dem Telephon nach **96**. Elemente von nicht zu kleinem Widerstande verhalten sich den Wechselströmen gegenüber ähnlich wie gewöhnliche Leiter. Liegen mehrere gleiche Elemente vor, so schaltet man sie gegen einander.

6) Verfahren mit Kondensatoren (Nernst und Haagn). Indem man ein Widerstandsverhältnis auf das Verhältnis zweier Kondensator-Kapacitäten zurückführt und zugleich vor das Induktorium einen grofsen Kondensator einschiebt, der wohl die Induktionsschwingungen überträgt, aber keinen Gleichstrom zu Stande kommen läfst, werden Dauerströme überall vermieden.

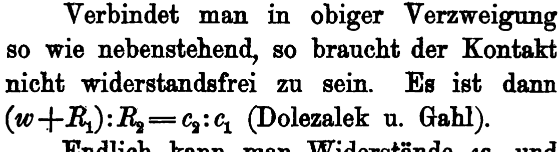
J ist das Induktorium, C der übertragende Kondensator (belegtes Guttaperchapapier). Die Kondensatoren in den Brückenzweigen haben Kapacitäten c_1 und c_2 von bekanntem Verhältnis (**131**). E ist das Element, dessen Widerstand w gemessen werden soll, R ein mefsbar ver-

änderlicher Widerstand, z. B. ausgespannter Draht mit widerstandsfreiem Kontakt. Schweigt das Telephon T, so ist

$$w : R = c_2 : c_1 .$$

c_1/c_2 kann man in derselben Anordnung bestimmen, sobald man E durch einen bekannten Widerstand ersetzt.

Nernst und Haagn, ZS. f. Elektroch. 2, 493. 1896; eine Untersuchung von Elementen und Kritik der sonstigen Verfahren auch bei Haagn, ZS. f. physik. Ch. 23, 97. 1897.



Verbindet man in obiger Verzweigung so wie nebenstehend, so braucht der Kontakt nicht widerstandsfrei zu sein. Es ist dann $(w + R_1) : R_2 = c_2 : c_1$ (Dolezalek u. Gahl).

Endlich kann man Widerstände w_1 und w_2 zweier Elemente E_1 und E_2 von gleicher el. Kraft stromfrei mittels $w_1 : w_2 = a : b$ in der Brückenverzweigung der Figur mit einander vergleichen.

98. Widerstand eines Galvanometers.

Der Widerstand γ eines Multiplikators läfst sich wie jeder andere nach **90** bis **98** bestimmen. Um jedoch die eigene Nadel zu benutzen, gibt es folgende Verfahren, von denen I aber selten genau ausführbar sein wird.

I. Direkter Schlufs.

Ein konstantes Element von bekanntem, thunlichst kleinem Widerstande w_0 (grofser Daniell, Akkumulator) wird durch das Galvanometer geschlossen, wenn nötig unter Einschaltung eines bekannten Widerstandsballastes R_0. Die Stromstärke sei J_0. Man bringe durch Zuschaltung von Rheostatenwiderstand R den Strom auf etwa die halbe Stärke i. Dann ist $\gamma = Ri/(J_0 - i) - w_0 - R_0$.

Denn es ist $(\gamma + w_0 + R_0) J_0 = (\gamma + w_0 + R_0 + R) i$.

II. Bestimmung durch Stromabzweigung.

Dadurch dafs man einen Strom durch einen Rheostaten schickt, das Galvanometer in zwei verschiedenen Weisen an diesen Strom anschliefst und den Ausschlag mifst, erhält man zwei Gleichungen, aus denen der Galvanometerwiderstand abgeleitet werden kann. Man kann, besonders bei empfindlichen Galvanometern, mit schwachen, unter Umständen auch wenig veränderlichen Strömen arbeiten, so dafs die Konstanz der Säule gewahrt bleibt.

Ein Element oder eine Batterie von bekanntem Widerstande sei geschlossen durch eine Leitung, welche sich in zwei Zweige teilt, von denen der eine aus dem Galvanometer γ, der andere aus einem bekannten Widerstande z bestehe. z möge von γ im allgemeinen nicht sehr verschieden sein.

W sei der Gesamtwiderstand des unverzweigten Teiles der Leitung, also einschliefslich des Widerstandes des Elements. Es ist vorteilhaft, W grofs wählen zu können.

i sei die Stromstärke im Galvanometer (vgl. 83, 85; es genügen relative Messungen), wenn die Widerstände W, z und γ sind.

Allgemeiner Fall. Wenn W in W', z in z' verwandelt und zu γ ein Widerstand w zugeschaltet wird, so möge die Stromstärke i' in γ entstehen. Dann ist

$$\gamma = \frac{i'[w(W'+z')/z'+W'] - iW}{i(W+z)/z - i'(W'+z')/z'}.$$

Denn es ist $i = \dfrac{E \cdot z}{\gamma(W+z)+Wz}$; $i' = \dfrac{E \cdot z'}{(\gamma+w)(W'+z')+W'z'}$ (S. 347.)

Aus dieser allgemeinen Formel ergeben sich leicht die folgenden Methoden. Die nebengesetzten Figuren zeigen an, wie man die Anordnung mit einem Rheostaten RR treffen kann, wenn man einige Stöpsel mit Klemmschrauben besitzt. Besonders Nr. 3, 4 und 7 werden sich leicht ausführen lassen.

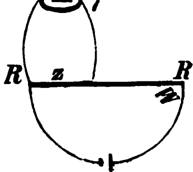
Einzelne Fälle für den Gebrauch.

1) Man lasse W und z ungeändert, schalte aber in den Galvanometerzweig γ noch einen von γ nicht sehr verschiedenen Widerstand w. Die Stromstärke sei nunmehr $= i'$. Über i, W, z siehe oben. Dann ist

$$\gamma = \frac{i'[w(1/z+1/W)+1] - i}{(i-i')(1/z+1/W)}.$$

Ist W sehr grofs gegen z, so hat man $\gamma = w\dfrac{i'}{i-i'} - z$.

2) Man läfst bei dem zweiten Versuche W und den Galvanometerzweig ungeändert ($w=0$), verwandelt aber z in den beträchtlich gröfseren Wert z', wodurch in γ die Stromstärke i' entstehe. Es ist

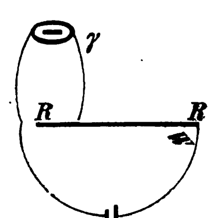


$$\gamma = \frac{i'-i}{i(1/z+1/W) - i'(1/z'+1/W)}$$

Für grofses W entsteht $\gamma = \dfrac{i'-i}{i/z - i'/z'}$.

3) Bei dem zweiten Versuche werde W in W' verwandelt und durch das Galvanometer der ganze Strom i' geleitet (d. h. $w = 0$ und $z' = \infty$). Dann ist

$$\gamma = \frac{i'W' - iW}{i(W+z)/z - i'}.$$



Ist der Widerstand des ungeteilten Bogens bei beiden Versuchen der nämliche geblieben ($W' = W$), so gilt

$$\gamma = \frac{i' - i}{i(1/z + 1/W) - i'/W}$$

und wenn W sehr grofs ist, $\gamma = z(i' - i)/i$.

Im allgemeinen wird es günstig sein, wenn die eine Stromstärke etwa halb so grofs ist wie die andere. — Die Anwendung eines Kommutators am Element ist zweckmäfsig.

Besonders auf Spiegelgalvanometer von nicht zu grofsem Widerstande, bei denen die gewöhnlichen Methoden versagen, sind die Methoden 1 bis 3 anwendbar.

Abzweigung mit gleicher Stromstärke.

Um die Methoden auch auf ein Galvanoskop anwenden zu können, welches keine eigentliche Messung erlaubt, regulire man die Widerstände bei dem zweiten Versuche so, dafs die beiden Stromstärken gleich sind ($i' = i$).

In diesem Falle ist allgemein (s. oben):

$$\gamma = z\frac{w(W' + z') + z'(W' - W)}{Wz' - W'z}.$$

Man hat zwischen folgenden Methoden die Wahl.

4) Der Widerstand W der unverzweigten Leitung bleibe konstant ($W' = W$). Man füge zu dem Galvanometerzweig γ noch einen Widerstand w, der die Stromstärke erheblich (etwa auf die Hälfte) sinken läfst. Alsdann vergröfsere man z in z', bis die frühere Stromstärke entsteht. Dann ist

$$\gamma = \frac{wz}{z' - z}\left(1 + \frac{z'}{W}\right)$$

und für sehr grofses W einfach $\gamma = wz/(z' - z)$.

Bei der Ausführung nach der Figur zu Nr. 1 hat man nötigenfalls die Widerstände, welche den Strom i' genau $= i$

machen, aus zwei benachbarten Widerständen und Stromstärken zu interpoliren (5).

5) Man lasse z ungeändert, schalte w zu γ und vermindere W in W', bis die alte Stromstärke erreicht ist. Man hat

$$\gamma = w\frac{W'+z}{W-W'} - z.$$

Über Interpolation siehe 4).

6) Man läfst den Galvanometerzweig bei beiden Beobachtungen ungeändert ($w=0$). Wenn z und W dieselbe Stromstärke geben wie z' und W' (vgl. Fig. zu Nr. 2), so ist

$$\gamma = \frac{W-W'}{W'/z' - W/z}.$$

7) Mit dem Widerstande W der Hauptleitung und dem Zweigwiderstande z (Fig. bei 2) gebe das Galvanometer denselben Ausschlag wie mit dem gröfseren Widerstande W' ohne Abzweigung (also $w=0$, $z'=\infty$, Fig. bei 3). Dann ist

$$\gamma = z(W'-W)/W.$$

III. Bestimmung in der Wheatstone'schen Brücke (Thomson).

Das Galvanometer kommt in einen der vier Brückenzweige. Als Brücke genügt ein Verbindungsdraht mit Unterbrecher. Wenn der Ausschlag sich bei Schliefsung und Öffnung der Brücke nicht ändert, so stehen die Widerstandspaare in Proportion. Zu grofse Ausschläge kann man durch einen genäherten Magnet vermindern. In der Ausführung kostet das Ausprobiren der Proportion einige Zeit.

IV. Durch Dämpfung.

Nach 94. Wenn die log. Dekremente des Galvanometers sind: λ_0 bei kurzem Schlufs, λ bei Schlufs durch den bekannten Widerstand R, λ' bei offenem Multiplikator, so ist der Widerstand des Multiplikators $\gamma = R(\lambda - \lambda')/(\lambda_0 - \lambda)$. Das Verfahren ist anwendbar auf alle Spiegelinstrumente, die nicht schon im offenen Zustande eine zu grofse Dämpfung haben. Bei raschen Schwingungen überspringt man zwischen den Beobachtungen eine gerade Anzahl von Umkehrpunkten.

99. Vergleichung elektromotorischer Kräfte oder Spannungen.

Zu beachten ist, dafs die el. Kraft eines Elementes im allgemeinen mit wachsender Stromstärke abnimmt. Elemente mit verdünnten oder länger gebrauchten Flüssigkeiten und „inkonstante" Elemente (z. B. Smee, Leclanché, sowie auch die als Normalelemente so wichtigen Quecksilber-Zink-, und -Cadmium-Elemente) können mit starkem Strome mehrfach schwächer sein als kompensirt oder mit ganz schwachem Strome. Am konstantesten wird der gut geladene Akkumulator und das Daniell-Element sich verhalten.

Erzeugen zwei el. Kräfte e_1 und e_2 in Stromkreisen vom Widerstand w_1 und w_2 die Stromstärken i_1 und i_2, so ist

$$e_1 : e_2 = i_1 w_1 : i_2 w_2.$$

Wenn eins von den Elementen ein Normalelement von bekannter Spannung ist (S. 350), so liefert die Vergleichung auch ein absolutes Resultat.

Verkleinerung einer Spannung in bekanntem Verhältnis. Sehr ungleiche el. Kräfte direkt zu vergleichen ist oft unmöglich und mindestens ungenau. Man verkleinert eine el. Kraft auf einen bekannten Bruchteil, indem man sie durch einen Rheostatenwiderstand R schliefst und von einem Widerstand r dieses Kreises abzweigt. $r/(R+\gamma)$ gibt den Bruchteil, wenn γ der Widerstand des Elements, der gegen R oft zu vernachlässigen ist. Vorteilhaft wählt man den Teil so, dafs er der anderen el. Kr. nahe kommt. Eine Anwendung s. unter 2.

Vergleichung in gewöhnlicher Schaltung.

1. Vergleichung mittels des Rheostaten.

Es wird das eine Element e_1 durch einen Rheostaten und einen Stromzeiger geschlossen und durch Ziehen von Widerstand ein passender Nadelausschlag auf irgend einen runden Teilstrich bewirkt. Dann ersetzt man e_1 durch das andere Element e_2 und bewirkt mit dem Rheostaten denselben Ausschlag. Der Gesamtwiderstand sei im ersten Falle $= w_1$, im zweiten $= w_2$. Dann verhalten sich die Spannungen

$$e_1 : e_2 = w_1 : w_2.$$

w_1 und w_2 enthalten aufser dem Rheostatenwiderstand den des Stromzeigers und des Elementes. Nimmt man aber den ersteren grofs gegen die übrigen Teile, was durch einen empfindlichen Stromzeiger immer ermöglicht wird, so kann man die letzteren vernachlässigen, oder es genügt für sie eine Schätzung.

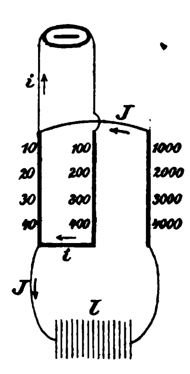
2. Vergleichung mittels eines Strommessers.

Man schließt erst das eine, dann das andere Element durch einen empfindlichen Strommesser unter Vorschaltung eines und desselben Widerstandes. Der Widerstand der Elemente sei gegen die anderen Widerstände zu vernachlässigen. Beobachtet man die Stromstärken i_1 und i_2, so verhält sich $e_1:e_2 = i_1:i_2$. Andernfalls hat man, mit w_1 und w_2 die jeweiligen Gesamtwiderstände bezeichnet, $e_1:e_2 = i_1 w_1 : i_2 w_2$.

Arbeitet man mit einem so empfindlichen Galvanometer, und infolge davon mit einem so großen Widerstande, daß die Ströme verschwindend schwach sind, so können beide Elemente einmal gleichgerichtet (Strom J), dann entgegengerichtet (Strom i) in denselben Stromkreis geschaltet werden. Der Widerstand fällt heraus und man hat das Verhältnis des stärkeren zum schwächeren Element $e_1:e_2 = (J+i):(J-i)$.

Ist das schwächere der Elemente umkehrbar, d. h. wird seine Spannung nicht durch einen Gegenstrom gesteigert (z. B. Daniell-Element mit Zinksulfatlösung statt mit Schwefelsäure) oder sind beide Elemente sehr nahe gleich, so dürfen die Ströme stärker sein. Doch schließe man auch dann thunlichst kurze Zeit.

Beispiel: Vergleichung der Spannung e_l einer Gleichstromlichtleitung von angeblich 110 V mit der eines Akkumulators e_a. e_l wird, wie oben angegeben, abgeschwächt gemessen. — Der Stromwärme wegen schließt man nur kurze Zeit; feindrähtige Präcisionsrheostaten wird man hierbei überhaupt nicht verwenden. — Die Lichtleitung l wurde durch einen hinreichend dickdrähtigen Rheostatenwiderstand von 5100 Θ geschlossen und an die Enden eines Teiles von 100 Θ in diesem Kreise ein Galvanometer von 25 Θ mit 1000 Θ Ballast angelegt. Der Ausschlag war = 88,4. — Die Skizze zeigt die Anordnung, wie sie mit einem einzigen Rheostaten mit trennbaren Dekaden (z. B. von Hartmann u. Braun) getroffen werden kann. — Der Akkumulator gab direkt mit 1000 Θ Ballast an demselben Galvanometer den Ausschlag 91,1.



Ohne Rücksicht auf Korrektionen rechnet man

$$e_l:e_a = \frac{5100}{100}\cdot(1025+100)\cdot 88{,}4:(1025\cdot 91{,}1) = 54{,}32.$$

Den genauern Ansatz liefern die Kirchhoff'schen Gleichungen (S. 347), nämlich

aus dem Kreise ohne el. Kraft 100, 25, 1000 Θ mit den Stromstärken $J-i$ $-i$ $-i$ $\Big\}$ $0 = 100(J-i) - 1025\,i = 100\,J - 1125\,i$; 1.

aus dem Kreise mit der el. Kr. e_l 5000, 25, 1000 Θ mit den Stromstärken J i i $\Big\}$ $e_l = 5000\,J + 1025\,i$. 2.

Aus Gl. 1 u. 2 wird gefunden $e_l = 57275 \cdot i = 57275 \cdot 88,4 = 5063000$.
Für den Akkumulator gilt $e_a = 1025 \cdot i_a = 1025 \cdot 91,1 = 93380$.
Also $e_l : e_a = 5063000 : 93380 = 54,22$.
Die Widerstände der Lichtleitung und des Akkumulators sind vernachlässigt und für i ist einfach der Galvanometerausschlag genommen.

Setzt man die el. Kraft des Akkumulators $e_a = 2,01$ V, so wird die Spannung der Lichtleitung $e_l = 109,2$ V nach der genäherten und 109,0 V nach der genaueren Berechnung.

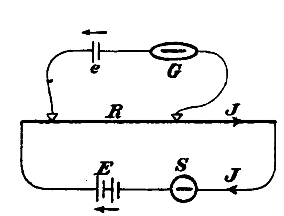
Kompensationsverfahren.

Die Anwendung des Kompensationsapparats s. **103**.

Von einem inkonstanten Element kann man die volle Spannung dadurch bestimmen, dafs man es durch Kompensation stromlos macht. Die genaue Kompensation ist oft zeitraubend, weil das Element beim Ausprobiren Strom bekommt, dessen Einflufs auf die Spannung eine Zeit lang nachwirkt. Man schalte also während des Probirens einen Widerstandsballast zu dem zu kompensirenden Element und schliefse immer nur kurze Zeit, überzeuge sich aber bei der definitiven Beobachtung durch längeren Schlufs ohne Ballast, ob die Kompensation wirklich erreicht ist.

3. Kompensation mit Strommessung (Poggendorff).

G ist ein Stromprüfer, S ein Strommesser, der aber hier nur relativ zu messen braucht, R ein Rheostat oder ein Mefsdraht. Das Element e ist zunächst zu vergleichen mit dem stärkeren konstanten Element E, dem es entgegengeschaltet ist. Man regulirt R so, dafs G stromlos wird, und beobachtet die Stromstärke J in S. Um ein zweites Element e' mit e zu vergleichen, wird das Verfahren mit e' an der Stelle von e wiederholt. R' mache nunmehr G' stromlos und an S werde die Stromstärke J' abgelesen. Dann ist



$$e : e' = JR : J'R'.$$

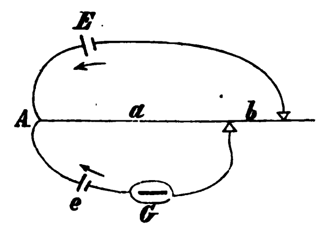
Denn es ist $e = JR$ und $e' = J'R'$ (**80** I B), da der Strom in G Null ist. (Vgl. auch die Verwendung von $e = JR$ zur absoluten Bestimmung S. 432.)

Im allgemeinen ist es vorteilhaft, mit grofsen Widerständen und entsprechend empfindlichen Galvanometern zu arbeiten.

4. Verfahren nach Bosscha.

Die Spannung eines Elementes e sei mit der Spannung E einer stärkeren konstanten Säule (ein oder mehrere Daniell oder

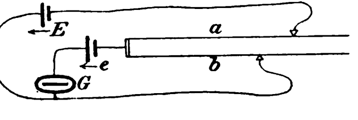
Akkumulatoren) zu vergleichen. a und b sind veränderliche Rheostatenwiderstände, oder ab ist ein Meſsdraht mit zwei Schleifkontakten, an welche die beiden Elemente einander entgegengerichtet angeschlossen werden (Fig.), das inkonstante e mit einem Stromprüfer G. Man sucht Widerstände a und b oder Drahtabschnitte beider Kontakte, für welche der Strom in G verschwindet.



Alsdann sucht man ein zweites Paar von Widerständen oder Drahtabschnitten a' und b', so, daſs der Strom in G wieder verschwindet. Der Kontakt hinter b wird als widerstandskonstant vorausgesetzt. Dann ist

$$\frac{E}{e} = 1 + \frac{b - b'}{a - a'}.$$

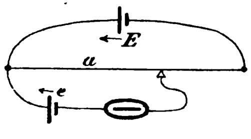
Die Schaltung kann auch mit Verzweigung von der Mitte eines Rheostaten oder mit einem Doppeldraht, dessen beide Kontakte aber widerstandskonstant sein müssen, angeordnet werden. Es gilt dann die nämliche Beziehung.



Vgl. **97** 3, wo auch der Beweis und die Bedingung der Ausführbarkeit.

5. Verfahren nach du Bois-Reymond.

Man läſst den in der ersten Figur mit $a+b$ bezeichneten Widerstand konstant $=l$ und verschiebt nur den Kontakt des Elementes e. Dann ist dessen el. Kraft $e=a \cdot E/(W+l)$. Solange also dasselbe E benutzt wird, ist, wenn man $E/(W+l)=C$ setzt, das zu messende $e=C \cdot a$, d. h. der Länge a, welche den Strom in G verschwinden läſst, einfach proportional.

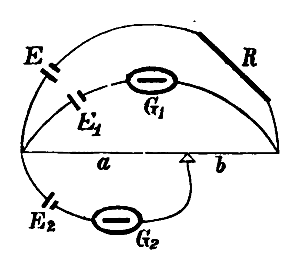


Hier muſs also der Widerstand W des Vergleichselementes E, einschlieſslich seiner Zuleitungen, in Längeneinheiten des Meſsdrahtes ausgedrückt, bekannt sein. Unabhängig davon aber läſst sich der konstante Faktor C auch dadurch bestimmen, daſs man, unter Belassung des Vergleichselementes E an seinem Platze, an die Stelle von e einmal ein Normalelement von bekannter

Spannung e_0 setzt. Wird hierbei die Länge a_0 beansprucht, so ist offenbar $C = e_0/a_0$. Mit anderen Worten: man hat dann e mit e_0 verglichen.

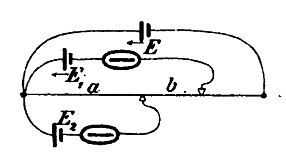
6. Direkte Vergleichung inkonstanter Elemente.

Mittels zweier Stromprüfer G_1 und G_2 und einer stärkeren konstanten Hilfssäule E (Akkumulatoren) werden die E_1 und E_2 direkt mit einander verglichen. Es sei $E > E_1 > E_2$. Durch Einschalten von Widerstand in R und gleichzeitiges Reguliren des Schleifkontaktes kann man die Ströme in G_1 und G_2 zum Verschwinden bringen. Dann ist offenbar (Clark)



$$E_1 : E_2 = (a + b) : a.$$

Der Rheostat ist unnötig, wenn die Kontakte beider Elemente beweglich sind. Stromlosigkeit in beiden Zweigen gibt wieder $E_1 : E_2 = (a + b) : a$. Geeignete Schneiden lassen sich nötigenfalls dicht zusammenschieben.



In Nr. 4, 5 und 6 lassen sich in leicht ersichtlicher Weise anstatt der gespannten Drähte auch Stöpselrheostaten verwenden, an die man die festbleibenden oder beweglichen Verbindungen geeignet anlegt.

Elektrostatische Methoden s. in **127** oder **130**.

100. Elektromotorische Kraft in absolutem Mafse.

I. Die in **99** aufgezählten Methoden der Vergleichung liefern el. Kräfte in absolutem Mafse, sobald das Vergleichselement in diesem Mafse bekannt ist (**80** II).

II. Bestimmung durch Strommessung.

Eine el. Kraft E wird in Volt (1 V $= 10^8$ [C.G.S]; vgl. Anh. 26) gemessen durch den Strom i A, den sie im Widerstande w Ω bewirkt (vgl. **80** I 4) als

$$E = wi \text{ V} \quad \text{oder} \quad = 10^8 \cdot wi \text{ [C.G.S]}.$$

1. Direkte Messung.

Man schlieſst durch ein Galvanometer, ev. mit zugeschaltetem Widerstand. Die Summe dieser äuſseren Widerstände sei $= w_1$, der Widerstand des Elements $= w_0$, die Stromstärke $= J$, dann ist $E = (w_0 + w_1) J$.

Bei empfindlichen Galvanometern kann w_0 und häufig auch der Galvanometerwiderstand vernachlässigt werden.

Ist das Element nicht konstant, so findet man selbstverständlich den der vorhandenen Stromstärke zugehörigen Wert. Mittels verschiedener Widerstände kann man die Abhängigkeit der el. Kraft von der Stromstärke untersuchen.

Vgl. auch **102** und die elektrometrische Methode **127**. Über Klemmspannung **101**.

Spannungsmesser. So heiſsen Strommesser von sehr groſsem Widerstande, ev. einschlieſslich eines konstant vorgeschalteten Widerstandes (so daſs der Widerstand der Stromquelle dagegen vernachlässigt werden kann), falls die Teilung gleich das Produkt Stromstärke $\times$ Widerstand, also die Spannung des Elements angibt.

Vorschaltwiderstände. Ist der Widerstand des Spannungsmessers $= w$, so wird durch Vorschaltwiderstände von $9w$, $99w$ etc. der Wert der Teilung 10, 100 etc. mal gröſser. — Wenn w eine runde Zahl ist, z. B. $= 10000\ \Theta$, so kann dieselbe Teilung auch für Strommessung beziffert sein. Besonders die Weston-Zeiger (**85**) sind oft als Strom- und Spannungsmesser eingerichtet und zugleich mit Abzweig- und Vorschaltwiderständen versehen, die den Skalenwert bis zum Verhältnis 1:1000 verändern lassen.

Das Leitungsmaterial des Spannungsmessers soll von der Temperatur wenig beeinfluſst werden (Tab. 30).

Die Prüfung eines Spannungsmessers kann mittels Strom- und Widerstandsmessung oder mit einer Säule von bekannter el. Kraft (**80** II) geschehen.

2. Ohm'sche Methode. Durch zwei Messungen eliminirt man den Widerstand Säule + Galvanometer. Man schlieſst durch Rheostat und Galvanometer und beobachtet die Ströme i_1 und i_2 bei den Rheostatenwiderständen R_1 und R_2. Dann ist

$$E = i_1 i_2 (R_1 - R_2)/(i_2 - i_1).$$

Der eine Strom mag ungefähr die Hälfte des anderen sein. 35° und 55° Ausschlag sind für die Tangentenbussole am besten.

Die Methode ist auf „konstante" Elemente beschränkt; bei starken Strömen nimmt die el. Kraft aller Säulen ab (S. 426). Dynamomaschinen sind von der Methode ausgeschlossen.

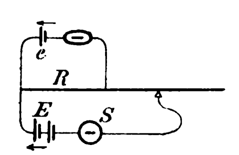
3. Kompensationsmethode nach Poggendorff. Vgl. **99**, 3.

Ist die Stärke des in S gemessenen Stammstromes (Fig. S. 428) gleich J A, wenn gleichzeitig die zu bestimmende el. Kraft e an den Enden des Widerstands R Θ durch diesen Strom kompensirt wird, d. h. wenn G stromlos ist, so hat man

$$e = RJ \text{ V}.$$

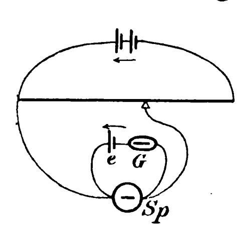
Bei der Anwendung auf inkonstante Elemente beachte man die Vorschriften unter **99**.

Zur Vereinfachung der Rechnung wählt man R von konstanter runder Zahl, je nach der Gröfse von e etwa $= 1$ Θ oder $= 0{,}1$ Θ. Das Verschwinden des Stroms in G wird dann nur durch den Rheostatenwiderstand des Hauptstromkreises bewirkt.



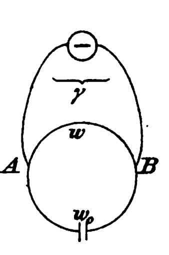
Eine besonders für die Aichung von Thermoelementen bestimmte Ausführung mit $R = 0{,}1$ Θ und einem in Milli-A · geteilten Weston-Strommesser s. bei Lindeck u. Rothe, ZS. f. Instr. 1900, S. 293.

Anordnung mit Spannungsmesser. Der, hier nicht zum Messen sondern nur zum Reguliren bestimmte, Draht oder Rheostat wird von dem konstanten Strome einer Hilfsbatterie (Akkumulatoren) durchflossen. Das zu messende Element e bildet einen Stromkreis mit einem Spannungsmesser Sp (vor. S.) und einem Stromprüfer, liegt aber zugleich an dem Hilfsstrom. Der Kontakt wird so gestellt, dafs e stromlos ist; der Spannungsmesser zeigt dann die el. Kraft von e in diesem Zustande an.



101. Potentialdifferenz im Schliefsungskreise. Klemmspannung.

Um die Potentialdifferenz oder Spannung zu finden, welche zwischen zwei Punkten A und B eines Stromes besteht, zweigt



man zwischen diesen Punkten durch ein empfindliches Galvanometer mit zugefügtem grofsem Widerstand ab. Ist γ der Gesamtwiderstand und i die Stromstärke in der Abzweigung, so ist der Spannungsunterschied P für sehr grofses γ einfach $P=i\gamma$. Ein Spannungsmesser gibt P direkt.

Sind die übrigen Widerstände gegen γ nicht zu vernachlässigen, so kommt eine Korrektion hinzu. Es sei w der Widerstand der Hauptleitung zwischen den beiden Punkten, w_0 ihr übriger Widerstand einschliefslich der Stromquelle, dann war die Spannung P vor dem Anlegen des Zweiges, wenn der Versuch P' ergibt,

$$P=i\left(\gamma+\frac{w_0 w}{w_0+w}\right)=P'\left(1+\frac{1}{\gamma}\frac{w_0 w}{w_0+w}\right).$$

Wie man eine für direkte Messung zu grofse Spannung mefsbar abschwächt, siehe in **99**; vgl. auch das Beispiel daselbst.

Klemmspannung. Darunter versteht man die Potentialdifferenz an den Polen der Stromquelle (Batterie; Dynamomaschine), während dieselbe Strom gibt. Die Messung geschieht so wie oben; nur legt man die Abzweigepunkte an die Pole (Klemmen) der Stromquelle. Die Bestimmung ist besonders bei Dynamomaschinen von Bedeutung, da deren el. Kraft von der Stromstärke abhängt, bei Serienmaschinen sogar überhaupt nur vorhanden ist, wenn dieselben geschlossen laufen; **119**. Nur bei grofsem äufseren Widerstande w ist die Klemmspannung P mit der ganzen el. Kraft E identisch. Bei Batterien und Serienmaschinen ist, wenn w_0 den inneren Widerstand der Stromquelle bedeutet, zu setzen

$$E=P(w_0+w)/w \quad \text{oder} \quad =i(w_0+\gamma(w_0+w)/w).$$

Denn wenn i_0 der Strom in der Stromquelle, so ist $(i_0-i)w=\gamma i$ oder $i_0=i(w+\gamma)/w$. Also $E=i_0 w_0+i\gamma=i(w_0+\gamma(w_0+w)/w)$, q. e. d.

Messung grofser Stromstärken mit dem Spannungsmesser.

Die Messung besonders von starken Strömen wird häufig auf die Spannung in einem Teile des Stromkreises von bekanntem Widerstande in folgender Form zurückgeführt (vgl. 88 u. **130** III). Die Methode ist von grofser Bedeutung.

An einen Teil des Stromkreises, etwa an einen eingeschalteten Starkstrom-Präcisionswiderstand (**80** IV), vom bekannten

Widerstande R legt man einen Spannungsmesser an. Aus der Spannung P findet man den Strom in R gleich P/R. Der Stammstrom ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit $1+R/\gamma$, wenn γ den Widerstand des Spannungszweiges bedeutet; häufig wird R/γ zu vernachlässigen sein.

Wenn z. B. $R=0{,}01$ Ω und $P=0{,}2$ V, gemessen mit einem Sp.-Messer vom Widerstande $\gamma=1000$ Ω, so ist $J=\frac{0{,}2}{0{,}01}\left(1+\frac{0{,}01}{1000}\right)=20{,}0002$ A.

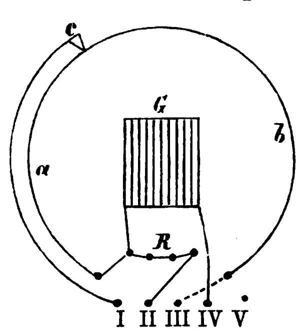
Die Anwendung des Kompensationsapparats s. in **103** I.

102. Universalgalvanometer und Torsionsgalvanometer (Siemens u. Halske).

Die Instrumente dienen aufser zur Bestimmung von Stromstärken und Widerständen auch zu Spannungsmessungen. Über die neuere, sehr handliche Form des Universalgalvanometers vgl. Raps, El.-techn. ZS. 1897, 196, wo auch die Isolations- und Fehlerbestimmungen an Leitungen behandelt werden.

I. Universalgalvanometer.

G ist der Multiplikator, R bedeute die durch Herausziehen von Stöpseln einzuschaltenden Widerstände 1, 10, 100 oder 1000 Ω, a und b den kreisförmig gespannten Brückendraht. I, II, III, IV, V sind Klemmschrauben, von denen III und IV durch einen Stöpsel direkt mit einander verbunden werden können. Klemme V mit einem Kontakttaster nach II wird für momentanen Schlufs statt II gebraucht. Wenn V fehlt, so kann zu diesem Zweck ein leicht zu handhabender Kontakt an II dienen. C bedeutet den verstellbaren Kontakt (die wirkliche Verbindung von C nach I liegt unter dem Instrument).



Neue Form. Diese hat mehrere Verbesserungen erhalten, nämlich, aufser einem Westonzeiger statt der Sinusbussole, als Widerstände R die Beträge 1, 9, 90, 900 Ω. Hieraus lassen sich Vergleichswiderstände 10, 100, 1000 bilden, aufserdem aber dienen 9, 99, 999 als Vorschalter vor den Galvanometerwiderstand 1 Ω bei Spannungsmessungen. Ferner kann $R=1$ durch das Einsetzen eines gespaltenen Nebenschlufs-Stöpsels von $\frac{1}{9}$ Ω in $\frac{1}{10}$ Ω verwandelt werden.

An dem Mefsdrahte ist die Teilung und Bezifferung nach a/b adoptirt, so dafs Rechnungen nicht nötig sind.

Bei Strom- und Spannungsmessungen ist hier eine bestimmte Stromrichtung inne zu halten. Aufserdem vermeide man starke Ströme, da sie das Instrument verbrennen können.

Das (nicht gezeichnete) Stöpselloch y schliefst einen Nebenwiderstand, der das Galvanometer auf 1 Θ und 0,001 A Skalenwert bringt. Wo hierauf nichts ankommt, kann man durch Offenlassen des Loches die Empfindlichkeit vergröfsern.

1. Strommessung. Klemmen II (V) und IV bilden die Pole. R kann als Vorschaltwiderstand dienen. Ältere Instrumente sind mit der Gradeinteilung am Brückendraht als Sinusbussolen (**82**) zu gebrauchen. An den neueren ist ein in Milli-A geteilter Weston-Strommesser (**85**, 2) vom Widerstande 1 Θ vorhanden. Starkstrom-Nebenwiderstände von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{19999}$ Θ, um den Skalenwert mit 10 bis 20000 zu multipliciren, können geliefert werden.

2. Widerstandsbestimmung. Man verbindet I und II (V) mit einem Element, II und III mit dem Widerstande und setzt den Stöpsel zwischen III und IV. Man hat dann die gewöhnliche Brückenschaltung S. 396. Wird C so gestellt, dafs der Kontakt keinen Ausschlag gibt, so ist $w = R \times b/a$. R wählt man so, dafs b und a möglichst wenig ungleich sind. An älteren Instrumenten ist $b + a = 300$; der Nullpunkt der Teilung liegt in der Mitte. Eine Tabelle erleichtert die Rechnung.

An dem neuen Instrument ist III, anstatt mit b, mit dem Ende a verbunden, so dafs $w = R \times a/b$ wird.

3. Vergleichung von el. Kräften; altes Instrument (**99**; Verfahren nach du Bois-Reymond). Man entfernt den Stöpsel III—IV, setzt die Stöpsel von R aber ein, und schaltet die eine der zu vergleichenden el. Kräfte e zwischen I und IV, die (stärkere und konstante) Vergleichs-Säule E zwischen II (V) und III, und zwar gleichnamige Pole von e und E mit I und III verbunden. Dann sucht man die Strecke a, bei welcher die Nadel in Ruhe bleibt; das Element e wird dabei, wenn es inkonstant ist, nur momentan geschlossen, was man mit dem Kontaktröllchen selbst oder an der Klemme I ausführt. Wenn der Widerstand w_0 der Säule E bekannt ist, so gilt dann $e:E = a:(a + b + w_0)$.

Um das Element e mit einem anderen e' zu vergleichen, schaltet man nun e' statt e ein. Findet man jetzt die Einstellung a', so ist, von w_0 unabhängig, $e:e' = a:a'$.

4. Spannungsmessungen; neues Instrument. Das Loch 1 Θ wird immer gestöpselt gehalten; 9, 99 oder 999 dienen ev.

zur Vorschaltung. 1 Teilstrich entspricht 0,001, 0,01, 0,1 oder 1 V Spannung an den Polen des Instruments.

II. Torsionsgalvanometer.

Das T.-G. dient zur Strom- und zur Spannungsmessung.

Vom Erdmagnetismus sind die Angaben bei Orientirung in den Meridian unabhängig. Änderungen des Nadelmagnetismus dagegen, welche mit der Zeit oder durch einen zu starken Strom eintreten können, ändern die Konstante, die also häufig neu zu bestimmen ist.

Ferner ist, wenn nicht Multiplikator und Nebenwiderstände aus einem wärmeunempfindlichen Materiale bestehen, auf die Temperatur zu achten und der Strom nicht unnötig lange zu schliefsen.

Strommessung. Man führt die Nadel durch Drehung des Torsionskopfes um den der Stromstärke proportionalen Winkel α auf ihre den Windungen parallele Nullstellung zurück. Die Stromstärke ist dann $i = C \cdot \alpha$. Die Konstante C wird mit dem Silbervoltameter (**87** I), oder dem Normalelement (**88**), oder durch Vergleichung mit einem Normalgalvanometer bestimmt (**89**). Die von Siemens und Halske ausgegebenen zwei Arten von Instrumenten sollen $C = 0{,}001$ bez. $0{,}0001$ A/Grad haben.

Starke Ströme werden mit Abzweigung (**86**) gemessen. Der Multiplikatorwiderstand beider Instrumente ist auf 1 bez. 100 Θ abgeglichen. Es bewirkt also ein Zweigwiderstand z den Reduktionsfaktor $C = 0{,}001\,(z+1)/z$ bez. $0{,}0001\,(z+100)/z$ A. Runde Zahlen erhält man durch die den Instrumenten beigegebenen Zweigwiderstände $z = \frac{1}{9}\ \frac{1}{99}$ etc. bez. $z = \frac{100}{9}\ \frac{100}{99}$ Θ etc., nämlich $C = 0{,}01\ \ 0{,}1$ etc. bez. $C = 0{,}001\ \ 0{,}01$ etc.

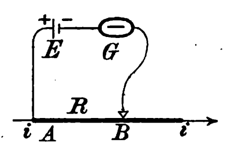
Spannungsmessung. Die Vorschaltung von R Θ zu den Instrumenten bewirkt den Wert eines Skalenteiles bei dem einen Instrument $= 0{,}001\,(R+1)$ V, bei dem anderen $= 0{,}0001\,(R+100)$ V. Bei Vorschaltung von 9, 99, 999 Θ bez. 900, 9900, 99900 Θ bedeutet also 1 Sk.-T. 0,01 0,1 1 bez. 0,1 1 10 V.

103. Kompensationsapparat (Feufsner).

Die früher gegebenen Regeln zur Strom-, Widerstands- und Spannungsmessung mittels Normalelemente sollen hier mit Bezug auf den K.-App. specialisirt werden, der hauptsächlich dazu bestimmt ist, die Zurückführung einer Stromstärke auf Widerstand und Spannung (**88**) handlich zu machen, der aber auch zur Widerstands- (**91**, **130**) und Spannungsmessung (**99** bis **101**) gebraucht werden kann.

An Genauigkeit werden die Nullmethoden des K.-App., die Richtigkeit der Widerstandsrollen und eine angemessene Behandlung der Normalelemente vorausgesetzt, die gewöhnlichen Mittel nicht selten übertreffen. Gewöhnen mufs man sich erst durch Übung an die gröfsere Aufmerksamkeit, welche, im Vergleich mit gewöhnlichen Galvanometern, die Handhabung und die weniger einfache Anordnung des K.-App. verlangt. Eine Bequemlichkeit bieten andrerseits die Anordnungen, welche Zahlenrechnungen fast ganz zu umgehen gestatten, zum Teil freilich einen beträchtlichen Aufwand an verfügbaren Rheostatenwiderständen bedingend.

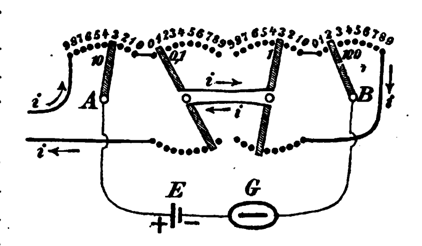
Die Kurbelkontakte wollen sorgfältig behandelt sein. Nur an den eigentlichen Abzweigpunkten bleiben Übergangswiderstände aufser Betracht. Schützen vor Staub, häufiges Abwischen mit etwas Petroleum, auch wohl ständige Bedeckung mit ein wenig feinem Mineralöl ist anzuraten.



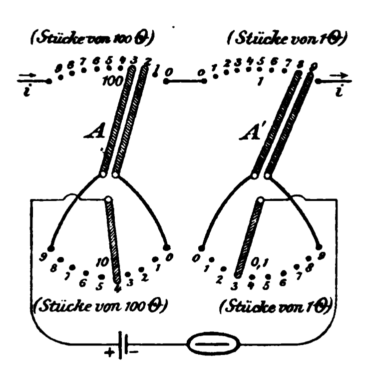
Dem K.-App. ist eigentümlich, dafs ein aus Rollenwiderständen bestehender Gesamtwiderstand, ähnlich wie sonst ein Schleifdraht (vgl. Fig.), automatisch konstant bleibt, obwohl im Teile AB des Stromkreises, von dem man abzweigt, Änderungen vorgenommen werden.

Die Änderungen geschehen nämlich an Dekadenwiderständen mittels Kurbeln, von denen die mittleren je eine von ihnen isolirte, aber sich mitdrehende Rückwärtsverlängerung haben. Diese schaltet auf den Knöpfen eines Zwillingsrheostaten den Widerstand, welchen die erstere zwischen A und B ein- oder ausschaltet, gleichzeitig in dem äufseren Teile der Stromleitung aus oder ein.

An einem Rheostaten, der aus zusammen nahe 1000 Θ, nämlich aus je 9 Zehnteln, Einern, Zehnern und Hundertern besteht, zeigt dies schematisch die Figur. Die Abzweigung mit dem Normalelement liegt an den Kurbeln A und B, zwischen denen durch passende Stellung der vier Kurbeln jeder Widerstand zwischen 0,1 und 999,9 eingeschaltet werden kann. Der zu messende Strom i fliefst dabei aber konstant durch den Widerstand 999,9, denn der mittels der Doppelkurbeln oben ausgeschaltete Betrag der Einer und Zehntel wird durch die unteren Kurbeln von selbst eingeschaltet. Der Kompensationswiderstand beträgt in der Figur $R = 233{,}1$ Θ.



Anordnung von Raps; Fig. f. S. Der Hauptstrom durchfliefst hintereinander nur je zehn Hunderter und Einer. Aufserdem ist noch je eine Gruppe von neun Hundertern bez. Einern vorhanden, von denen vermöge der Doppelradien A und A' die eine stets einem der Hunderter, die andere



einem der Einer parallel liegt. Der ganze Widerstand im Hauptstrom beträgt hiernach, wie in der vorigen Figur, konstant 999,9 Θ.

Die Abzweigung mit Normalelement und Galvanometer liegt an Kurbeln der beiden Nebengruppen. Den Doppelradien gibt man die Stellungen, bei denen der in der Hauptleitung eingeschaltete Komp.-Widerstand noch eben zu klein ist und rückt dann die Kurbeln auf genaue Kompensation. In der schematischen Figur ist der Komp.-Wid. $= 248{,}3$ Θ.

Vorteilhaft ist die kleinere Gesamtzahl der Widerstände und ihre leichtere Kontrolirbarkeit, da sie nur in zwei Gröfsen vorkommen und da die kleinen Stücke vermieden sind. Nachteilig wirkt nur der Umstand, dafs der Widerstand des Galvanometerkreises je nach der Einstellung sprungweise sich um das zehnfache ändern kann.

Vgl. Raps, Elt. ZS. 1895, 507.

Häufig sind sämtliche Widerstände 10mal gröfser und es ist in die Verbindung zwischen den mittleren Kurbeln noch eine Zehntel-Dekade gebracht, deren Ein- oder Ausschaltung den Gesamtstrom nicht merklich ändert.

In jedem Falle ist also ein konstanter Gesamtwiderstand vorhanden, innerhalb dessen man durch Kurbeldrehungen von einem beliebigen, in vier oder fünf Ziffern angebbaren Teile abzweigen kann.

Über die als Unterlage absoluter Messungen dienenden **Normalelemente** s. **80**, II und über die für sie nötigen **Vorsichtsmafsregeln** S. 380. In den Zahlenbeispielen wird hier als Normalelement das von der Weston-Gesellschaft ausgegebene Cadmiumelement unterstellt, welches von der Temperatur unabhängig 1,0190 V hat. Bei anderen Elementen sind dafür die Zahlen aus **80** S. 350 u. 351 einzusetzen.

Herstellung einer bekannten Stromstärke von runder Zahl im Komp.-Apparat.

Diese wird als bequemes Zwischenmittel zur Messung häufig angewandt. Man lege ein Normalelement von der el. Kraft E_0 V an einen Widerstand $10^n E_0$ Θ [z. B. $= 100\,E_0$, also 101,9 Θ für das Cadmiumelement der Weston-Gesellschaft]. Man schliefst eine konstante Batterie durch den Apparat und einen vorgeschalteten Hilfsrheostaten und macht mittels des letzteren das Element stromlos. Dann ist die Stromstärke $i_0 = 10^{-n}$ A [z. B. $= 0{,}01$ A]. Damit die Kontrole von i_0 nicht ein jedesmaliges Wiederanlegen des Elements erfordert, sind den Apparaten häufig für die Stromstärken 0,01, 0,001 und 0,0001 A besondere Widerstände von 101,9, 1019

und 10190 Ω beigegeben, an denen man das Element liegen läfst. Ein Umschalter erlaubt, das Galvanometer jederzeit in diese Abzweigung zu schalten und die Konstanz von i_0 zu kontroliren.

Ganz schwache Ströme [etwa 10^{-5} A] kann man durch Parallelschalten eines kleineren Widerstandes z zum Widerstande w des Apparates herstellen. Die Stromstärke der unverzweigten Leitung wird hierdurch (S. 374) auf den Bruchteil $z/(w+z)$ verkleinert [z. B. durch $z=10,1$ Ω zu den 999,9 Ω der Figur auf $10,1/(999,9+10,1)=1/100$].

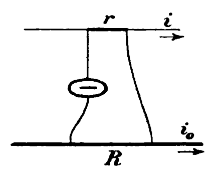
I. Messung einer Stromstärke.

a) eines durch den K.-App. fliefsenden Stromes (wie in 88). Der Strom kompensire (Fig. S. 437) ein Normalelement von der Spannung E_0 am Widerstande R, dann ist seine Stärke

$$i=E_0/R.$$

Beispiel: In der Figur S. 437 sei $E=E_0=1,019$ V; dann ist $i=1,019/233,1=0,00437$ A.

b) eines aufserhalb gegebenen Stromes. Das Verfahren stimmt wesentlich mit 88 I u. II überein. Im K.-App. sei so wie oben eine bekannte Stromstärke i_0 hergestellt. Der zu messende Strom i durchfliefse den bekannten Widerstand r. Wird die Endspannung in r durch Anlegen an den Widerstand R des K.-App. (Fig.) kompensirt, so ist $i=R\cdot i_0/r$. Der Reduktionsfaktor i_0/r kann auf einen runden Betrag gebracht werden, z. B $i_0=0,01$ A $r=1$ Ω $i_0/r=0,01$. r als Starkstromwiderstand von kleinem Betrage [0,001 Ω] läfst so starke Ströme [bis 1000 A] messen. Rechnung kann ganz gespart werden.



II. Messung einer Spannung.

a) Hohe Spannung. Man schliefst diese durch den K.-App. und einen vorgeschalteten Rheostaten von grofsem Betrage. Ist R der Widerstand des K.-App. (ev. + Element), mufs aufserdem R' vorgeschaltet werden, damit das Normalelement E_0, an die Strecke R_0 angelegt, kompensirt ist, so beträgt die gesuchte Spannung $E=(R+R')\cdot E_0/R_0$.

Der Reduktionsfaktor E_0/R_0 kann wie früher durch die Wahl von R_0 [1019, 101,9 Ω etc.] zur Rechnung bequem gemacht werden. R' wird in diesem Falle zuletzt ausprobirt.

In Ermangelung des geeigneten Hilfsrheostaten R' probirt man, ev. unter Vorschaltung eines konstanten grofsen Widerstandes R', den Abzweigwiderstand R_0 aus und rechnet nach der Formel.

Über die Reduktion hoher Spannungen auf einen bekannten Bruchteil s. noch S. 426 u. 427.

b) Kleine Spannungen. Die gesuchte Spannung E wird auf E_0 zurückgeführt, indem man durch den K.-App. einen konstanten Strom schickt und an diesem E bez. E_0 einzeln kompensirt. Bedeuten R bez. R_0 die hierfür nötigen Abzweigwiderstände, so kommt $E = R \cdot E_0/R_0$. Der Faktor E_0/R_0 (der die Stromstärke im Apparat darstellt) kann wieder auf einen für die Rechnung bequemen Betrag (0,01 etc.) gebracht worden sein; vgl. darüber S. 438.

III. Widerstandsbestimmung.

Man läfst den K.-App. von einem konstanten Strom durchfliefsen, die zu vergleichenden Widerstände hintereinander geschaltet von einem anderen. Beide Ströme werden auf ihre Unveränderlichkeit geprüft. Die Endspannungen der zu vergleichenden Widerstände werden am K.-App. verglichen; wie sie, verhalten sich die Widerstände. Die Empfindlichkeit richtet sich nach der Stromstärke; je kleiner die Widerstände, desto stärker sucht man den durch sie geschickten Strom zu nehmen, mufs aber die durch die Stromwärme gesteckte Grenze innehalten.

Das Verfahren entspricht genau den in **91** II 1 u. **130** II beschriebenen, mit anderen Mitteln arbeitenden Methoden.

104. Beziehungen der elektrischen Spannung zur Chemie der Lösungen.

Eine Übersicht über die Aufgaben und ihre Grundlagen bei Nernst, Ber. d. D. Ch. Ges. 1897, 1547.

I. Koncentrationsspannung auf Elektroden.

Zwischen einer verdünnten Lösung, welche die freien Jonen eines chemisch n-wertigen Metalles in der Koncentration α_1 enthält, und einer Elektrode aus demselben Metall besteht nach der osmotischen Theorie der Stromerzeugung (Nernst) bei der Temperatur t eine, nach der Elektrode hin positive el. Spannung $e_1 = \frac{R_0}{n}(273 + t) \lg \text{nat} \frac{\alpha_1}{A}$. A heifst elektrolytische Lösungstension des Metalles.

R_0 ist die Gaskonstante, aber bezogen auf die Menge der mit der Elektricitätsmenge Eins wandernden Jonen, d. i. im elektromagnetischen [C.G.S]-System die Zahl (Anh. 9 und 87 3) $R_0 = 83100000:9654 = 8608$.

Die Spannung wird dabei in el.-magn. [C.G.S]-Einheiten erhalten, also durch Multiplikation mit 10^{-8} (Anh. 26) in ♈. Führt man zugleich den gewöhnlichen Logarithmus ein, indem man lg nat = 2,303 · lg brigg setzt, so wird die Konstante $= 8608 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}303 = 0{,}0001982$. (Die Ziffern haben mit der z. B. S. 166 auftretenden Konstante 0,00198 keinen inneren Zusammenhang.)

Stehen also zwei gleiche Elektroden sich in überbrückten Lösungen von den Jonenkoncentrationen (vgl. oben) α_1 und α_2 gegenüber, so beträgt die Spannung e zwischen ihnen $e_2 - e_1$, d. h. es ist

$$e = \frac{0{,}0001982}{n}(273 + t)\,\mathrm{lg\,brigg}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\ ♈,$$

für $t = 18^0$ berechnet sich $e = \frac{0{,}0577}{n}\,\mathrm{lg}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ♈, was bei $n = 1$ z. B. für $\alpha_2/\alpha_1 = 10$ bez. 100 die Spannung 0,058 bez. 0,116 ♈, also gut ausmeſsbare Gröſsen ergibt.

Vgl. Nernst, ZS. f. physik. Ch. 4, 147. 1889.

Aus einer Spannung e ♈, die zwischen zwei Elektroden unter den obigen Verhältnissen besteht, wird nach Gl. 1 auf ein Verhältnis α_2/α_1 der Koncentrationen der Jonen ihres (n-wertigen) Metalles in den umgebenden Lösungen geschlossen, gegeben durch

$$\mathrm{lg}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = n\frac{5045}{273+t}\cdot e;\quad \text{z. B. bei } 18^0\ \mathrm{lg}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = n\cdot 17{,}34\cdot e.$$

Aus der bekannten Jonenkoncentration α_1 läſst sich also auf eine unbekannte α_2 schlieſsen, wenn es sich um Metalle handelt, die als Elektroden zugänglich sind. Man überbrückt die Lösungen durch einen Heber, der, um die Mischung zu erschweren, etwa Glaswolle enthält. Die im allgemeinen auftretende Korrektion durch die entstehende Diffusionskette kann man dadurch verschwinden lassen, daſs sämtlichen Lösungen gleichmäſsig ein indifferenter Elektrolyt (KNO_3) in groſsem Überschuſs zugesetzt wird.

Von der Jonenkoncentration wird auf die gröſsere Gesamtkoncentration des Salzes durch Division mit dem Dissociationsgrad $\mathfrak{a} = \Lambda/\Lambda_0$ (96 II) zurückgeschlossen.

L ö s l i c h k e i t s c h w e r l ö s l i c h e r S a l z e. Das Verfahren ist auf ein Salz anwendbar, dessen Metall als konstante Elektrode gebraucht werden kann. Die zu bestimmende gesättigte Lösung

wird mit einer bekannten Lösung eines Salzes von demselben Metall verbunden. Kleine Verunreinigungen sind meistens nur dann von Einfluſs, wenn sie dieselben Metallionen enthalten. Zur Beseitigung dieser kann eine gemessene kleine Menge eines löslichen Salzes mit demselben Anion hinzugefügt sein, z. B. KCl bei der Untersuchung von AgCl (d. h. man fällt die schädlichen Verunreinigungen aus).

Über den Einfluſs des Zusatzes auf die Löslichkeit und über die Anordnung vgl. Ostwald, Lehrb. d. allg. Ch. 2. Aufl. II, 879; Goodwin, ZS. f. phys. Ch. 13, 641. 1894.

II. Normalelektroden.

Um die Spannung auf einer einzelnen Elektrode angeben zu können, miſst man sie gegen eine als Norm angenommene Elektrode wie unter I.

1. Kalomelelektrode. Quecksilber, Quecksilberchlorür, gesättigt in $\frac{1}{10}$ norm. KCl-Lösung. Die Spannung an der Elektrode gegen die Lösung wird zu 0,616 V angenommen (Ostwald).

2. Wasserstoffelektrode. Platinirtes Platin, mit daran vorbeigeleitetem Wasserstoff beladen, in norm. H_2SO_4-Lösung. Sie besitzt gegen die Kalomelelektrode eine Potentialdifferenz von $+0,277$ V.

Vgl. z. B. Wilsmore, ZS. f. physik. Ch. 35, 291; Ostwald, ib. S. 333. 1900; Wilsmore u. Ostwald, ib. 36, 91. 1901.

III. Polarisation von Elektroden; Zersetzungsspannung.

Man schaltet den Elektrolyt zwischen indifferenten Elektroden — meist Platin — mit einem empfindlichen Strommesser in einen Stromkreis, dessen Widerstand bez. el. Kraft (vgl. **80**, Fig. S. 352) regulirbar ist, und miſst die mit allmählich steigender Stromstärke anwachsende Spannung der Polarisation an den Elektroden (**99** bis **101**, **130** I). An dem Punkte, welchem die eintretende Zersetzung entspricht, soll das Anwachsen einen Knick zeigen, der aber in Wirklichkeit meist wenig scharf ausgeprägt ist.

Man pflegt die Resultate graphisch darzustellen und die gestreckten Teile bis zu ihrem Schnittpunkt auszuziehen, den man als Zersetzungspunkt ansieht.

In wässrigen Lösungen sind meist mehrere solche Punkte gefunden worden, die als Zersetzungspunkte für verschiedene Paare von Jonen betrachtet werden. Neben denen des gelösten Elektrolyts sind noch H, O und OH möglich.

Die Polarisation an einem einzelnen Pol sucht man dadurch zu erhalten, dafs die andere Elektrode verhältnismäfsig sehr grofs gewählt wird, oder besser dadurch, dafs man gegen eine dritte, stromfreie, Hilfselektrode mifst.

Die gemessene Gröfse enthält aufser der Polarisationsspannung die dem Ohm'schen Gesetz entsprechende Spannung, die, falls sie bei den kleinen in Betracht kommenden Stromstärken überhaupt merklich wird, abzuziehen ist.

Über Theorie und Versuchsanordnungen vgl. Le Blanc, Lehrb. d. Elektrochemie S. 221. 1900; Nernst, Ber. d. D. Chem. Ges. 30, 1547. 1897; Glaser, ZS. f. Elektroch. 4, 355. 1898; Bose, ib. 5, 153. 1898.

105. Bestimmung des erdmagnetischen oder eines anderen magnetischen Feldes durch Strommessung.

I. Mit Voltameter und Tangentenbussole.

Aus der Ablenkung α einer Tangentenbussole durch einen Strom, dessen Stärke i in [C.G.S]-Einheiten anderweitig bekannt ist, läfst sich nach Formel S. 358 die erdmagnetische Horizontalintensität H ableiten als

$$H = \frac{2n\pi}{R}\frac{i}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

i kann durch ein gleichzeitig eingeschaltetes Voltameter (**87**) bestimmt werden, wobei aber das auf [C.G.S] bezogene elektrochemische Äquivalent einzusetzen ist, also für Silber 11,18 mg/sec.

Aber auch irgend ein richtiger, vom Erdmagnetismus unabhängiger Strommesser, z. B. ein Weston-Zeiger kann i liefern. Angaben in A werden durch Division durch 10 auf [C.G.S]-Einheiten reducirt.

II. Mit Bifilargalvanometer und Tangentenbussole (W. Weber).

Der Strom durchfliefst ein Bifilargalvanometer (**83a**) von der Direktionskraft D (**27a**) und der Windungsfläche f (**106**) und eine Tangentenbussole (vgl. oben). Die gleichzeitigen Ablenkungen seien φ am Bifilar und α an der Tangentenbussole.

Dann erhält man die Horizontalintensität H aus

$$H^2 = \frac{D}{f}\frac{2\pi n}{R}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Stromstärke. Man erhält zugleich die Stromstärke i in absolutem Maſse aus

$$i^2 = D/f \cdot R/2\pi n \cdot \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Der Strom wird in beiden Instrumenten kommutirt. Über Korrektionen der Tangentenbussole vgl. S. 359. Zu R kommt ev. überall der Torsionsfaktor $1+\Theta$.

Die Ausdrücke ergeben sich, wenn man aus den beiden Gleichungen der einzelnen Instrumente (**81** u. **83a**) i oder H eliminirt.

Vgl. F. K., Pogg. Ann. 138, 1. 1869.

Starke magnetische Felder (z. B. zwischen den Polen eines Elektromagnets). Ein kleines, mit seiner Windungsfläche f den Kraftlinien paralleles Bifilargalvanometer erfahre, von dem Strome i [C.G.S] (also eine Angabe in A durch 10 geteilt) durchflossen, in dem Felde die Ablenkung φ, dann ist $H = \frac{D}{fi}\operatorname{tg}\varphi$. Die Messung von i kann z. B. mit einem Westonstrommesser geschehen.

Vgl. Himstedt, Wied. Ann. 11, 828. 1880; Stenger, ib. 33. 312. 1888.

III. Mit dem Bifilargalvanometer und einer Magnetnadel (F. K.).

Nördlich oder südlich im Abstande a cm von der Mitte der Bifilarrolle ist in gleicher Höhe eine kurze Magnetnadel aufgehängt. Der Strom, welcher den Ausschlag φ des Bifilars bewirkt, lenke die Nadel um ψ ab. Dann ist

$$H^2 = \frac{D}{a^3}\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\psi} \quad \text{und} \quad i^2 = \frac{a^3 D}{f^2}\frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}{\cos\varphi}.$$

Wegen der Ausdehnung der Bifilarrolle (Halbmesser $=r$) und der Fadentorsion ist H^2 durch Division und i^2 durch Multiplikation mit $\left(1-\frac{9}{8}\frac{r^2}{a^2}\right)(1+\Theta)$ zu korrigiren.

Man stellt das Magnetometer nördlich und südlich auf, setzt für a den halben Abstand des Aufhängefadens und nimmt aus den Ablenkungen die Mittel. Vergleiche auch **73**.

Beweis. φ ist gegeben durch $D \cdot \sin\varphi = fiH \cdot \cos\varphi$. Für die Ablenkung ψ der Nadel durch den Strom der, selbst um φ abgelenkten, Rolle gilt $H(1+\Theta)\sin\psi = \frac{fi\cos\varphi}{a^3(1-\frac{3}{8}r^2/a^2)}\cos\psi$, woraus sich die obigen Ausdrücke ergeben.

Beobachtung aus 1. Hauptlage. Man stellt das Magnetometer östlich und westlich vom Bifilar auf; dann ist

$$H^2 = \frac{2D}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}(1+\Theta)}\,\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\psi}.$$

Über einige Korrektionen s. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

106. Bestimmung der Windungsfläche einer Drahtspule.

I. Aus den gemessenen Durchmessern. Am direktesten, aber entweder mühsam oder weniger genau ist die Ausmessung des Durchmessers jeder Windungslage an mehreren Stellen (mit dem Kathetometer oder dem Cirkel) oder auch des Umfanges (mit dem Bandmafs). Von dem an der äufseren Oberfläche der Schicht gemessenen Durchmesser ist natürlich die Drahtdicke abzurechnen.

Ist nur die Windungszahl N, sowie der innere und der äufsere Halbmesser r_0 und r_1 gemessen, so hat man bei gleichmäfsiger Wickelung $f = \frac{1}{3}\pi N(r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2)$.

II. Aus der Drahtlänge. Für eine nicht zu feine Drahtsorte kann man die Summe der Windungsflächen einer Spule messen, indem man bei dem Aufwinden die Windungszahl und die Länge des Drahtes bestimmt.

Bilden kreisförmige Windungen eine Lage von rechteckigem Querschnitt, ist l die Drahtlänge, n die Anzahl der Windungen, h die Höhe der Windungslage, so wird die Windungsfläche f gefunden $f = l^2/4\pi n + \frac{1}{12}\pi n h^2$.

Wegen des Einsinkens der Drähte und des Zusammenpressens der Bespinnung wird der so gemessene Wert mehr oder weniger zu grofs ausfallen.

Vgl. H. Weber, der Rotationsinduktor, Leipzig 1882.

III. Durch magnetische Fernwirkung (F. K.). Derselbe Strom durchfliefse die Spule und eine Spiegel-Tangentenbussole mit einer Windung vom Halbmesser R. Auf die kurze

Nadel wirken beide Teile des Stromes gleichzeitig. Die Stromleiter sollen folgende Stellung gegen einander haben.

Die Spulenaxe liegt ostwestlich. Ihr Mittelpunkt hat den Abstand a von der Nadel und liege von dieser entweder östlich oder westlich (1. Hauptlage), oder nördlich oder südlich (2. Hauptlage). Den Abstand wählt man so, dafs die beiden Wirkungen auf die Nadel, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind, sich nahe aufheben. Ist letzteres genau der Fall, so hat man in erster H.-L. $f = a^3\pi/R$.

Andernfalls sei φ der Ausschlag, wenn der Strom in der Tang.-Bussole allein kommutirt wird, und Φ, wenn man beide gleichsinnig wirkende Ströme kommutirt. Dann ist (Vorzeichen von φ!)

$$f = \frac{a^3\pi}{R}\,\frac{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\varphi}.$$

In der zweiten H.-L. kommt der Faktor 2 hinzu.

Beweis. Da die Drehmomente des Stromes i auf die Nadel M von der Spule und von der Tangentenbussole zusammen dem des Erdmagnetismus H das Gleichgewicht halten, so hat man (für die 1. H.-L.)
$2Mif/a^3 \cdot \cos\Phi + Mi2\pi/R \cdot \cos\Phi = MH\sin\Phi$ oder

$$2i(f/a^3 + \pi/R) = H\operatorname{tg}\Phi;$$

ebenso:

$$2i(f/a^3 - \pi/R) = H\operatorname{tg}\varphi.$$

Hieraus folgt durch Division der obige Ausdruck.

Korrektionen. 1. Wegen des Polabstands $\mathfrak{l}$ der Nadel ist der Ausdruck für f in 1. H.-L. mit $1 + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2/a^2 + \frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2$, in 2. H.-L. mit $1 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2/a^2 + \frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2$ zu multipliciren.

2. Die Abnahme der Kraft mit $1/a^3$ ist nicht streng richtig. L soll die Länge, r_1 und r_0 den äufseren und inneren Halbmesser der Spule bezeichnen. a sei so grofs, dafs L^4 und r^4 gegen a^4 zu vernachlässigen sind. $(r_1^5 - r_0^5)/(r_1^3 - r_0^3)$ heifse k. Dann dividirt man den obigen Ausdruck für f in der 1. H.-L. durch $1 + (\frac{1}{2}L^2 - \frac{9}{10}k)/a^2$, in der 2. H.-L. durch $1 + (\frac{27}{40}k - \frac{3}{8}L^2)/a^2$.

3. Wegen Korrektionen der Tangentenbussole s. 81, S. 360.

Messung von a. Man stellt z. B. die Tangentenbussole folgeweise auf beiden Seiten der Spule auf und setzt für a den halben Abstand der beiden Lagen des Nadelfadens.

Vgl. über Ausführung und Korrektionen F. K., Wied. Ann. 18, 513. 1883. (Mit λ wird daselbst die ganze Nadellänge bezeichnet. In den Formeln für 1te H.-L. mufs 0,52 statt $\frac{1}{3}$ stehen.)

Über Ausmessen langer Spulen s. z. B. Heydweiller, Wied. Ann. 41, 876. 1890.

Verhältnis des Halbmessers von Drahtringen.

Die Aufgabe kommt z. B. in **84** III vor. — Man stellt die Ringe als Galvanometer-Multiplikatoren mit kurzen Nadeln auf und lässt sie von demselben Strom durchfliefsen. Sind R_1 R_2 die Halbmesser, n_1 n_2 die Windungszahlen, φ_1 φ_2 die Ablenkungen, so ist $R_1 : R_2 = n_1\varphi_2 : n_2\varphi_1$. Ordnet man koncentrisch an und mifst die Ausschläge Φ und φ bei gleich- und entgegengerichtetem Strom, so kommt, wenn Ring I die stärkere Wirkung hat, $R_1 : R_2 = n_1(\Phi - \varphi) : n_2(\Phi + \varphi)$.

Wegen Korrektionen aus Ringquerschnitten und Nadellängen sei auf **81** verwiesen.

107. Elektromagnetische Drehung des Lichtes (Verdet'sche Konstante).

Ein polarisirter Lichtstrahl durchsetze einen „magnetooptisch aktiven" Körper von der Länge l in der Richtung der Kraftlinien eines magnetischen Feldes H. Der Drehungswinkel α des Lichtstrahles ist dann (Faraday, Verdet)

$$\alpha = C \cdot Hl.$$

C ist die magnetooptische oder Verdet'sche Konstante des Körpers. Sie wächst mit abnehmender Wellenlänge des Lichtes, von rot bis blau durchschnittlich auf das doppelte bis dreifache. Die Drehung geschieht in der Richtung des Stromes, welcher das magnetische Feld durch Umkreisen hervorruft.

In dünnen Schichten magnetisirbarer Metalle findet keine Proportionalität sondern ein Anwachsen zu einer Grenze statt (Kundt). Die Wellenlänge hat den entgegengesetzten Einflufs.

Für Natriumlicht bei 18° ist (Arons, H. Becquerel, Bichat und de la Rive, Gordon, Köpsel, Quincke, Rayleigh, Rodger und Watson, Siertsema) in

	Schwefelkohlenstoff	Wasser	schwerem Glase	
$C =$	0,0425′,	0,0131′,	0,08′	$[\mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{gr}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}]$.

C nimmt mit wachsender Temperatur ab, auf 1° bei CS_2 um 0,00007, bei Wasser in mittl. Temp. um 0,000002. Es ist beiläufig dem Quadrat der Wellenlänge λ des Lichtes umgekehrt proportional, genauer $C = a/\lambda^2 + b/\lambda^4$.

Rodger und Watson, Phil. Trans. 186 A, 621. 1895; ZS. f. phys. Ch. 19, 323. 1896. — Konstanten sonstiger, insbesondere flüssiger Körper u. a. bei Quincke, Jahn, Wachsmuth. Literatur s. Wiedemann, Elektricität III, 1044 ff.

Die Messung ergibt sich aus der Formel. Über die Bestimmung von α s. **71**. Das magn. Feld wird zwischen breiten

Elektromagnetpolen mit möglichst kleinen Bohrungen oder für genaue Messungen in einer Spule erzeugt (**114**).

Strommessung. Sehr starke Ströme lassen sich durch die Drehung z. B. in CS_2 innerhalb einer Drahtspule (**114** I) nach den vorigen Formeln und Konstanten genähert messen.

108. Die Bewegungsgesetze eines schwingenden Körpers mit elektromagnetischer Dämpfung. (Ballistisches Galvanometer.)

Es soll bedeuten:

K das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers (**29**),

D die Direktionskraft (**55**; Anh. 11a), welche für eine einzelne Magnetnadel $= MH(1+\Theta)$ (Anh. 21), für einen Körper mit Direktionskraft durch einen elastischen Aufhängedraht nach **55** gleich $\frac{1}{2}\pi \cdot [F] \cdot r^4/l$,

p das Dämpfungsmoment, d. h. den Faktor, mit welchem die jeweilige Winkelgeschwindigkeit das der Bewegung widerstehende Drehmoment ergibt,

u_0 die Winkelgeschwindigkeit bei dem Durchgang durch die Ruhelage,

α den Ausschlag, welcher ohne Dämpfung darauf erfolgen würde,

α_1 α_2 α_3 ... die Ausschläge, welche mit Dämpfung erfolgen,

$k = \alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_2 : \alpha_3 = \cdots$ oder auch $k = u_0 : u_1 = u_1 : u_2 = \cdots$ } das Dämpfungsverhältnis,

$\lambda = \lg k$ das briggische logarithmische Dekrement,

$\Lambda = \lg\text{nat}\, k = 2{,}3026\,\lambda$ das natürliche logarithmische Dekrement (welches für schwache Dämpfung $= k-1$ ist); Tab. 29,

τ die Schwingungsdauer, welche ohne Dämpfung gelten würde,

T die Schwingungsdauer mit Dämpfung.

Alsdann gelten folgende Beziehungen.

$$1. \qquad \Lambda = \frac{\pi}{2}\frac{p}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}} = \frac{1}{2}\frac{p}{K}T. \qquad\qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}, \qquad 2.$$

$$T = \pi\frac{K}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}} = \tau\frac{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}{\pi} \quad \text{oder} \quad = \tau\sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}}. \qquad 3.$$

Die Schwingungsdauer wächst also mit der Dämpfung. Für schwache Dämpfung kann man schreiben, da π^2 nahe $=10$ und $\Lambda = k-1$ ist, $T = \tau(1 + \frac{1}{20}(k-1)^2)$. Eine Dämpfung von einigen Procenten beeinflufst also die Schwingungsdauer nicht merklich. Vgl. Tab. 29.

Bedeutet u_1 die Geschwindigkeit bei der ersten Rückkehr in die Gleichgewichtslage, so ist

$$u_0 = k \cdot u_1. \qquad 4.$$

Ferner ist

$$\alpha = \alpha_1 k^{\frac{1}{\pi}\cdot \operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}. \qquad 5.$$

Endlich erhält man aus dem Ausschlage die Anfangsgeschwindigkeit[1])

$$u_0 = \frac{\pi}{\tau} \cdot \alpha = \frac{\pi}{\tau} \cdot \alpha_1 k^{\frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\Lambda}} . \qquad 6.$$

Beweise siehe folg. S.

π/Λ ist zum Aufschlagen des arc tg durch Multiplikation mit 57,296 in Bogengrade umzurechnen. $k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}$ ist bis $k=2$, d. h. bis $\lambda=0{,}3$ oder $\Lambda=0{,}7$ hinreichend genau $=1+1{,}160 \cdot \lambda$, für schwache Dämpfung auch $=\sqrt{k}$. Vgl. hierfür und für $\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}/\pi$ bis $k=3$ auch Tab. 29.

Wenn das Dämpfungsmoment $p \geqq 2\sqrt{KD}$ wird, so geschehen keine Schwingungen mehr, sondern die rückkehrende Nadel nähert sich der Ruhelage aperiodisch; vgl. S. 551.

Über die Abnahme von k bei gröfseren Schwingungen mit der Schwingungsweite und den Einflufs dieses Umstandes auf die Ausschläge s. K. Schering, Wied. Ann. 9, 471. 1880.

Dämpfung, Galvanometerfunktion und Widerstand.

Handelt es sich um ein Galvanometer, also um die Dämpfung einer Magnetnadel durch einen Multiplikator oder um die Dämpfung einer im Magnetfeld schwingenden geschlossenen Spule (S. 364), so besteht zwischen log. Dekrement und Galvanometerkonstante eine nahe Beziehung. Es sei

q das von dem Strome Eins bewirkte Drehmoment, also die sog. „dynamische Galvanometerkonstante“.

Für die Magnetnadel (Magnetismus $=M$) bedeute G die „Multiplikator-Funktion“ d. h. das Drehmoment des Stromes Eins auf eine Nadel vom Magnetismus Eins, welches bei gegebener Gestalt der Windungszahl proportional ist; dann ist

$$q = GM. \qquad 7\text{a}.$$

Für die drehbare Spule ist $q=$ Feldstärke $\times$ Windungsfläche

$$q = Hf. \qquad 7\text{b}.$$

In beiden Fällen gibt nach dem Induktionsgesetz (Anh. 26) $q \cdot u$ die el. Kraft, welche durch die Winkelgeschwindigkeit u entsteht. Nennt man w den Widerstand des Stromkreises in abs. Mafse, so entsteht also der Strom qu/w, und von diesem eben stammt das dämpfende Drehmoment, welches danach die Gröfse $q \cdot qu/w = u \cdot q^2/w$ hat. Hiernach ist also q^2/w das Dämpfungsmoment, welches wir oben p nannten und welches nach Gleichung 1. gleich $2K\Lambda/T$ ist. Also hat man

$$p = q^2/w = 2K\Lambda/T. \qquad 8.$$

p oder q^2/w, welches mit K, Λ und T so einfach zusammenhängt, ist dem Magnetismus der Nadel, welche in dem Multiplikator schwingt, oder der

1) Mehrseitig gemachte Einwendungen gegen die Formeln 6., insbesondere die Ansicht, dafs rechts der Faktor $\sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2}$ fehle, beruhen auf der Auffassung, dafs α und α_1 demselben Λ (vgl. Gl. 11.) anstatt demselben u_0 entsprechen sollten. Es ist aber ohne, bez. mit Dämpfung $u_0 = A \cdot \pi/\tau$, bez. $= A \cdot \pi/T = A \cdot \pi/(\tau\sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2})$

Stärke des Feldes, in welchem die Spule schwingt, quadratisch proportional. Aufserdem hängt es von der Gestalt des Multiplikators ab, aber (bei Kurzschlufs) nicht von dem Querschnitt des Drahtes, mit welchem der Raum bewickelt ist. Denn wenn man diesen Querschnitt in irgend einem Verhältnis kleiner, also die Windungszahl in demselben Verhältnis gröfser nimmt, so ändert sich offenbar q in dem gleichen Verhältnis, w aber mit dem Quadrate desselben. q^2/w bleibt also konstant. $q/\sqrt{w}$ bedeutet die „dynamische Galvanometerkonstante" für eine Wickelung, welche den Widerstand $=1$ ergibt. Der Widerstand der Zuleitungsdrähte einer aufgehangenen Spule ist hierbei nicht berücksichtigt.

Aus K, Λ und T läfst sich q bezw. w nach obigem einzeln bestimmen, wenn w bez. q bekannt ist.

Endlich sei noch, wie in **81** ff.:

C der gewöhnliche „Reduktionsfaktor" des Galvanometers, welcher aus der Ablenkung φ (bez. $\operatorname{tg}\varphi$) die Stromstärke i in abs. Mafse als $i = C\varphi$ gibt; d. h. $\qquad C = D/q$. $\qquad$ 9.

Dies gibt (s. auch **116**) für ein Nadelgalvanometer

$$C = \frac{MH}{q}(1+\Theta) = \frac{H}{G}(1+\Theta) \qquad 10\text{a}.$$

und für ein Spulengalvanometer $\quad C = \dfrac{D}{Hf} \qquad$ 10b.

In Wirklichkeit rührt ein Teil der Dämpfung von dem Luftwiderstande etc. her. Es genügt, in Gl. 8 statt Λ zu setzen $\Lambda - \Lambda'$, wo Λ' das log. Dekrement ist, welches bei geöffnetem Multiplikator stattfindet.

Man setzt hier überall voraus, dafs Nadel bez. Spule kleine Bewegungen machen und nicht in Stellungen kommen, in denen die Multiplikatorfunktion bez. das magnetische Feld sich ändern (vgl. vor. S. und **88**).

Ableitung. Die Differentialgleichung der gedämpft schwingenden Nadel ist $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{p}{K}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{D}{K}x = 0$, wo x den zur Zeit t stattfindenden Ablenkungswinkel bedeutet. Die Integration der Gleichung ergibt, wie man durch Rückwärtsbehandlung leicht verificirt, für den Fall $p < 2\sqrt{KD}$ den periodischen Zustand in der Form

$$x = Ae^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\sin\left(\frac{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}}{K}t\right). \qquad 11.$$

Daraus lassen sich die Sätze Nr. 1 bis 6 ableiten, wie folgt.

Schreibt man Gl. 11. durch Einführung der Schw.-Dauer T in der Form

$$x = Ae^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t} \cdot \sin \pi/T \cdot t, \qquad 12.$$

so sieht man, dafs $T = \pi \dfrac{K}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}}$ oder $= \pi\sqrt{\dfrac{K}{D}}\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}p^2/(KD)}}$. $\qquad$ 3a.

Die Schw.-Dauer ohne Dämpfung ($p = 0$) ist $\tau = \pi\sqrt{K/D}$. $\qquad$ 2a.

Hieraus findet sich leicht die Beziehung $\quad T = \tau\sqrt{1 + \dfrac{1}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{4}\dfrac{p^2}{K^2}T^2}$. $\qquad$ 13.

Die Geschwindigkeit zur Zeit t ergibt sich durch Differenziren

von Gl. 12 $$\frac{dx}{dt} = A e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t} \left(\frac{\pi}{T}\cos\frac{\pi}{T}t - \frac{1}{2}\frac{p}{K}\sin\frac{\pi}{T}t\right). \qquad 14.$$

Sie ist also bei dem ersten Durchgang ($t=0$) $u_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = A\cdot\frac{\pi}{T}$ 15.

und bei der ersten Rückkehr ($t=T$) $u_1 = -\left(\frac{dx}{dt}\right)_T = A\cdot\frac{\pi}{T}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}T}$.

Das Dämpfungsverhältnis ist also $k = u_0 : u_1 = e^{\frac{1}{2}\frac{p}{K}T}$ 16.

und sein nat. Logarithmus $\Lambda = \log\text{nat}\, k = \frac{1}{2}\frac{p}{K}T$. 1.

Es gilt also die Beziehung $\frac{1}{2}\frac{p}{K} = \frac{\Lambda}{T}$,

so dafs man Gl. 12 auch schreiben kann $x = A\cdot e^{-\frac{\Lambda}{T}t}\cdot\sin\frac{\pi}{T}t$; 12a.

ferner die Gl. 13 $T = \tau\frac{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}{\pi}$ 3b.

und endlich Gl. 14 $$\frac{dx}{dt} = A\cdot\frac{1}{T}e^{-\frac{\Lambda}{T}t}\left(\pi\cos\frac{\pi}{T}t - \Lambda\sin\frac{\pi}{T}t\right). \qquad 14a.$$

Der erste Ausschlag $\left(\frac{dx}{dt}=0\right)$ trifft also auf eine Zeit t_1, für welche gilt: $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{\Lambda},\ \text{also}\ t_1 = \frac{T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}\ \text{und}\ \sin\frac{\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}.$$

Hiermit findet sich aus Gl. 12a $\alpha_1 = A\cdot k^{-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}$

und also aus 15 $\alpha_1 = u_0\frac{T}{\pi}k^{-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}$.

Ohne Dämpfung wäre gewesen $\alpha = u_0\frac{\tau}{\pi}$.

Mit Rücksicht auf Gl. 3b folgt hieraus $\alpha = \alpha_1\cdot k^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}$, 5.

also $u_0 = \frac{\pi}{\tau}\alpha_1\cdot k^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}$. 6.

Aperiodischer Zustand ($p > 2\sqrt{KD}$).

Eine vorhandene Ablenkung x_0 von der Gleichgewichtslage fange zur Zeit $t=0$ an zu verschwinden. Dann besteht zur Zeit t, wenn $\sqrt{p^2-4KD} = E$ abgekürzt wird, noch die Ablenkung

$$x = x_0\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\left[\left(1+\frac{p}{E}\right)e^{\frac{1}{2}\frac{E}{K}t} + \left(1-\frac{p}{E}\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{E}{K}t}\right]. \qquad 17.$$

Für den Grenzfall der Aperiodicität ($p = 2\sqrt{KD}$) geht dies über in

$$x = x_0\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\left(1+\frac{1}{2}\frac{p}{K}t\right) = x_0\cdot e^{-\sqrt{\frac{D}{K}}\cdot t}\left(1+\sqrt{\frac{D}{K}}\cdot t\right). \qquad 18.$$

Endlich für ganz langsame Bewegungen, wenn p sehr grofs gegen $2\sqrt{KD}$,

$$x = x_0 \cdot e^{-\frac{D}{p} \cdot t} \quad \text{oder auch} \quad = x_0 \cdot e^{-D\frac{w}{q^2}t} = x_0 \cdot e^{-C\frac{w}{q}t}. \qquad 19.$$

Es ist hiernach, wenn die Empfindlichkeit $1/C = q/D$ immer weiter gesteigert wird, für ein Spulengalvanometer eine immer langsamere Bewegung der Spule unvermeidlich, welche das Instrument schliefslich unbrauchbar macht. Das Nadelgalvanometer läfst dies durch Anwendung einer Nadel von schwachem Magnetismus vermeiden. Vgl. auch **85**.

109. Messung kurz dauernder elektrischer Ströme oder entladener Elektricitätsmengen.

I. Mit dem ballistischen Galvanometer.

Ballistisch nennt man ein Galvanometer, wenn mit ihm kurze hindurchgeleitete Ströme durch erste Ausschläge gemessen werden; es mufs zu diesem Zweck hinreichend langsam schwingen.

Wird durch ein Galvanometer in einer gegen die Schwingungsdauer sehr kurzen Zeit eine Elektricitätsmenge Q entladen, so entsteht eine der Gröfse Q (dem Stromintegral, $\int i\,dt$, Stromstofs, Strommenge, Entladungsmenge) proportionale Anfangsgeschwindigkeit und ein erster Ausschlag, welcher dieser Geschwindigkeit, also auch ebenfalls der El.-Menge Q nahe proportional ist. Wenn C der gewöhnliche Reduktionsfaktor (**81, 89**) und τ die Schwingungsdauer des Galvanometers, so gilt für den ersten Ausschlagswinkel α

$$Q = C\frac{\tau}{\pi} \cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha. \qquad 1.$$

Für einen kleinen Winkel kann man $2 \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha = \alpha$ setzen (**25**).

Beweis. Ist x die Ablenkung zur Zeit t, also $u = dx/dt$ die Winkelgeschwindigkeit, bedeutet ferner D die Direktionskraft, K das Trägheitsmoment, so gilt $du/dt = -D/K \cdot \sin x$. Durch Multiplikation mit $u = dx/dt$ entsteht $u\,du = -D/K \cdot \sin x\,dx$. Die Integration ergibt

$$\tfrac{1}{2}(u_0^2 - u^2) = D/K \cdot (1 - \cos x) = D/K \cdot 2\sin^2\tfrac{1}{2}x,$$

wenn u_0 die Geschwindigkeit für $x = 0$ war. Für den Augenblick des gröfsten Ausschlags ($x = \alpha$) ist $u = 0$, also $\frac{1}{2}u_0^2 = 2D/K \cdot \sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Mit Rücksicht darauf, dafs $D/K = \pi^2/\tau^2$, entsteht hieraus (gerade wie bei dem Pendel)

$$u_0 = 2\pi/\tau \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{und für kleines } \alpha \text{ (108, Formel 6)} \quad u_0 = \pi/\tau \cdot \alpha.$$

Wenn q die dynamische Galvanometerkonstante (**108**) bedeutet, so erteilte die Elektricitätsmenge Q die Winkelgeschwindigkeit $u_0 = Qq/K$. Da nun nach **108** Gl. 9 $q/K = 1/C \cdot D/K = 1/C \cdot \pi^2/\tau^2$, so ist $u_0 = Q/C \cdot \pi^2/\tau^2$. Andrerseits war $u_0 = \pi/\tau \cdot \alpha$. Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert $Q = C\tau/\pi \cdot \alpha$, q. e. d.

Die Beobachtung wird so gut wie immer mit Spiegel und Skale ausgeführt. Ist $\mathfrak{C}$ der für den Skalenabstand geltende

statische Reduktionsfaktor (**83**), so entspricht dem ersten Ausschlage e das Stromintegral

$$Q = \mathfrak{C}\frac{\tau}{\pi}\cdot e. \qquad 2.$$

Der ballistische Reduktionsfaktor $\mathfrak{P}$ wird also aus dem statischen $\mathfrak{C}$ erhalten als

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{C}\frac{\tau}{\pi}.$$

Gröfsere Schwingungen reducirt man nach **25**, 2 auf den Sinus des halben einseitigen Ausschlages (vgl. den Beweis S. 452). Von einem beobachteten Ausschlage $= e$ Sk.-T. zieht man also die Gröfse $\frac{11}{32}e^3/A^2$ ab, wo A den Abstand der Skale vom Spiegel bedeutet.

Gedämpfte Schwingung. In Wirklichkeit tritt noch die Dämpfung hinzu, die indessen, solange sie konstant ist, bei nur vergleichenden Bestimmungen aufser Betracht gelassen werden kann, weil die Proportionalität des Ausschlages mit dem Stromintegral bestehen bleibt. Bei Beobachtungen in einem dauernd geschlossenen Stromkreis beachte man, dafs der von den Multiplikatorwindungen herrührende Teil der Dämpfung von dem eingeschalteten Widerstande abhängt! Hier und bei einer absoluten Messung von Q kommt also noch das Dämpfungsverhältnis k (**27**; vgl. auch **108** Gl. 5) in Betracht. Es sei das natürliche log. Dekrement $\varLambda = \log\text{nat}\, k = 2{,}3026 \cdot \log\text{brigg}\, k$. Dann ist (Tab. 29)

$$Q = \mathfrak{C}\frac{\tau}{\pi}\cdot k^{1/\pi\cdot\text{arc tg}\,\pi/\varLambda}\cdot e \quad \text{oder} \quad = \mathfrak{C}\frac{T}{\sqrt{\pi^2+\varLambda^2}}k^{1/\pi\cdot\text{arc tg}\,\pi/\varLambda}\cdot e, \qquad 3.$$

wenn τ die Schwingungsdauer der ungedämpften, T diejenige der gedämpften Schwingung ist.

Folgt aus **108** Gl. 6. Siehe ebenda die Vereinfachungen der Rechnung.

Die Elektricitätsmenge Q wird in der Einheit erhalten, welche dem Reduktionsfaktor C oder $\mathfrak{C}$ zu Grunde liegt, z. B. in [C.G.S] oder auch in A sec. oder Coulomb $= 0{,}1$ [C.G.S]. Über Ladungsmengen von Leidener Flaschen s. **131** III.

Ermittelung der Schwingungsdauer. Vgl. **28**. Da Ströme, welche durch die Schwingung inducirt werden, dämpfen, so ist die Leitung zu unterbrechen. Trotzdem besteht oft eine beträchtliche Dämpfung. Läfst der Dämpfer sich nicht ent-

fernen, ist also eine gröfsere Reihe von Schwingungen nicht zu erhalten, so beobachtet man mehrere Reihen unter jeweilig neuer Anregung der Bewegung, wozu am bequemsten ein kurzer Schlufs eines Stromes gebraucht wird. Wenn die Dämpfung sehr stark ist, nimmt man diesen Anfangsstofs ebenfalls sehr stark und kann dann den ersten Rückkehrdurchgang durch die Ruhelage und einige folgende beobachten. Der Ungeübte thut gut, die Ruhelage durch einen dicken schwarzen Faden oder dgl. kräftig zu markiren.

Ermittelung des Dämpfungsverhältnisses. Man regt durch einen kurzen Strom Schwingungen an und beobachtet und reducirt die Umkehrpunkte nach **27**. Ist die Dämpfung so stark, dafs nur wenige Umkehrpunkte erhalten werden, so wird das Verfahren öfters wiederholt und aus den Resultaten das Mittel gebildet. Ausschläge unter 20 Sk.-T. werden auch dann womöglich nicht benutzt.

Das Galvanometer mufs hierbei ev. in demselben Zustande geschlossen sein, in welchem es zu den Messungen der Elektricitätsmengen benutzt wird. Andernfalls kann man nach dem Satze, dafs der von dem Multiplikator herrührende Teil des log. Dekrements dem Gesamtwiderstande seines Schliefsungskreises umgekehrt proportional ist, falls der übrige Teil der Dämpfung nicht zu grofs ist, aus dem bei dem Gesamtwiderstande w_1 beobachteten log. Dekr. Λ_1 das bei einem anderen (w_2) geltende Λ_2 berechnen. Wenn nämlich bei unterbrochener Leitung Λ' gilt, so ist $\Lambda_2 = \Lambda' + (\Lambda_1 - \Lambda') \cdot w_1/w_2$. Vgl. **94**.

Vgl. auch **110** Multiplikation und Zurückwerfung.

II. Messung mit Dauerablenkung.

Kann man die Elektricitätsmenge Q längere Zeit rasch wiederholt (Nmal in 1 sec) durch das Galvanometer schicken, so entsteht eine dauernde Ablenkung α. Dann ist $Q = C \cdot \alpha/N$ oder $= \mathfrak{C} \cdot e/N$. Hier ist ev. das Korrektionsglied mit $\mathfrak{C}'$ zu berücksichtigen (**83**). Zum Zählen der Entladungen wird häufig das phonische Rad (**57**, 7) gebraucht. S. z. B. Himstedt, Wied. Ann. 22, 279. 1884.

III. Anwendungen.

Eine el. Kraft E wirke während der Zeit t; das Produkt Et heifst Zeitintegral oder kurz Integral der el. Kraft. Ist E nicht konstant, z. B. bei einer Induktionsmaschine, einem Erdinduktor etc., so hat man anstatt $E \cdot t$ die Summe der Produkte $E \cdot dt$ über alle Zeitelemente dt, also $\int E dt$ zu setzen.

Wenn w der Widerstand des Kreises, so ist die Stromstärke in jedem Augenblick $i = E/w$ und die in der Zeit t hindurchgegangene Elektricitätsmenge

$$Q = \frac{Et}{w} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{1}{w}\int_0^t E dt. \qquad 4.$$

Es ist aber nicht zu vergessen, dafs im Anfang auch der Strom von einer konstanten el. Kraft inkonstant ist, wenn der Stromkreis Selbstinduktion enthält. Die Fehlerquelle läfst sich dadurch vermindern, dafs man induktionsfreien Widerstandsballast einschaltet und dadurch die Verzögerungskonstante S/w verkleinert. Vgl. Anh. 28.

Durch Messung eines Stromstofses Q sind folgende Aufgaben lösbar:

1) Bestimmung eines Widerstandes. Entweder in absolutem Mafse, wenn Et oder $\int E dt$ gegeben ist (**116** II, III, V), oder vergleichsweise durch Einschaltung der Widerstände in denselben Induktionskreis (**112**).

2) Bestimmung eines Integrales elektromotorischer Kraft; wenn der Widerstand bekannt ist, in absolutem Mafse (**114** II; **115** II; **117**, 1 u. 2; **118** I) oder vergleichend (**111**). Hierher gehört die

Bestimmung magnetischer Momente. Zu vergleichende Stäbe werden einzeln in die Mitte einer längeren engen Spule plötzlich hineingeschoben oder herausgezogen. Die magn. Momente sind den Stromintegralen d. h. den Ausschlägen proportional. Hat die lange Spule eine gleichmäfsige Wickelung von n Windungen/cm, ist w, der Widerstand des Kreises, ebenso wie Q in [C.G.S] gemessen (1 $\Theta = 10^9$ cm/sec), so erhält man das magnetische Moment eines Stabes (vgl. Anh. 26)

$$M = Q \cdot w/(4\pi n)\,[\text{C.G.S}]. \qquad 5.$$

Man kann die Ausschläge leicht multipliciren (**110** I).

3) Messung kurzer Zeiten (Pouillet), z. B. Schufs-, Fall- oder Stofszeiten. Der Strom einer konstanten el. Kraft E wird zu Anfang der Zeit (z. B. wann der Hahn des Gewehrs aufschlägt oder die stofsenden Kugeln sich berühren) geschlossen,

zu Ende derselben (z. B. wann das Geschofs die Scheibe trifft oder einen gespannten Draht durchschneidet etc.) unterbrochen. Ist E und der Widerstand w des Stromkreises in [C.G.S] bekannt, so bekommt man die Zeit

$$t = Q \cdot w / E \qquad 6.$$

in sec (vgl. aber die Bemerkung vor. S.).

Pendelunterbrecher (Helmholtz). Ein schweres Pendel bewegt bei der ursprünglichen Form des Apparats in kurzen Zeitintervallen zwei Kontakthebel. In der modificirten neueren Form (s. unten Holborn) wird der eine Stromkontakt von einem mit dem Pendel verbundenen Arm gebildet, der in Quecksilber taucht. Die Kontakte sind mikrometrisch verstellbar. Man kann so z. B. einen Strom eine beliebige kurze Zeit hindurch schliefsen.

Das Zeitintervall läfst sich erstens aus dem Abstande der Kontakte und der Geschwindigkeit des Pendels ableiten, die man aus der Fallhöhe des Pendels berechnet (**29a**, 3).

Zweitens kann man die Skalenteile am Schlitten des Kontakts nach 3. empirisch auswerten, mufs dabei aber die Zeit des allmählichen Stromanstieges (vor. S.) berücksichtigen. Entweder drückt man diese durch Einschalten eines grofsen induktionsfreien Widerstandes unter Verstärkung der Batterie genügend herab, oder man eliminirt sie auf folgendem Wege durch zwei Beobachtungen, unter Anwendung eines Nebenschlusses am Galvanometer. — Helmholtz, Ges. Abhandl. I, 429.

w_1 bedeute die Galvanometerleitung, w_2 ihren Nebenschlufs. Durch einen Kommutator bewirkt man, dafs der Kontakt einmal in der Leitung W der Batterie e, das andere Mal in w_1 geschlossen und geöffnet wird. Die Zeitdauer t des Kontaktes ist zu bestimmen.

Es ist (**80**, S. 342 u. Anh. 28), wenn S der Selbst-Induktionskoefficient des Galvanometers,

$$J = i_1 + i_2 \qquad e - JW = i_2 w_2 = i_1 w_1 + S\,\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t,$$

oder

$$[W(w_1 + w_2) + w_1 w_2]\, i_1 = e w_2 - (W + w_2) S\,\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t.$$

Zur Zeit t nach dem Stromschlufs werde

1) i_1 selbst unterbrochen. Dann folgt aus obigem, wenn i_t den Wert von i_1 im Augenblick des Unterbrechens bedeutet,

$$Q = \int_0^t i_1\,\mathrm{d}t = \frac{e w_2 t - (W + w_2) S i_t}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2}. \qquad 7.$$

2) Die Unterbrechung geschehe im Batteriekreise. Dann ist die durch das Galvanometer entladene El.-Menge Q' gröfser als Q um

$$Q' - Q = S i_t / (w_1 + w_2). \qquad 8.$$

Q und Q' werden nach Gl. 3 aus den Galvanometerausschlägen abgeleitet. Aus Gl. 8 kann man dann $S i_t$ berechnen. Gl. 7 u. 8 zusammen liefern die Zeit

$$t = \frac{1}{e}\,\frac{Q'(W + w_2)(w_1 + w_2) - Q w_2^2}{w_2}. \qquad 9.$$

Helmholtz, Berl. Mon. Ber. 1871, 295; Schiller, Pogg. Ann. 152, 535. 1874 Anwendung auf oscillirend entstehende Ströme; Holborn, Berl. Sitz. Ber. 1896, 173 Entstehungszeit von Magnetismus. — Eine Form des Pendelunterbrechers auch bei Eddmann, Ann. d. Ph. 3, 274. 1900.

110. Die Multiplikations- und die Zurückwerfungs-Methode (Gaufs und Weber).

Zur Messung kurz dauernder Wirkungen auf ein ballistisches Galvanometer, z. B. besonders zur Messung inducirter Ströme, ist es oft zweckmäfsig, die Impulse regelmäfsig zu wiederholen. Hierdurch entsteht bei Dämpfung schliefslich eine sich konstant erhaltende Bewegung (so, wie die Amplitude eines Uhrpendels, welches bei jeder Schwingung einen Impuls durch das treibende Gewicht erhält, aber durch Reibung und Luftwiderstand gedämpft wird, nach einer Reihe von Schwingungen konstant wird). Die Beobachtung dieses Endzustandes kann man beliebig oft wiederholen und einen genauen Mittelwert nehmen. Ein weiterer Vorzug besteht darin, dafs beim Beginn der Beobachtungen nicht notwendig Ruhe bestehen mufs.

Wir nehmen an, dafs die Schwingungen so klein bleiben, bez. dafs der Dämpfer so breit oder bei einem Spulengalvanometer das magnetische Feld so homogen sei, dafs ein konstantes Dämpfungsverhältnis besteht.

Gröfsere Ausschläge reducirt man nach S. 99 auf den Sinus des halben Winkels.

I. Multiplikationsmethode.

Das Verfahren ist dem Beispiel des Uhrpendels analog. Man erteilt den Impuls; der Körper schwingt hinaus und kehrt zurück. Im Augenblicke, wo er seine Gleichgewichtslage rückwärts durchschreitet, erteilt man den zweiten Stofs in entgegengesetzter Richtung wie den ersten, so dafs die Bewegung vermehrt wird. Bei dem folgenden Durchgang durch die Gleichgewichtslage erfolge wieder ein Stofs im ersten Sinne, u. s. f. Die Schwingungen werden allmählich weiter, erreichen aber, je stärker die Dämpfung, desto früher, endlich einen konstanten Grenzwert.

Kleine Schwingungen vorausgesetzt, ist der Grenzbogen proportional dem Geschwindigkeitszuwachs durch den einzelnen Stofs, also auch der jedesmal durch das Galvanometer geflossenen Elektricitätsmenge.

Der erste Ausschlag durch einen einmaligen Stofs wird aus dem Grenzbogen A erhalten $=\frac{1}{2}A(k-1)/k$, wenn k das Dämpfungsverhältnis bedeutet (27). Der erste Ausschlag α, welcher ohne Dämpfung entstehen würde, wird gefunden für eine

mäfsige Dämpfung $\qquad \alpha = \frac{1}{2}A\cdot(k-1)/\sqrt{k}$

und allgemein $\qquad \alpha = \frac{1}{2}A\cdot\frac{k-1}{k}\cdot k^{1/\pi\cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\varLambda}$,

wo $\varLambda = \log\mathrm{nat}\, k = 2{,}3026 \log\mathrm{brigg}\, k$ ist (Tab. 29).

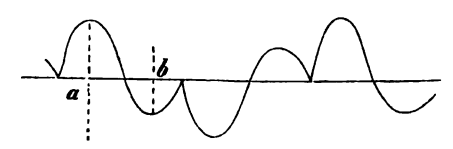
Aus α wird die dem einzelnen Stromstofs entsprechende Strommenge Q nach **109** Gl. 1 oder 3 berechnet.

Beweis. Beim Hinausschwingen sei u_0 die Anfangsgeschwindigkeit; dann ist nach **108** Gl. 6 offenbar $u_0 = \pi/\tau \cdot \frac{1}{2} A \cdot k^{1/\pi \cdot \mathrm{arc\,tg}\,\pi/\varDelta}$. Bei der Rückkehr in die Ruhelage ist die Geschwindigkeit $u_1 = u_0/k$. Die Differenz $u_0 - u_1 = u_0(k-1)/k = u$ ist der durch den Stofs geleistete Ersatz. Diesem allein würde ohne Dämpfung entsprechen der Ausschlag $\alpha = \tau/\pi \cdot u_0(k-1)/k$. Obiges u_0 eingesetzt, gibt den Ausdruck.

II. Zurückwerfungsmethode.

Das Verfahren liefert zugleich das Dämpfungsverhältnis.

Man erteilt einen Stofs, läfst hinaus-, zurück-, nach der anderen Seite hinaus-, und wieder zurückschwingen. In dem Augenblick, in welchem alsdann die Gleichgewichtslage passirt wird, erteilt man den zweiten Stofs in entgegengesetzter Richtung wie den ersten. Dadurch tritt, weil durch die Dämpfung Geschwindigkeit eingebüfst worden ist, Zurückwerfung ein. Nun läfst man abermals zweimal umkehren und wirft bei der nächsten Erreichung der Gleichgewichtslage wieder zurück, u. s. f. Schliefslich nehmen die Ausschläge der Nadel konstante Werte an. Dann herrschen also Schwingungen von der in der Figur graphisch dargestellten Form, wo die Zeiten als Abscissen, die Skalenteile, von der Ruhelage der Nadel an gerechnet, als Ordinaten gelten.



Die Herbeiführung dieses gleichförmigen Zustandes kann dadurch beschleunigt werden, dafs man den ersten Stofs geeignet abschwächt.

Die Zurückwerfungsmethode liefert also, nachdem man den Mittelwert je aus den entsprechenden Beobachtungen genommen hat, vier Umkehrpunkte auf der Skale. Die Differenz a der beiden äufseren soll der grofse, die Differenz b der inneren Umkehrpunkte soll der kleine Schwingungsbogen heifsen.

Das Dämpfungsverhältnis ist offenbar $k = a/b$.

Der Ausschlag α, welchen ein einzelner Stofs ohne Dämpfung hervorbringen würde, ist

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \cdot k^{-1/\pi \cdot \mathrm{arc\,tg}\,\varDelta/\pi} \quad \text{oder auch} \quad = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\,\frac{k^{1/\pi \cdot \mathrm{arc\,tg}\,\pi/\varDelta}}{\sqrt{k}}.$$

Der Faktor von $\frac{1}{2}(a^2+b^2)/\sqrt{ab}$ kann mit höchstens 1/1000 Fehler bis zu $k = 1{,}1$ vernachlässigt und bis zu $k = 2$ gleich $k^{-\varDelta/\pi^2}$ gesetzt werden (vgl. Tab. 29).

Aus α erhält man durch Multiplikation mit π/τ oder

$\sqrt{\pi^2+\varLambda^2}/T$ (wo τ ohne, T mit Dämpfung gilt) die durch den einzelnen Stoſs mitgeteilte Winkelgeschwindigkeit.

Unter Umständen kann man die „Zurückwerfungsmethode" zweckmäſsig abändern, indem man den Stoſs je nach der dritten oder vierten Schwingung erteilt.

Beweis ähnlich wie oben.

W. Weber, Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. I, 341. 1846; oder Weber's Werke Bd. III, 438 u. 441. 1893. Über den Einfluſs der Dauer und Rechtzeitigkeit der Stromstöſse siehe Dorn, Wied. Ann. 17, 654. 1882.

111. Erdinduktor (W. Weber).

I. Hervorbringung bekannter Integrale von el. Kraft.

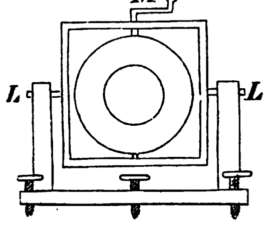
Eine Spule von der Windungsfläche f (**106**) werde im magnetischen Felde H gedreht; die Fläche bilde vor und nach der Drehung die Winkel φ_1 und φ_2 mit der Richtung von H. Dann ist $\int E\,dt = H\cdot f(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$ (Anh. 26). φ ist von 0 bis 360° durchzuzählen. Man kann so beliebige Integrale von el. Kraft hervorbringen. Bei vertikaler Windungsfläche ist H die Horizontalintensität und φ das Azimut gegen den magnetischen Meridian.

Gewöhnlich dreht man um 180° aus der einen in die andere Ostwestlage der Spule, dann ist also

$$\int E\,dt = 2Hf.$$

II. Bestimmung der Inklination.

Die Bestimmung beruht auf der Vergleichung der durch die horizontale und vertikale Komponente des Erdmagnetismus in der Spule inducirten Stromstöſse, wenn man die Windungen aus der einen zur Komponente senkrechten Lage rasch in die andere umlegt. Das Verhältnis der Galvanometerausschläge beider Komponenten gibt die Tangente des Inklinationswinkels.



Die Galvanometernadel ist durch den Multiplikator, bez. noch durch einen Kupferrahmen gedämpft. Die Dämpfer sollen hinreichend breit sein, daſs das Dämpfungsverhältnis bei beiden Induktionen gleich groſs ist. Andernfalls entstehen bei der Multiplikationsmethode Korrektionen, bei der Zurückwerfung weniger.

V e r t i k a l e K o m p o n e n t e. Man legt die Axe M horizontal und orientirt sie mit Hilfe einer Magnetnadel in den magnetischen Meridian. Mittels einer Wasserwage wird die Axe LL horizontal gemacht.

Nun wird mit der hinteren Fufsschraube die Drehaxe M der Spule genau horizontal gelegt, d. h. so, dafs die Luftblase der Wasserwage bei dem Umsetzen auf den beiden gleich dicken Zapfen von M dieselben Teilstriche einnimmt. Jetzt wird ein Satz von Induktions-Beobachtungen ausgeführt, wobei die Spule jedesmal rasch von dem einen zu dem anderen Anschlag um 180° gedreht wird.

Horizontale Komponente. Man stellt die Spule aufrecht (Fig.), lehnt sie an einen der Anschläge und setzt auf die Axe M eine Libelle nordsüdlich auf. Die hintere Fufsschraube wird so gedreht, dafs die Luftblase in den beiden Anschlagstellungen der Spule dieselben Teilstriche einnimmt. Nun wird wie vorher ein Satz Induktions-Beobachtungen ausgeführt, möglichst unter Innehaltung der Drehgeschwindigkeit.

Induktionsmethoden. Beide Induktionssätze werden in gleicher Weise ausgeführt: mit Multiplikation, oder besser mit Zurückwerfung (**110 II**). Die erstere setzt man entweder bis zu einem konstanten Grenzbogen fort; oder, wobei man aber mit ruhendem Galvanometer beginnen mufs, man gibt bei beiden Induktionen dieselbe Anzahl von Stöfsen und addirt beide Male eine gleiche Anzahl von Bögen gleicher Ordnungszahl. Diese Summe, oder auch der Grenzbogen, oder endlich bei der Zurückwerfung der Ausdruck $(a^2+b^2)/\sqrt{ab}$, werde mit S bezeichnet, in den beiden Axenstellungen durch den Index v und h unterschieden, so ist die Inklination J gegeben durch

$$\operatorname{tg} J = S_v/S_h.$$

Prüfungen. Die Windungsfläche soll in den Anschlagstellungen senkrecht auf der zu bestimmenden erdmagnetischen Komponente stehen. Dafs die Stellungen um 180 differiren, wird mit einem versilberten Planglase auf der Axe M erkannt. Im Übrigen wird die Prüfung des Rahmens mit einer Wasserwage und einer Bussole meistens ausreichen. Wenn nicht, so beschränkt man mit dem Ringsektor (Fig.) den Spielraum der Drehung auf etwa 30°. Induktionsbeobachtungen aus beiden Stellungen geben dann, wenn die Anschläge unrichtig stehen, einen ungleichen Nadelausschlag.

Ein Fehler von 1° in den Stellungen kommt kaum in Betracht. Die Axe MM dagegen ist sorgfältig zu orientiren.

Man vermeidet Fehlerquellen leichter, wenn man nicht mit vertikaler und horizontaler Drehaxe arbeitet, sondern wenn

man aus einigen Beobachtungen mit einer der Inklination nahe gelegenen Axenrichtung die genaue Inklinationsrichtung der Axe bestimmt, in welcher keine Induktion stattfinden würde (Schering). Die Axen-Neigung wird mit aufgesetztem Spiegel durch den Theodolit oder bei kleinen Instrumenten mit Hilfe eines Vertikalkreises ermittelt, der am einen Ende der Axe LL befestigt ist.

Vgl. W. Weber, Werke, Bd. II, 277. 1892; Schering, Gött. Nachr. 1882, 345.

Über eine Nullmethode, die die Axenneigung in die Richtung der Inklination mittels des Telephons aus dessen Schweigen bei rascher Rotation des Induktors beurteilt vgl. G. Meyer, Wied. Ann. 64, 742. 1898.

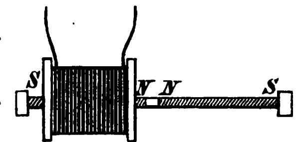
Ein Differential-Erdinduktor, dessen zwei gleiche Rollen mit vertikaler und horizontaler Drehaxe synchron rasch rotiren und das Verhältnis der el. Kräfte E_h und E_v geben, welches auf Widerstandsmessungen zurückgeführt wird, bei Leonh. Weber, Berl. Sitz.-Ber. 1885, S. 1105.

112. Magnet-Induktor (Gaufs. Weber).

Integrale elektromotorischer Kraft von beliebigem Betrage kann man durch die gegenseitige Verschiebung eines Magnets und einer Spule erhalten. Wechselt man zwischen zwei bestimmten Stellungen, so entstehen je nach der Richtung entgegengesetzte Integralwerte von gleicher Gröfse.

Absoluter Integralwert. Das Einschieben eines Magnets vom Magnetismus M (76) aus gröfserer Entfernung in die Mitte einer längeren, engen Spule, welche n Windungen auf jeder Längeneinheit hat, liefert den Wert $\int E\,dt = 4\pi n \cdot M$ (Anh. 26).

Doppelmagnet-Induktor. Die Anordnung der Figur ist als Etalon konstanter Induktionsstöfse besonders geeignet. Der Doppelmagnet wird ganz durch die Spule oder die Spule über den Magnet geschoben. Die Endstellungen sind mittels der verstellbaren Anschläge oder durch Filzstücke u. dgl. so regulirt, dafs



in ihrer Nähe keine Induktion stattfindet. Selbstverständlich darf die Verschiebung das Galvanometer nicht durch Fernwirkung beeinflussen. Bei der Berechnung des el. Kraftintegrals aus den Ausschlägen sind, wenn man nicht wärmeunempfindliche Leiter anwendet, Temperaturänderungen zu berücksichtigen.

Widerstandsbestimmung. Die Methode hat nur historisches Interesse. w_0 sei der Widerstand Induktor + Galvanometer; zugeschaltet

werde ein Widerstand w; die Nadelausschläge seien bezüglich α_0 und α. Dann kann man aus $w/w_0 = (\alpha_0 - \alpha)/\alpha$ entweder w_0 durch w oder w durch w_0 ausdrücken. Wenn endlich R statt w zugeschaltet den Ausschlag α_1 gibt, so ist $w = R \cdot \alpha_1/(\alpha_0 - \alpha_1) \cdot (\alpha_0 - \alpha)/\alpha$. Über die Rücksichtnahme auf die durch die Widerstände geänderte Dämpfung s. **109** I, **108** Gl. 5 oder **110** II.

Auch für Nullmethoden (**92** u. **93**) sind Induktionsstöfse brauchbar, wenn die Widerstände nicht stärkere Selbstinduktion haben.

113. Magnetischer Induktionskoefficient eines Stabes in schwachem Felde.

Die temporäre Änderung des Magnetismus eines Stabes von der Gestalt gewöhnlicher Magnete in einem magnetischen Felde von der Ordnung des horizontalen Erdmagnetismus bis zu Feldstärken von vielleicht 4 [C. G. S] ist nahe der Feldstärke proportional. Verstärkungs- und Schwächungs-Koefficienten permanenter Magnete sind nahe gleich. Bei gewöhnlichen Magneten beträgt die Änderung für die Feldstärke 1 [C. G. S] etwa 1,5 bis 2 [C. G. S] auf 1 ccm Stahl, oder 0,2 bis 0,3 auf 1 gr. Die Zahl hängt von Gestalt, Härte, chemischer Beschaffenheit ab und ist für unmagnetisches Material etwas gröfser als für magnetisirtes.

Ein nordsüdlich hängender Magnet hat also einen, um einige Hundertel [C. G. S] auf das Gramm Stahl gröfseren Magnetismus als in der Ost-Westlage. Der Überschufs im Verhältnis zum eigenen Magnetismus des Stabes heifst Induktionskoefficient durch die Horizontalkomponente (Lamont).

Messung mit dem Erdmagnetismus (Weber). Eine um 180° drehbare enge Spule, welche länger sein soll als der Magnetstab, ist durch ein Galvanometer geschlossen. Man dreht aus der einen Meridianlage in die andere. Der Ausschlag betrage: α_0, wenn die Spule allein gedreht wird; α, wenn sie mit dem in der Spulenaxe befestigten Stabe gedreht wird; α_1, wenn ein Stäbchen vom bekannten Magnetismus M_1 (**76**) aus einiger Entfernung in die leere Spule bis zur Mitte rasch eingeschoben oder von hier herausgezogen wird.

Der durch die nordsüdliche Lage in dem ersteren Stabe inducirte Magnetismus ist dann $m = \frac{1}{2} M_1 (\alpha - \alpha_0)/\alpha_1$; der durch das magnetische Feld Eins inducirte Magnetismus ist $= m/H$, wenn H den Erdmagnetismus bedeutet (**73**; Tab. 38); endlich der relative erdmagnetische Induktionskoefficient $\varDelta$, wenn M den ganzen Magnetismus bedeutet, $\varDelta = m/M$.

Man wird für diese Beobachtungen meistens die Multiplikation gebrauchen (**110**). Bei schwächerer Dämpfung kann man Zeit sparen, wenn man nicht bis zu konstantem Grenzausschlage inducirt, sondern in allen Fällen für α den gleichvielten Schwingungsbogen oder besser die Summe einer gleichen Anzahl Bogen von denselben Ordnungsnummern setzt.

Untersuchung mit einem Strom. Anstatt Spule und Magnet gegen den Erdmagnetismus umzulegen, kann man dieselben ruhen lassen, aber eine zweite Spule darüber wickeln oder schieben, in welcher ein gemessener Strom i geschlossen oder geöffnet oder rasch kommutirt werden kann. Die innere Spule erfährt dann eine el. Kraft durch die äufsere Spule und eventuell durch den Magnet. Die Beobachtungen entsprechen genau den obigen. Das magnetische Feld in der Stromspule ist $= 4\pi n i$, wenn n die Windungszahl auf ihrer Längeneinheit vorstellt.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 22, 417. 1884; Sack, ib. 29, 53. 1886.

114. Bestimmung eines starken magnetischen Feldes.

Erzeugung starker Felder.

In einer Kupferspule kann man ohne erhebliche Kühlung bis zu einer Feldstärke von etwa 800 Gaufs oder [C.G.S] kommen, mit starker Kühlung bis etwa 1500.

Zwischen den Polen eines Elektromagnets mit kegelförmig zugestutzten Polschuhen kann die Feldstärke bis zu 40000 betragen. Die höchste Stärke liefert ein Kegel vom halben Winkel 55°, ein möglichst gleichmäfsiges Feld ein solcher von 40°. — Wegen der Selbstinduktion verstreicht bis zur Erreichung des höchsten Wertes nach dem Stromschlufs eine merkliche, unter Umständen Minuten erreichende Zeit. Umgekehrt ist der Extrastrom beim Unterbrechen im Stande, die Isolation zu gefährden, weswegen starke Ströme nicht zu plötzlich unterbrochen oder kommutirt werden sollen (Kohleausschalter). (Stefan, Wied. Ann. 38, 440. 1889; Ewing u. Low, Phil. Trans. 180, 221. 1889; du Bois'scher Ringelektromagnet, Wied. Ann. 51, 537. 1894; do. Halbring-El.-magnet, Ann. d. Phys. 1, 199, 1900.)

I. Bestimmung in einer Spule durch Rechnung.

In einer im Verhältnis zu ihrer Länge engen gleichmäfsig bewickelten Spule von n Windungen auf jedem cm der Länge bewirkt der Strom i [C.G.S] (**81. 87. 88. 89**) das magnetische Feld $4\pi n i$ Gaufs.

Vorausgesetzt wird hierbei eine so grofse Entfernung a vom Ende, dafs r^2/a^2, wenn r der Spulenhalbmesser, gegen 1 verschwindet. Sonst ist das Feld in der Axe um den Bruchteil $\frac{1}{2}(\sqrt{r^2+a^2}-a)/\sqrt{r^2+a^2}$ kleiner und beträgt also in der Endfläche $2\pi n i$, da für $a=0$ jener Bruchteil $=\frac{1}{2}$ wird.

In einem Punkt der Axe einer Spule von der Länge l, welcher um a von der einen Endfläche absteht, ist die Feldstärke

$$2\pi n i(a\cdot(r^2+a^2)^{-1/2}+(l-a)\cdot[r^2+(l-a)^2]^{-1/2}),$$

also mitten $4\pi n i\cdot l/\sqrt{l^2+4r^2}$ und am Ende $2\pi n i\cdot l/\sqrt{l^2+r^2}$.

II. Durch Induktion (Verdet).

Ein kleiner ebener Leiter (Kreisdraht) von der Windungsfläche f wird, mit seiner Ebene senkrecht zu den Kraftlinien, aus gröfserer Entfernung plötzlich in das Feld hineingestofsen oder aus demselben herausgezogen. Er ist mit einem Spiegel-Galvanometer von nicht zu kleiner Schwingungsdauer verbunden.

Ist H die Stärke des Feldes, so wird dadurch eine el. Kraft von dem Integralwerte $f\cdot H$ inducirt. (Herumdrehen um 180° statt herausziehen würde $2f\cdot H$ geben.)

Das Galvanometer gebe den in Skalenteilen gemessenen ersten Ausschlag e. Ist bei Multiplikation (**110** I) der Grenzbogen E gefunden, so ist, wenn k das Dämpfungsverhältnis, $e=\frac{1}{2}E(k-1)/k$. Dann hat man

$$H=P\cdot e/f.$$

Bestimmung der Versuchskonstante P.

1. Mit dem Erdinduktor (**111**). In derselben Leitung befinde sich ein Erdinduktor von der Fläche f_0 konstant eingeschaltet. Umdrehung derselben um 180° erzeuge den Ausschlag e_0; H_0 sei die erdmagnetische Intensität senkrecht zu der Windungsebene des Induktors (**73**). Dann ist (Quincke, Wied. Ann. 24, 349. 1885)

$$P=2H_0 f_0/e_0.$$

2. Mit dem Magnetinduktor. Eine gestreckte Drahtspule mit der Windungszahl n auf jeder Längeneinheit ihrer Axe sei mit dem kleinen Induktor und dem Galvanometer konstant eingeschaltet. Ein kurzer Magnet von dem Moment M (**76**) werde rasch in die Mitte der Spule eingeschoben oder von dort herausgezogen. Die Nadel mache den ersten Ausschlag e'. Dann ist (**109** III 5 Anh. 26)

$$P=4\pi n M/e'.$$

3. Aus dem Reduktionsfaktor des Galvanometers. Der gewöhnliche Reduktionsfaktor auf [C.G.S] sei $=C$ (**81** II; **89**) oder der Reduktionsfaktor für 1 Skalenteil $\mathfrak{C}=C/(2A)$, wenn A den Skalenabstand bedeutet (**83**). Es sei ferner k das Dämpfungsverhältnis, $\Lambda = \operatorname{lognat} k$ (**27**), und endlich τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel. w bedeute den Widerstand Galvanometer + kleiner Induktor in absolutem Mafse, d. h. den in Ohm ausgedrückten Widerstand multiplicirt mit 10^9 (Anh. 29). Dann ist

$$P=\mathfrak{C}\cdot w\tau/\pi\cdot k^{1/\pi\cdot \operatorname{arctg}\pi/\Lambda}.$$

Über die Berechnung des Exponentialfaktors s. Tab. 29 und die Bemerkung zu **108** Gl. 6.

Beweise. Das el. Kraft-Integral ist bei der Messung Hf (Anh. 26), bei der ersten P-Bestimmung $2H_0f_0$ (**111** I), bei der zweiten $4\pi nM$ (Anh. 26). Da der Widerstand konstant, so folgt sofort

$$P=Hf/e=2H_0f_0/e_0=4\pi nM/e'.$$

Der Ausdruck unter 3 ergibt sich daraus, dafs einerseits die Elektricitätsmenge des Stofses $Q=Hf/w$, andererseits nach **109** Gl. 3.

$$Q=\mathfrak{C}\tau/\pi\cdot e\cdot k^{1/\pi\cdot \operatorname{arctg}\pi/\Lambda}.$$

III. Mit einem kleinen Bifilargalvanometer.

Auf horizontale Felder beschränkt, s. **105** II.

IV. Aus der Dämpfung einer schwingenden Spule.

Eine kleine Spule vom Trägheitsmoment K cm²·gr und der Windungsfläche f cm², die Windungsebene parallel der Feldrichtung, mit einem Gesamtwiderstande w Ohm $=10^9 w$ cm/sec, habe das Dämpfungsverhältnis k und zugleich die Schwingungsdauer T. Dann ist die Feldstärke

$$H=\sqrt{2\cdot 10^9 K}/f\cdot\sqrt{w\Lambda/T}\ \text{[C.G.S]}.$$

[Vgl. **108** Gl. 7b u. 8.]

V. Aus der Drehung der Polarisationsebene nach 107.

Man benutzt z. B. Platten aus schwerem Flintglase in durchgehendem oder zwischen den versilberten Endflächen reflektirtem Licht. Schwach keilförmige Gestalt gestattet, störende Reflexe abzublenden. Die Platte wird in dem bekannten magnetischen Felde einer Spule oder durch Vergleichung mit einer Schwefelkohlenstoffschicht geaicht.

Vgl. Quincke, Wied. Ann. 24, 606. 1885; H. du Bois, Wied. Ann. 51, 549. 1894; magnet. Kreise S. 328, Berl. 1894.

VI. Aus der Steighöhe magnetischer Flüssigkeiten (Quincke).

In dem magnetischen Felde befinde sich die Oberfläche einer Lösung eines Eisen-, Mangan- oder Nickelsalzes in einem Steigrohre, welches mit einem aufserhalb des Feldes liegenden Rohre kommunicirt. Durch das magnetische Feld werde die Höhendifferenz h zwischen den beiden Niveaus bewirkt. Dann ist

$$H = C \cdot \sqrt{h}.$$

C wird für die betr. Flüssigkeit in einem bekannten Felde bestimmt. Kennt man den Magnetisirungskoefficienten $\varkappa$ (Anh. 22) der Flüssigkeit, so ist, wenn s ihr spec. Gewicht und g die Schwerbeschleunigung, $C = \sqrt{2gs/\varkappa}$. Koncentrirte Eisenchloridlösung hat etwa (h in cm) $C = 7000$.

Quincke, Wied. Ann. 24, 347. 1885; du Bois ib. 35, 137. 1888; auch: magnetische Kreise S. 333. 1894.

VII. Aus Widerstands-Änderungen des Wismuts.

Der Widerstand von Wismut wächst im magnetischen Felde (Righi): für kleines H beschleunigt, von etwa $H = 10000$ Gauss oder [C.G.S] an aber fast gleichförmig, bei $H = 20000$ etwa das Doppelte des Anfangswertes erreichend. Eine ebene Spirale aus geprefstem Wismutdraht, zur Vermeidung von Induktion am besten bifilar gewunden, erfährt bei Querstellung gegen die Kraftlinien die stärkste Änderung.

Der Gang wird aber von der Temperatur beeinflufst. Nach Henderson beträgt im Felde H [C.G.S] für reines geprefstes Wismut das Verhältnis des Widerstandes zu dem im unmagnetischen Felde:

	$H = 0$	2000	4000	6000	8000	10000	12000 [C.G.S]
bei 18°	1,00	1,046	1,14	1,24	1,36	1,48	1,59
bei 0°	1,00	1,064	1,18	1,32	1,46	1,59	1,73.

	$H = 0$	15000	20000	25000	30000	35000	40000 [C.G.S]
bei 18°	1,00	1,80	2,09	2,39	2,70	3,03	3,37.

Ferner $w_{18}/w_0 = 1,070$ im unmagnetischen Felde.

Du Bois und Wills fanden für $H = 37500$ das Verhältnis 4 bei 0°, 6 bei −79°, 10 bei −115°, 230 bei −180°.

Das Messungsverfahren ergibt sich, wenn man den Widerstand als Funktion des magnetischen Feldes kennt, von selbst. Die Tabelle oder Kurve mufs, ev. mit Rücksicht auf die Temperatur, empirisch hergestellt werden.

Vgl. Lenard, Wied. Ann. 39, 619. 1890; Henderson, Wied. Ann. 53, 912. 1894; du Bois, magnet. Kreise S. 333, Berl. 1894; du Bois u. Wills, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 1, 169. 1899.

115. Untersuchung magnetisirbaren Materials. Magnetisirungskoefficient.

Vgl. auch Anh. 21 u. 22.

Entsteht in einem magnetischen Material durch eine daselbst herrschende magnetisirende Intensität $\mathfrak{H}$ die „Magnetisirung", d. h. das magnetische Moment der Volumeinheit $\mathfrak{J}$, so nennt man $\varkappa = \mathfrak{J}/\mathfrak{H}$ den Magnetisirungs-Koefficient (Susceptibilität) des Körpers.

$\varkappa$ ist nur für diamagnetische sowie schwach magnetische Körper eine Konstante. Für Eisen steigt mit wachsender Feldstärke $\varkappa$ von einem kleinen, den schwächsten Feldern zukommenden Anfangswerte zunächst zu einem Maximalwerte, nimmt dann wieder ab und wird schliefslich Null, da auch durch eine unendlich starke magnetisirende Kraft nur ein endlicher Grenzwert der Magnetisirung erzielt wird (bei Zimmertemperatur etwa 1700 [C.G.S] für Schmiedeeisen, 1250 für Gufseisen, 540 für Nickel). Mit steigender Temperatur nimmt der Grenzwert ab; Eisen ist bei Rotglut, Nickel und Kobalt schon bei tieferen Temperaturen nicht mehr magnetisirbar. Der Koefficient der Magnetisirung durch geringere Kräfte dagegen wächst bei mäfsiger Temperaturerhöhung zunächst an.

Gröfse und Gang des Magnetisirungs-Koefficienten werden aufser durch den mechanischen Zustand durch chemische Beimengungen besonders stark beeinflufst. Über einige Eisensorten s. Tab. 37.

$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ heifst Permeabilität, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}\mu$ Induktion. Vgl. S. 470.

Entmagnetisirende Intensität. In einem magnetischen Körper, der freien Magnetismus zeigt, also, mit Ausnahme eines gleichförmig nach seiner Axe magnetisirten Ringes oder unendlich langen Stabes, in jedem Körper, bewirkt der eigene Magnetismus Kräfte, welche der von aufsen wirkenden magnetisirenden Kraft H entgegenstehen, und die man aus der Verteilung des freien Magnetismus als seine Wirkung nach innen gemäfs dem Coulomb'schen Gesetz würde berechnen können. Es besteht also eine innere „entmagnetisirende Intensität" H_i, welche von H abzurechnen ist, um die wirkliche magnetisirende Intensität $\mathfrak{H}$ zu erhalten. Also ist

$$\mathfrak{H} = H - H_i. \qquad 1.$$

H_i ist im allgemeinen durch den Körper hindurch in ungleicher, von der Gestalt und auch von der Stärke der magnetisirenden Kraft abhängiger Weise verteilt. Nur in einem gleichförmig nach einer Hauptaxe magnetisirten Ellipsoid herrscht nach der Theorie ein konstanter, der Magnetisirung proportionaler Wert $H_i = P \cdot \mathfrak{J}$. Hier ist also

$$2. \quad \mathfrak{H} = H - P\mathfrak{J} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J} = \varkappa\mathfrak{H} = \varkappa(H - P\mathfrak{J}) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{J} = \varkappa H/(1 + \varkappa P). \quad 3.$$

Ein Ellipsoid mufs sich also in einem konstanten magnetischen Feld gleichförmig magnetisiren. Der „Entmagnetisirungsfaktor" P hängt vom Axenverhältnis ab.

Rotationsellipsoid. Die Magnetisirung finde nach der Richtung der Rotationsaxe l statt, der Rotationsdurchmesser sei $= d$. Es sei $d < l$

und $e = \sqrt{1 - d^2/l^2}$ die Excentricität. Dann ist nach Neumann (Vorles. üb. Theor. d. Magn. S. 74)

$$P = 4\pi \frac{1-e^2}{e^3}\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{lognat}\frac{1+e}{1-e} - e\right). \qquad 4.$$

Ist das Ellipsoid sehr lang gestreckt, d. h. d/l klein und also e fast gleich 1, so gilt nahe $P = 4\pi\frac{d^2}{l^2}\left(\operatorname{lg\,nat}\frac{2l}{d} - 1\right)$. — Für eine Kugel ist $P = \frac{4}{3}\pi = 4{,}19$, für einen relativ unendlich langen Stab $= 0$, für eine dünne, breite, der Dicke nach magnetisirte Platte hat es den gröfsten Wert 4π.

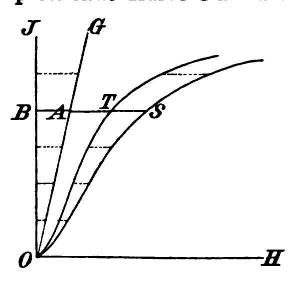
Cylinder. Für einen Cylinder l, d gilt dieselbe Formel um so näher, je gröfser l/d ist (Kirchhoff, Oberbeck). Die Abweichungen hängen u. a. von der Feldstärke und Magnetisirbarkeit ab.

Tabelle für P (Ellipsoid).

l/d	P	$P \cdot l^2/d^2$	l/d	P	$P \cdot l^2/d^2$	l/d	P	$P \cdot l^2/d^2$
5	0,701	17,5	40	0,0266	42,5	100	0,0054	54,0
10	,255	25,5	50	,0181	45,3	150	,0026	58,3
15	,135	30,4	60	,0132	47,5	200	,0016	64,0
20	,085	34,0	70	,0101	49,5	300	,0007	67,5
25	,059	36,7	80	,0080	51,2	400	,0004	72,0
30	,043	38,8	90	,0065	52,5	500	,0003	75,0

Aus du Bois, magn. Kreise S. 45; Über Cylinder s. Mann, Diss. Berlin 1895; vgl. auch Holborn, Berl. Sitz. Ber. 1898, 159.

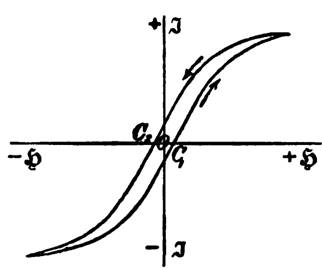
Graphische Darstellung. Scheerung. Man kann die beobachteten Magnetisirungen $\mathfrak{J}$ als Ordinaten zu den Intensitäten H auftragen und die Kurve OS ziehen, welche aber nach dem früheren nicht nur von dem Material, sondern auch von der Gestalt des untersuchten Körpers abhängt. Zu $\mathfrak{J}$, als blofser Eigenschaft des Materials, gehört als Abscisse die wirkliche magnetisirende Intensität $\mathfrak{H} = H - P \cdot \mathfrak{J}$ (Gl. 2). Die entsprechende Kurve OT kann aus OS durch folgende „Scheerung“ erhalten werden (Lord Rayleigh). Man zieht eine Gerade OG, bei welcher zur Abscisse H die Ordinate $\mathfrak{J} = H/P$ d. h. zur Ordinate $\mathfrak{J}$ die Abscisse $P \cdot \mathfrak{J}$ gehört. Durch einen Punkt S der Kurve legt man dann eine Parallele SAB zur Abscisse und trägt eine Strecke $ST = AB$ von S aus nach links ab; dann ist offenbar T ein Punkt der gesuchten Kurve. Denn die Abscisse zu T ist ja gegen H um AB, d. i. um $P\mathfrak{J}$ verkleinert. Phil. Mag. 22, 175. 1886.



Streng gilt diese Betrachtung nur für das Ellipsoid, welches daher den Ausgangspunkt für Untersuchungen von Materialien bildet.

Koercitivkraft, Hysterese. Wegen der magnetischen Härte gehört zu einer bestimmten Feldstärke bei absteigender Magnetisirung ein stärkerer Magnetismus, als bei zunehmender. Geht man mit der Magnetisirung also wiederholt aufwärts, dann abwärts durch Null hindurch

zu entgegengesetztem Magnetismus und wieder rückwärts, so stellen die Beobachtungen sich durch zwei Kurven dar, welche eine Schleife bilden etwa von der Gestalt der Figur, falls man hoch hinauf magnetisirt hat.



Als Mafs der Koercitivkraft betrachtet man die Intensität OC_1 oder OC_2 (Fig.), welche in einem Stabe, der ganz ruhig gehalten wird, nach einer Magnetisirung in der anderen Richtung den unmagnetischen Zustand herstellt (Hopkinson). Bei weichem Eisen etwa $=1$, steigt sie für gehärteten Wolframstahl auf etwa 50—70.

Die Höhe der Ordinate am Nullpunkte von $\mathfrak{H}$ stellt die nach dem Aufhören der magn. Kraft zurückbleibende Magnetisirung des Materials dar, kurz als die „Remanenz" desselben bezeichnet.

Das Flächenstück zwischen den beiden Kurven ist die molekulare Arbeit, welche der magnetisirende Kreisprocefs in der Volumeinheit des Materials verrichtet, und die sich in Wärmeentwicklung äufsert. Sie kommt bei dem Betriebe elektromagnetischer Maschinen als „Energievergeudung" in Betracht. Vgl. Warburg, Wied. Ann. 13, 141. 1881. Man mifst die Fläche mit dem Planimeter oder ausgeschnitten mit der Wage.

Als Ordinate wird, besonders für technische Anwendungen, statt der Magnetisirung oft die Induktion $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}$ gewählt. Die Remanenz gilt dann auch für $\mathfrak{B}$. Das Flächenstück der Schleife gibt dann durch 4π dividirt die Energievergeudung.

Nähere Angaben über die Ausführung von Messungen und über andere Methoden, besonders auch für technische Untersuchungen s. bei du Bois, l. c.; Ewing, magn. Induktion, übers. v. Holborn u. Lindeck 1892; Erich Schmidt, magn. Untersuchung d. Eisens etc., Halle 1900, am letztgenannten Orte auch die in der P. T. Reichsanstalt gebrauchten Methoden sowie neue Angaben über Eisensorten.

I. Bestimmung mit dem Magnetometer.

Man wendet langgestreckte Stäbe an, damit die entmagnetisirende Kraft klein ist; Erschütterungen sind zu vermeiden.

Der Stab wird in eine Spule gebracht, deren Strom für die Strecke des Stabes ein gleichförmiges magnetisches Feld gibt (**114** I), und das magn. Moment M bei verschiedener Feldstärke gemessen (**76**). Wenn V das Stabvolumen, so ist die auf die Volumeinheit bezogene Magnetisirung $\mathfrak{J}=M/V$.

Der Magnetisirungskoefficient (Susceptibilität) $\varkappa$ des Mate-

rials findet sich dann aus der Feldstärke H als $\varkappa = \mathfrak{J}/(H - P\mathfrak{J})$, und zwar giltig für die magnetisirende Intensität $\mathfrak{H} = H - P\mathfrak{J}$. Über den Entmagnetisirungsfaktor P s. S. 468, und ebenda über das Verfahren der Scheerung einer Kurve. Zu genauen Bestimmungen wird das Material in Gestalt eines gestreckten Rotationsellipsoids angewandt.

Die, der Stromstärke proportionale, Wirkung der Spule selbst auf die Nadel wird für eine passende Stromstärke gemessen und danach in Rechnung gesetzt; oder man kompensirt sie durch eine jenseit des Magnetometers angebrachte zweite Spule, die ebenfalls den magnetisirenden Strom erhält.

II. Bestimmung durch inducirte Ströme.

„Induktion". Die Magnetisirung des Stabes sei $= \mathfrak{J}$, das sie bewirkende Feld im Sinne von S. 467 $= \mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ die Dichte der magn. Kraftlinien und heifst die magnetische Induktion im Stabe. Über die Bedeutung s. Anh. 21 und 26. Wenn der Körper an der betrachteten Stelle von einer kurzen engen Spule von der Windungszahl N umgeben ist, so wird in dieser durch das Entstehen oder Verschwinden des Feldes und des Magnetismus ein el. Kraft-Integral (**109**) inducirt

$$\int E\,\mathrm{d}t = q(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})N = q \cdot \mathfrak{B} \cdot N, \qquad 5.$$

wo q der Querschnitt, $q\mathfrak{J}$ also das magn. Moment der Längeneinheit des Stabes ist. Statt $(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})$ kann man auch schreiben $\mathfrak{H}(1 + 4\pi\varkappa)$. $q \cdot \mathfrak{B} = q(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})$ heifst Induktionsflufs oder Kraftlinienflufs. [C.G.S]-Einheit = 1 „Maxwell".

Man mifst nach **109** mit einem in den Stromkreis eingeschalteten ballistischen Galvanometer die Elektricitätsmenge Q des Induktionsstofses, setzt (w = Gesamtwiderstand)

$$Q \cdot w = \int E\,\mathrm{d}t = q(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})N,$$

also

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{q}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{Q \cdot w}{N} - \mathfrak{H}q\right). \qquad 6.$$

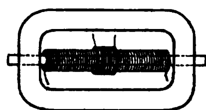
Alle Gröfsen sind in [C.G.S] auszudrücken.

Das magnetisirende Feld wird in der Regel durch eine enge lange Spule hervorgebracht (**114**). Die kleine sekundäre befindet sich gewöhnlich, dicht schliefsend über den Eisenstab geschoben, innerhalb der ersteren. Ist sie aufsen über die magnetisirende Spule geschoben, so wie in der Figur (folg. S.), so ist in Formel 6 statt $-\mathfrak{H}q$ zu setzen $-\mathfrak{H}(q + q')$, wenn q' den nicht mit Eisen ausgefüllten Querschnitt der Spule bedeutet.

Die Dauer des Induktionsstromes mufs kurz gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers sein, was bei Elektromagneten mit grofsen Eisenmassen nicht immer der Fall ist.

Anstatt das magn. Feld verschwinden zu lassen, kann man die kleine Spule plötzlich abziehen.

Schlufsjoch (Hopkinson). Um den freien Magnetismus eines Stabes und die daraus entspringende entmagnetisirende Kraft zu umgehen, kann man die Enden mittels gut schliefsender Klemmbacken mit grofsen Eisenmassen verbinden, welche die aus dem Stabe austretenden Kraftlinien weiter führen. Die Form des Doppeljochs der Eisenvorlage (Fig.) erreicht diesen Zweck vermöge des magnetischen Schlusses mit kleineren Eisenmassen.



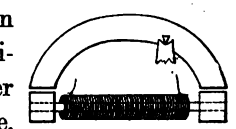
Die lange magnetisirende und die kurze Induktions-Spule sind über den Stab geschoben, in der Regel die letztere nicht über die primäre wie in der Figurenskizze, sondern innerhalb, oder auch zwischen zwei Hälften.

Der Apparat wird mit Stäben von bekannten Magn.-Koefficienten, die nach I bestimmt sind, geaicht.

Magnetisirung eines permanenten Magnets. Diese läfst sich für jeden Querschnitt dadurch messen, dafs man, so wie eben, von dem letzteren eine kurze, enge Spule abzieht. Das magn. Moment der Längeneinheit ist $= Qw/(4\pi N)$; vgl. Formel 6.

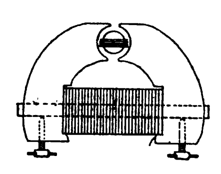
III. Bestimmung durch Polwirkungen.

Magnetische Wage (H. du Bois). Der von der Magnetisirungsspule umgebene Stab ist mit seinen Enden in eiserne Backen gespannt, über denen sich sehr dicht ein starker eiserner Bügel als Wagebalken mit zwei ungleichen Hebelarmen befindet, zugleich den magnetischen Schlufs vermittelnd. Die Differenz der durch Anziehung entstehenden Drehmomente, durch Laufgewichte gemessen, ist dem Quadrate der Induktion (vgl. II) genähert proportional. Die Aichung auf absolutes Mafs mufs mit einem anderweitig untersuchten Stabe geschehen.



H. du Bois, Magnetische Kreise S. 367; eine vervollkommnete Form und eingehende Theorie ZS. f. Instr. 1900, 1. — Eine Wage für gröbere Zwecke s. bei Ewing, Electrician 41, 110 u. 148. 1898; ZS. f. Instr. 1899, 222.

Drehbare Spule (Köpsel, Kath), Fig. Grundrifs. Der in der Magnetisirungsspule liegende zu untersuchende Stab ist wieder durch ein Joch geschlossen, aber mit einer Unterbrechungsstelle, die durch einen Eisencylinder unter Freilassung eines Luftringes ausgefüllt ist, in welchem eine drehbare Spule, wie in den Weston-Strommessern (85, 2) aufgehängt ist. Man leite durch diese Spule einen anderweitig gemessenen Strom von der Stärke C/q, wo q der Querschnitt des zu untersuchenden Stabes und C eine empirische Konstante des Instruments ist.



Die im Stabe erzeugte Magnetisirung pflanzt sich zu den Polflächen fort und lenkt den Spulenzeiger über einer Teilung ab, die nach Induktion des Stabquerschnitts beziffert ist, d. h. die Gröfse $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ angibt; vgl. S. 470. Hergestellt bez. geprüft wird die Teilung mit einem Normalstabe.

Einige, nicht gezeichnete, Windungen auf den Schenkeln kompensiren den Einflufs, welchen die Spule schon ohne Eisen hat. — Der Apparat ist so aufzustellen, dafs der Erdmagnetismus die drehbare Stromspule nicht beeinflufst.

Abh. v. Köpsel u. Kath, ZS. f. Instr. 1894, 391; 1898, 33; El.-techn. ZS. 1894, 214; 1898, 411. Orlich, ZS. f. Instr. 1898, 39.

116. Absolute Widerstands-Messung (W. Weber 1852).

Vgl. 108—111 und Anhang 24—29.

Hier soll nur eine Übersicht der Methoden gegeben werden. Eine ausführliche Darstellung aller ausgeführten Messungen s. Dorn, ZS. f. Instr., Beiheft Feb. 1893; Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanstalt Bd. II, 257. 1895.

I. Aus der Dämpfung eines schwingenden Magnets.

Es bedeute

k das Dämpfungsverhältnis einer Magnetnadel im geschlossenen Multiplikator (27),

$\varLambda$ = lognat k das natürliche log. Dekrement,

$\varLambda'$ dasselbe bei unterbrochener Leitung (Luftdämpfung),

τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel (28),

G die statische Galvanometerkonstante, d. h. das Verhältnis des (kleinen) Ausschlags zur Stromstärke in [C.G.S], wenn das magn. Feld = 1 wäre, ohne Fadentorsion;

M den Magnetismus, Θ den Torsionskoefficient der Nadel,
H die erdmagnetische Horizontalintensität.

1. Dann ist der absolute Widerstand Multiplikator + Schlufsleitung in elektromagnetischem Weber'schem Mafse

$$w = \frac{\pi^2}{2\tau} \frac{G^2}{\varLambda - \varLambda'} \frac{M}{H(1+\Theta)} \sqrt{1 + \frac{\varLambda^2}{\pi^2}}. \qquad 1.$$

Über die Bestimmung von M/H s. **73** II.

Galvanometerkonstante. Für einen kreisförmigen Multiplikator von n Windungen vom Halbmesser R mit kurzer Nadel im Mittelpunkte würde $G = 2\pi n/R$ sein (**81**), mit dem Korrektionsfaktor $1 - \frac{1}{8} b^2/R^2 + \frac{1}{12} h^2/R^2 + \frac{3}{16} \mathfrak{l}^2/R^2$ für Breite b, Dicke h der Windungslage und Polabstand $\mathfrak{l}$ der Nadel.

Für einen engen Multiplikator bestimmt man G empirisch mittels eines Stromes, welchen man gleichzeitig ganz durch eine Tangentenbussole und abgezweigt durch den Multiplikator gehen läfst (Dorn). Sind die Ablenkungswinkel bez. φ und φ', die Torsionskoefficienten bez. Θ und Θ', während G' die Konstante der Tangentenbussole, v der Abzweigungsfaktor (**86**) ist, so hat man $G = v\,G' \cdot \mathrm{tg}\,\varphi/\mathrm{tg}\,\varphi' \cdot (1+\Theta)/(1+\Theta')$.

Über die Ausführung s. F. K., Wied. Ann. 35, 710 u. 745. 1888.

II. Durch Induktionsstöfse mit dem Erdinduktor.

Ein Erdinduktor mit vertikaler Drehaxe (**111**) sei durch das Galvanometer geschlossen. Aufser den obigen Bezeichnungen sei

f die Windungsfläche des Induktors (**106**),
α der Nadelausschlag durch einen einzelnen Induktionsstofs ohne Dämpfung, in dem Sinne von S. 448 u. 452, bei Drehung um die vertikale Axe, wie in **111**.

2. Ist die Empfindlichkeitskonstante des Multiplikators bekannt oder wie oben bestimmt, so braucht man das Dämpfungsverhältnis nur so weit, wie es zur Berechnung von α gefordert wird. Es ist nämlich

$$w = \frac{2\pi}{1+\Theta} \frac{fG}{\alpha\tau}. \qquad 2.$$

3. Statt der Empfindlichkeitskonstante genügt eine genaue Kenntnis der Dämpfung. Es ist, wenn

K das Trägheitsmoment der Nadel bedeutet,

$$w = \frac{8}{\pi} \frac{f^2 H^2 \tau}{\alpha^2 K} \frac{\varLambda - \varLambda'}{\sqrt{\pi^2 + \varLambda^2}}. \qquad 3.$$

4. Mit Hilfe der bekannten Beziehung (Anhang Nr. 12) $K = MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$ kann man K eliminiren und erhält

$$w = \frac{8\pi}{1+\Theta}\frac{f^2}{\alpha^2\tau}\frac{H}{M}\frac{\Lambda-\Lambda'}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}. \qquad 4.$$

Die Gröſse α kann bei 2. durch Multiplikation oder Zurückwerfung, bei 3. und 4. muſs sie durch Zurückwerfung bestimmt werden, um zugleich die Dämpfung zu erhalten. Sind hierbei die beiden stationären Schwingungsbögen in absolutem Maſse $=a$ und b, so hat man also zu setzen (**110** II)

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \Lambda/\pi}$$

und $\Lambda = 2{,}3026(\lg a - \lg b)$.

Die Methoden 2. und 3. können mit astatischer Nadel arbeiten.

Über Vereinfachungen der Rechnungen s. Tab. **29** und S. 449, 458.

Die vorigen Methoden leiten sich aus **108** ab. Denn es ist $G = q/M$, also nach Gl. 7a, 8 und 3 daselbst

$$\frac{M^2G^2}{w} = 2K\frac{\Lambda-\Lambda'}{T} \text{ oder } = 2K\frac{\Lambda-\Lambda'}{\tau\sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2}},$$

woraus

$$w = \frac{1}{2}\frac{M^2\tau}{K}\frac{G^2}{\Lambda-\Lambda'}\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}.$$

Indem man K durch $MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$ ersetzt, folgt unsere Gl. 1.

Ein Induktionsstoſs durch die Horizontalkomponente H liefert ferner die Strommenge $2fH/w$ und teilt hierdurch der Nadel eine Winkelgeschwindigkeit mit (Gl. 6):

$$u_0 = \frac{2fH}{w}\frac{q}{K} = \frac{2fH}{wK}\sqrt{2wK\frac{\Lambda-\Lambda'}{T}} = \frac{fH}{\sqrt{w}}\sqrt{\frac{8(\Lambda-\Lambda')}{KT}}.$$

Hieraus folgt $w = f^2H^2/u_0^2 \cdot 8(\Lambda-\Lambda')/(KT)$. Indem man noch (**108** Gl. 6. u. 8) $u_0 = \pi/\tau \cdot \alpha$ und $T = \tau\sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2}$ setzt, kommt die Gleichung 3.

Gl. 2 endlich kommt aus 3, wenn man hier nach **108** Gl. 8, 7a u. 3

$$\Lambda-\Lambda' = q^2T/(2wK) = G^2M^2\tau\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}/(2wK\pi)$$

einsetzt und dann noch statt K schreibt $MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$.

Alle Gröſsen sind in [C.G.S] auszudrücken. w liefert dann, durch 10^9 geteilt, den Widerstand in Ohm.

Über inkonstantes Dämpfungsverhältnis vgl. K. Schering, Wied. Ann. 9, 471. 1880. Auch die Selbstinduktion der Spulen bewirkt eine Korrektion; s. Dorn, ib. 17, 783. 1882. Endlich können auch lokale Variationen des Erdmagnetismus Korrektionen verlangen.

III. Mit dem rotirenden Erdinduktor (Weber).

Die Methode wurde von der British Association ausgebildet.

Ein Kreisring vom mittleren Halbmesser r mit n Windungen rotire um eine vertikale Axe Nmal in 1 sec, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi N$. In einem Augenblick, wo die Axe des Ringes mit dem magn. Meridian den Winkel φ bildet, wird in ihm inducirt die el. Kraft $E = 2\pi N \cdot nr^2\pi \cdot H \sin\varphi$, also der Strom E/w. Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld in seinem Mittelpunkt $E/w \cdot 2\pi n/r$, dessen zum Erdmagnetismus senkrechte Komponente

$$E/w \cdot 2\pi n/r \cdot \sin\varphi = 1/w \cdot 4\pi^3 N n^2 r H \sin^2\varphi$$

beträgt. Der Mittelwert dieser Komponente während einer halben Umdrehung ist

$$1/w \cdot 4\pi^3 N n^2 r H \cdot 1/\pi \cdot \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = 1/w \cdot 2\pi^3 N n^2 r H.$$

Eine Magnetnadel im Mittelpunkt werde durch die Rotation um den Winkel α dauernd abgelenkt. Dann ist

$$1/w \cdot 2\pi^3 N n^2 r H \cos\alpha = H \sin\alpha, \text{ woraus } w = 2\pi^3 N n^2 r \operatorname{ctg}\alpha.$$

Korrektionen stammen aus dem Querschnitt der Windungslage, der Fadentorsion, der Selbstinduktion und der Induktion der Magnetnadel auf die Spule.

IV. Mit einer im magnetischen Felde rotirenden Scheibe (Lorenz).

Ein Strom i durchfließt eine lange Drahtspule von n Windungen auf 1 cm. Das magnetische Feld in der Spule ist (**114** I) $= 4\pi n i$. Eine Metallscheibe vom Halbmesser r rotirt in diesem Felde mit N/sec Umdrehungen, die Kraftlinien senkrecht schneidend. Ein Kontakt drückt gegen das Centrum, ein zweiter schleift an der Peripherie der Scheibe. Zwischen diesen Punkten wird dann, da ein Radius der Scheibe in der Zeiteinheit offenbar eine Fläche $N \cdot r^2\pi$ beschreibt, also $4\pi n i \cdot N r^2 \pi$ Kraftlinien schneidet, eine el. Kraft inducirt $4\pi^2 n r^2 N \cdot i$.

G

w

Derselbe Strom i durchfließt den zu messenden Widerstand w, erzeugt also an dessen Enden die Spannung $w \cdot i$. Die Umdrehungszahl N wird so regulirt, daß diese Spannung der obigen gleich ist, was an dem Strom Null in einem Galvanometer erkannt wird. Dann ist also $w = 4\pi^2 n N r^2$.

In Wirklichkeit verlangt die endliche Länge der Spule eine erhebliche Korrektion; vgl. **114** I.

Anstatt der rotirenden Scheibe kann eine geeignet rotirende Spule angewandt werden (Lippmann).

V. Aus der wechselseitigen Induktion zweier Stromleiter (Kirchhoff).

Der wechselseitige Induktionskoefficient (118) zweier Spulen sei $=P$. Derselbe wird aus der Gestalt und der Lage der Spulen berechnet, was im allgemeinen eine verwickelte Arbeit ist. Einfach wird der Fall einer langen Spule vom Halbmesser r, gleichmäſsig mit n Windungen auf die Längeneinheit bewickelt, über welche eine enge, kurze Spule von m Windungen geschoben ist (Roiti, Himstedt). Von einer Korrektion, welche von der beschränkten Länge der ersteren Spule herrührt, abgesehen, ist dann $P=4\pi^2r^2nm$ (Anh. 28).

In der primären Spule entstehe oder verschwinde der Strom i. Das hierbei inducirte Integral el. Kraft ist $\int E\mathrm{d}t=Pi$.

Die in dem sekundären Stromkreis inducirte Strommenge ist also $Q=Pi/w$. Dieselbe wird nach **109** gemessen und liefert dann w in absolutem Maſse.

Mit Hilfe eines Stromunterbrechers im primären Stromkreis, welcher den Strom i in 1 sec Nmal unterbricht (**57**), wobei aber mittels eines Disjunktors nur die Schlieſsungs- oder die Öffnungsströme in der inducirten Spirale zu Stande kommen, kann man die Bestimmung von Q auf dauernde Ablenkungen zurückführen (Roiti, Himstedt).

Die Ablenkung eines Galvanometers im sekundären Stromkreis sei hierbei $=\alpha_1$, der inducirende Strom i gebe an demselben Galvanometer die Ablenkung α_2, dann ist

$$w=NP\cdot\mathrm{tg}\,\alpha_2/\mathrm{tg}\,\alpha_1.$$

Denn es ist $NPi/w=C\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$ und $i=C\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$. Anordnung und Korrektionen s. bei Himstedt, Wied. Ann. 26, 547. 1885.

VI. Aus der Stromwärme (vgl. 49 II).

Nach dem Satze (Anh. Nr. 30): Die Einheit des Widerstandes im [C.G.S]-System hat ein Leiter, in dem der Strom 1 [C.G.S] die Leistung Eins verrichtet, d.h. in 1 sec die der Arbeit 1 cm$\times$Dyne äquivalente Wärmemenge entwickelt. Der Arbeit 1 meter$\times$gr-Gew., welche $=100\times981$ $=98100$ cm-Dynen ist, entspricht die Wärmemenge $\frac{1}{427}$ gr-Kal, einer cm-Dyne entsprechen also $\frac{1}{427\cdot98100}=\frac{1}{41900000}$ gr-Kal.

Der zu bestimmende Widerstand befinde sich, wie in der Figur S. 185 angeordnet, in einem mit m gr destillirten Wassers von sehr geringem Leitvermögen gefüllten Kalorimeter. Der Wasserwert Gefäſs + Thermometer + Widerstand sei $=\gamma$ (**48** I).

Ein den Widerstand durchfliefsender konstanter Strom, von der Stärke (81) i [C.G.S] oder (85, 2) $10i$ A bewirke in z sec die Temperaturerhöhung Θ. Ist die Mitteltemperatur erheblich von 15^0 verschieden, so wird die Änderung der sp. Wärme des Wassers berücksichtigt (48).

Der Widerstand des Leiters berechnet sich

$$w = 41900000 \frac{(m+\gamma)\Theta}{i^2 z} \text{[C.G.S] oder } [10^{-9}\,\Theta].$$

Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents.

Wenn der Widerstand des Leiters w in [C.G.S] bekannt ist, so liefert das Verfahren umgekehrt das mechanische Wärmeäquivalent

$$A = \frac{i^2 w z}{(m+\gamma)\Theta} \frac{\text{cm}^2\text{gr sec}^{-2}}{\text{Wasser-gr-Kal.}} \text{ oder } \frac{\text{cm-Dyne}}{\text{Wasser-gr-Kal.}},$$

wobei die Wasserkalorie sich auf die mittlere Versuchstemperatur bezieht.

117. Selbstinduktions-Koefficient eines Leiters (Maxwell).

Koefficient der Selbstinduktion (elektromagnetische Kapacität; elektrodynamisches Potential eines Leiters auf sich selbst oder kurz Selbstpotential) S heifst der Faktor, mit welchem die negative Änderungsgeschwindigkeit $-di/dt$ des Stromes in dem Leiter zu multipliciren ist, um die el. Kraft der Induktion (des Extrastromes) zu erhalten. Vgl. Anh. 28.

Über die Berechnung des Selbstpotentiales von Rollen s. Stefan, Wied. Ann. 22, 107. 1884; Über die Messung oder Berechnung kleiner Selbstpotentiale M. Wien, ib. 53, 928; Prerauer, ib. 53, 772. 1894.

Drückt man die zur Messung dienenden Gröfsen im [C.G.S]-System aus, so wird der Ind.-Koefficient in [cm] erhalten; aus Ohm, Farad etc. in „Quadrant" oder „Henry".

Sätze von Selbst-Ind.-Koefficienten. Solche können aus einer Reihe von Rollen bestehen, die durch Stöpsel beliebig eingeschaltet werden. Den wesentlichen Vorteil konstanten Widerstandes bietet ein Paar koncentrischer Rollen, die mefsbar gegeneinander gedreht werden können. Dadurch dafs die Wicklungen noch aus mehreren Abteilungen bestehen, welche man gleich- oder entgegenschaltet, entsteht ein System mit Selbst-Ind.-Koeff. von weitem Bereich, z. B. zwischen $S = 0{,}4 \cdot 10^6$ und $120 \cdot 10^6$ cm. M. Wien, Wied. Ann. 57, 249. 1896.

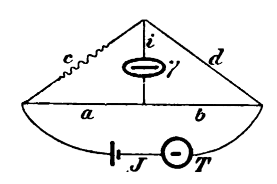
Bei Messungen ist auf ausreichende gegenseitige Entfernung der Leiter zu achten.

Sind Eisenkerne etc. vorhanden, so besteht kein konstanter Ind.-Koefficient, da seine Gröfse von der Stromstärke abhängt.

Bestimmung in der Brücke.

Zu der Bedingung für das Verschwinden eines Stromes in der Brücke, dafs die Widerstände der beiden Paare benachbarter Zweige in Proportion stehen, tritt bei veränderlichen Stromstärken die zweite hinzu,. dafs die Zweigleitungen induktionsfrei sind, oder dafs auch die Selbstinduktionskoefficienten benachbarter Zweige in derselben Proportion stehen wie die Widerstände. — Über Kapacität s. **182**.

1. Nach Dorn. Der zu bestimmende Leiter sei in c enthalten. γ ist ein ballistisches Galvanometer vom Widerstande γ. Die übrigen Zweige seien induktions- und kapacitätsfrei. In den ungeteilten Strom kommt ein Gleichstrommesser T. Die Widerstände werden so abgeglichen, dafs in γ kein Strom, also dafs $a:b=c:d$ ist. Die Nadel des Instrumentes im Hauptstrom zeige die Ablenkung φ. Der Hauptstrom wird unterbrochen. Durch den dabei in c entstehenden Extrastrom mache die Nadel von γ den Ausschlag e. Ihre Schwingungsdauer und ihr Dämpfungsverhältnis seien τ und k (27); $\Lambda = \log \operatorname{nat} k$. Wir setzen



$$n = \frac{1}{b}[(a+c)(b+d)+\gamma(a+b+c+d)].$$

Dann ist das Selbstpotential S des Leiters in c

$$S = n \cdot \frac{\tau}{\pi}\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{C}}\frac{e}{\varphi} k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda}.$$

$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{c}$ bedeuten den Reduktionsfaktor (**81, 83, 89**) des Hauptgalvanometers bez. Brückengalvanometers. Ist das erstere eine Tangentenbussole, so hat man für φ zu setzen $\operatorname{tg}\varphi$.

Beweis: Ist $J=\mathfrak{C}\varphi$ der Stammstrom, i_c der Strom in c, so hat man zunächst $i_c = J(a+b)/(a+b+c+d)$. Während des Verschwindens von i_c hat die el. Kraft in c zur Zeit t die Gröfse $S \cdot di_c/dt$, der Strom i in γ ist also (S. 347, 1. Beisp.) $i = S\frac{di_c}{dt}\frac{b+d}{(a+c)(b+d)+\gamma(a+b+c+d)}$. Drückt man hier i_c durch J aus und berücksichtigt ferner, dafs $a:b=c:d$ oder $ad=bc$ gemacht war, also $(a+b)(b+d)=(a+b+c+d)b$, so findet man $i = S \cdot dJ/dt \cdot 1/n$. Also ist

$$\int i\,dt = SJ/n \quad \text{oder} \quad S = n\int i\,dt \cdot 1/J = n \cdot \mathfrak{c}\tau/\pi \cdot e \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\Lambda} \cdot 1/\mathfrak{C}\varphi,$$

wenn $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{C}$ die Reduktionsfaktoren der beiden Galvanometer sind.

Zur direkten Vergleichung werden die beiden Galvanometer zu verschieden empfindlich sein. Wie man sich durch Widerstände, Abzweigungen u. s. w. hilft, um $\mathfrak{c}/\mathfrak{C}$ zu bestimmen, s. in **89**.

Zur Rechnung vgl. S. 449 u. Tab. 29.

2. Nach Rayleigh. Anstatt den Stammstrom J zu messen, kann man einfacher an γ selbst den Ausschlag e' bei Dauerstrom beobachten, nachdem man einen kleinen Widerstand w in den Zweig c zugeschaltet hat.

Dann ist $S = w \cdot \tau/\pi \cdot e/e' \cdot k^{1/\pi \cdot \mathrm{arc\,tg}\,\pi/\Lambda}$.

Denn nach dem Zufügen von w entsteht ein Strom in der Brücke

$$\mathfrak{r} \cdot e' = J \cdot \frac{wb}{(a+c)(b+d)+\gamma(a+b+c+d)} = J\frac{w}{n}.$$

3. Vergleichung zweier Selbstpotentiale (Maxwell). In den Zweigen c und d mögen sich, hinreichend weit von einander aufgestellt, die Leiter mit den Selbstpotentialen S und S' nebst Rheostaten- oder Draht-Widerständen befinden; a und b seien induktionsfrei. Die Widerstände werden derartig abgeglichen, dafs die Nadel von γ sowohl bei Dauerstrom wie bei der Schliefsung oder Öffnung ruhig bleibt.

Dann ist $S/S' = a/b = c/d$.

Diese Beziehung folgt aus Nr. 1, vor. S., denn man kann den Ausschlag Null ansehen als aus den beiden entgegengesetzt gleichen von S und S' herrührenden Ausschlägen $\alpha = A \cdot S/n$ und $\alpha = A \cdot S'/n'$ zusammengesetzt, wo $1/A$ den gemeinsamen Ausdruck $\mathfrak{r}/\mathfrak{C} \cdot \tau/\pi \cdot 1/\varphi \cdot k^{1/\pi \cdot \mathrm{arc\,tg}\,\pi/\Lambda}$ bezeichnet. n und n' aber unterscheiden sich nur durch die Nenner b und a. Also ist $S/S' = n/n' = a/b$.

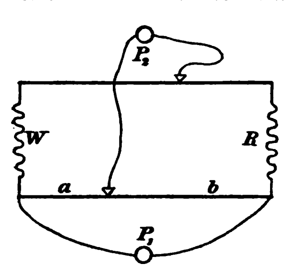
4. Vergleichung eines Selbstpotentials mit der Kapacität eines Kondensators (Maxwell). Die Spule mit dem Selbstpotential S befinde sich im Zweige c; dem Zweige b wird ein Kondensator von der elektromagnetisch gemessenen Kapacität C (**132**) parallel geschaltet, d. h. die Enden von b werden durch kurze Drähte mit den beiden Belegungen verbunden. Bleibt die Nadel von γ sowohl bei Dauerstrom wie bei Schliefsung oder Öffnung ruhig, so ist $S/C = a \cdot d = b \cdot c$. Die Widerstände a, d oder b, c in [cm/sec] gemessen und C elektromagnetisch in [$\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{sec}^2$], erhält man S in [cm]. Ohm und Farad geben S in Quadrant oder Henry; s. Anh. 27, 28, 29.

5. Vergleichung durch das akustische oder optische Telephon oder das Vibrationsgalvanometer (**85a**). Die Methoden 3 und 4 sind auch so auszuführen, dafs man statt des Galvanometers ein Telephon in die Brücke schaltet und als Stromquelle ein kleines Induktorium oder zum optischen Tele-

phon bez. Vibrationsgalvanometer einen synchronen Unterbrecher nimmt; s. Fig. S. 412 u. 373. Wenn die Reaktion des Telephons etc. verschwindet (vgl. unten), gelten die unter 3 bez. 4 aufgestellten Gleichungen.

Einstellungsverfahren für Nr. 3, 4 u. 5. Die Aufgabe umfaſst jedesmal zwei zu erfüllende Bedingungen: erstens müssen die 4 Widerstände in Proportion stehen, zweitens muſs diese Proportion gerade diejenige sein, welche den zu vergleichenden Selbstinduktionen etc. entspricht. Verlangt wird also auf jeder Seite ein verstellbarer Verzweigungspunkt. Man kann z. B. für die Zweige *a* und *b* einen Brückendraht mit Schleifkontakt nehmen oder für *a* einen konstanten Widerstand, für *b* einen Rheostaten. Auch in *cd* ist ein Schleifkontakt bequem; doch wird daselbst oft auch ein Rheostat notwendig sein. Insofern die Leiter mit Induktion den Zweigen zugeschaltet werden, ist ihr Widerstand in dem betr. Zweige natürlich zuzurechnen.

Die Methode Nr. 5 mit dem Telephon wird man folgendermaſsen anwenden. Bezüglich Selbstinduktion zu vergleichen seien die Leiter *W* und *R*; man schaltet sie so, wie die Figur zeigt, neben den Meſsdraht *ab*, bringt aber gleichzeitig einen Hilfsdraht mit Schleifkontakt so an, daſs man seinen Widerstand beliebig zwischen den Zweigen, die *W* bez. *R* enthalten, verteilen kann. Nun sucht man durch Probiren eine Stellung dieses Kontakts, bei der überhaupt ein merkliches Minimum der Tonstärke im Telephon auftritt, wenn man den Kontakt auf *ab* verschiebt. Man verstellt jetzt den oberen Kontakt ein wenig nach einer Seite und überzeugt sich, ob hierdurch das Minimum besser oder schlechter wird. Im letzteren Falle verstellt man in der anderen Richtung.



Es ist Sache des Ausprobirens, die Stellung des Hilfskontaktes zu finden, bei der das Minimum scharf wird. Hat man sie gefunden, so ist nun $S_W : S_R = a : b$. Existirt die richtige Stellung überhaupt nicht, so ist der Widerstand des Hilfsdrahtes zu klein (oder es haben die Leiter auſser der Selbstinduktion noch Kapacität, die aber nur bei groſsen Widerständen stören kann).

6. Die sehr schnellen, in der Funkenentladung einer Leidener Flasche enthaltenen Schwingungen lassen sich mittels Verzweigung (Differentialerreger) zur Vergleichung auch sehr kleiner Selbstinduktionen benutzen. Vgl. **133**, 6.

Bestimmung durch Abzweigen.

7. Der Leiter w mit Selbstinduktion S wird mit einem induktionslosen Widerstande w' in den Kreis eines sinusartigen Wechselstroms von der Wechselzahl (d. h. der doppelten Periodenzahl) ν/sec eingeschaltet. Man legt ein Elektrometer in Doppelschaltung (**127** II), oder eine Abzweigung von grofsem Widerstande durch ein Dynamometer oder durch ein Hitzdrahtgalvanometer, an die Enden von w, dann von w', und mifst die mittleren Quadrate L bez. L' der Klemmspannungen oder der Zweigströme; am besten wird L' durch geeignete Wahl von w' etwa gleich L gemacht. Dann ist

$$L:L' = (w^2 + \pi^2\nu^2 S^2):w'^2$$

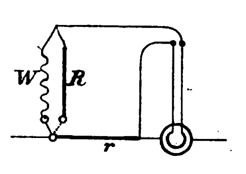
also

$$S = \frac{1}{\pi\nu}\sqrt{\frac{L}{L'}w'^2 - w^2}.$$

Mit einem in den Hauptstrom eingeschalteten Dynamometer etc. oder einem an zwei Punkte konstant angelegten Elektrometer prüft man die Konstanz der Energie des Wechselstromes bez. stellt ihre Änderung fest. Beträgt die mittlere Energie zu beiden Versuchen E bez. E', so ist L/L' in obiger Formel mit E'/E zu multipliciren.

$\sqrt{w^2 + \pi^2\nu^2 S^2}$ entspricht bei dem Leiter mit Selbstinduktion dem Widerstande eines induktionslosen Leiters und wird wohl der „scheinbare Widerstand“ oder die „Impedanz“ des ersteren für eine Wechselzahl ν genannt. Vgl. auch **120** II und Anh. 28.

8. Man schaltet die eine Dynamometerrolle konstant in den Sinushauptstrom und zweigt von einem induktionsfreien Widerstand r nur durch die andere Rolle ab. In der Abzweigung wird der zu bestimmende Leiter (W, S) mit einem induktionslosen Widerstand R vertauscht, den man so aussucht, dafs der Ausschlag der gleiche bleibt. Dann ist, wenn γ der Widerstand der Rolle in der Abzweigung,



$$\pi^2\nu^2 S^2 = (R - W)(W + r + \gamma).$$

Zu 1) Dorn, Wied. Ann. 17, 783. 1882; 2) Lord Rayleigh, Phil. Trans. 1882, S. 661; 3) Maxwell, Elektr. II, Art. 757; 4) ib. 778; 5) Lorenz,

Wied. Ann. 7, 167. 1879 (wohl der erste erfolgreiche Versuch mit dem Telephon bei einer Messung). M. Wien, ib. 44, 689. 1891; 57, 249. 1896, wo auch Hindernisse und Schwierigkeiten besprochen werden; 6) Nernst, ib. 60, 620. 1897; 8) Rowland u. Penniman, Sill. Journ. (4) 8, 35. 1899; ZS. f. Instr. 1900, 369. Daselbst noch einige Anordnungen mit dem Dynamometer. Über die Theorie auch Oberbeck, ib. 17, 826. 1882. — Andere Methoden: mit dem Magnetinduktor F. K., ib. 31, 594. 1887; mit dem optischen Telephon von bekannter Periode M. Wien, l. c.; auch Roiti, Foster, Joubert. Über einen Sinusinduktor s. F. K., Pogg. Ann. Jubelbd., S. 292. 1874. — Eine Zusammenstellung vieler Methoden, Berechnungsformeln und der Literatur in Heydweiller, Elektr. Messungen S. 179 ff. Leipz. 1892.

118. Gegenseitiger Induktionskoefficient.

In einem Leiter I ändere sich eine Stromstärke mit der Geschwindigkeit di/dt. In einem benachbarten Leiter II werde hierdurch eine el. Kraft $S_{12} \cdot di/dt$ inducirt, dann heifst S_{12} der Induktionskoefficient von I auf II. Es ist immer $S_{12} = S_{21}$. Vgl. auch Anh. 28 und den Eingang zu **117**.

I. Direkte Bestimmung.

Durch den einen Leiter werde der gemessene Strom i geschickt, der andere sei durch ein ballistisches Galvanometer (**85**, **109**) zu einem Kreise vom Widerstande w geschlossen. Unterbrechung oder Schliefsung des primären Kreises bewirke im sekundären den Stromstofs Q, dann ist

$$S_{12} = w \cdot Q/i.$$

Denn es ist $\int e\,dt = S_{12} \cdot i$ und $Q = 1/w \cdot \int e\,dt$.

Q/i läfst sich ersetzen durch den Ausdruck $\frac{\tau}{\pi} \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{C}} \frac{e}{\varphi} k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc\,tg} \pi/\varLambda}$; vgl. über die Bedeutung dieser Gröfsen **117**, 1.

II. Vergleichung zweier gegenseitiger Ind.-Koefficienten (Maxwell, Elektr. § 755).

Man schaltet die inducirenden Rollen 1 und 3 mit einer Batterie und einem Stromschlüssel zu einem Stromkreise, die inducirten 2 und 4 mit induktionsfreien Rheostatenwiderständen, deren Verhältnis man ändern kann, zu einem zweiten Kreis, den man durch ein Galvanoskop überbrückt. Bleibt das letztere bei Stromwechsel ruhig, so ist

$$S_{12} : S_{34} = w_2 : w_4,$$

wenn w_2 und w_4 die Gesamtwiderstände links und rechts von der Brücke bezeichnen.

Beweis: Die el. Kräfte in den Zweigen durch die Entstehung etc. des primären Stromes stehen jederzeit im Verhältnis $S_{12}:S_{34}$.

Anstatt Batterie und Galvanoskop werden Induktionsapparat und Telephon oft bequemer sein. — Stromerreger und Stromprüfer kann man auch auswechseln.

Sind die Widerstände der Rollenpaare ungleich, so schaltet man vorteilhaft die weniger ungleichen in denselben Stromkreis.

III. Abgleichung eines gegenseitigen und eines Selbstinduktionskoefficienten (Maxwell, Elektr. § 756).

Gegeben seien zwei gegen einander verstellbare Rollen, z. B. die Anordnung von M. Wien, Wied. Ann. 57, 249. Die eine Rolle kommt in die unverzweigte Leitung, die andere in den Zweig a der Brücke (Fig. S. 478) und zwar so gerichtet, daſs ihre Selbstinduktion S der von der anderen Rolle erlittenen Induktion S_{12} entgegengesetzt wirkt. Die Widerstände werden mit Dauerstrom bis zur Stromlosigkeit der Brücke, d. h. $a:b=c:d$ abgeglichen, demnächst werden die Rollen so gegen einander verstellt, daſs die Stromlosigkeit auch bei Stromwechsel erhalten bleibt. Dann ist

$$S=S_{12}(1+a/b) \quad \text{oder} \quad S_{12}(1+c/d).$$

Folgt daraus, daſs das el. Kraft-Integral in a bei Entstehung des Stammstromes J, des Zweigstromes i in a, gleich $S_{12}J-Si$ auf Null gebracht und daſs auſserdem (S. 478) $J:i=(a+b+c+d):(b+d)$ ist.

S. auch M. Wien, Wied. Ann. 44, 697. 1891; Heydweiller, ib. 53, 499. 1894.

119. Messungen an Gleichstrom-Dynamomaschinen.

Über eingehendere und vollständigere Darstellungen zu **119** bis **122** vgl. z. B. die Lehr- und Handbücher von Gérard, Grawinkel-Strecker, Kapp, Kittler, Silv. Thompson, übers. v. Strecker u. Vesper, u. d. Kalender von Uppenborn; auch die Lehrbücher von Benischke, Erhard, Heinke, Rühlmann und die elementare Darstellung von Graetz.

Die Maschine kann als Stromerzeuger (Generator) oder als Krafterzeuger (Motor) laufen. Das Folgende betrifft hauptsächlich die Generatoren.

Wartung. Der Kollektor ist von Metallstaub frei zu halten, zuweilen mit Schmirgelpapier überlaufen zu lassen und darauf zu reinigen. Ist er stärker angefressen oder unrund, so wird er mit einem am Maschinengestell zu befestigenden Support abgedreht. Das Anfressen wird durch

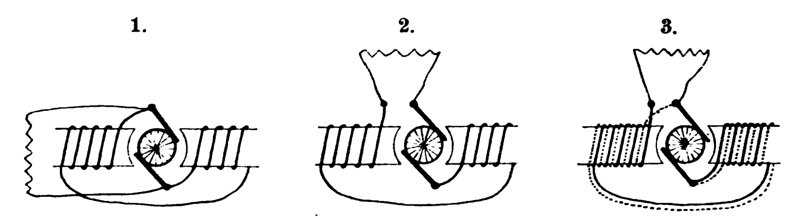
leichtes Auflegen der Bürsten und Einstellung auf Funkenfreiheit eingeschränkt. Die Funken rühren von der Selbstinduktion in dem Teile des Ankers her, welcher einen Augenblick zuvor durch die Bürsten kurz geschlossen war, und entstehen vornehmlich dadurch, daſs die Bürsten auf Kollektorstreifen liegen, deren Ankerwindungen nicht induktionsfrei sind, d. h. nicht mit der „neutralen Zone" zusammenfallen.

Die letztere steht nun, wenn die Maschine Strom hat, (bei zweipoligen Maschinen) nicht genau senkrecht auf der Richtung des Feldes der Elektromagnetpole, sondern ist dadurch verschoben, daſs der Ankerstrom die Magnetisirungsrichtung des Ankerkernes gegen die Feldrichtung verdreht, und zwar um so stärker, je stärker der Strom ist. Die zur Funkenfreiheit nötige Verdrehung der Bürstenbrücke aus der Symmetrielage (bei dem Generator in, beim Motor entgegen dem Lauf) wächst also durch die „magnetische Rückwirkung des Ankerstromes" mit der Stromstärke (mit „der Belastung"), und zwar um so stärker, je gröſser bei einer Maschine die magnetisirende Kraft des Ankerstromes im Verhältnis zur Feldstärke der Schenkelpole ist. Man probirt die funkenfreie Stellung für die zeitweilige Stromstärke durch Verdrehung des Bürstenhalters aus. Bei Maschinen mit Doppelbürsten kann weiter eine kleine gegenseitige Verschiebung der Bürsten eines Paares helfen.

Wenn keine ständige Wartung vorhanden ist, stellt man nahe für die gröſste Stromstärke ein.

Ausgefaserte oder ungleich verschlissene Bürsten sind im Schraubstock sorgfältig zu beschneiden.

Die Maschinen sollen auf Schienen stehen, damit der Riemen zur Verminderung des Gleitens bequem angezogen werden kann.



Gemäſs der Schaltung der Magnetwickelung teilt man ein in:

1. Nebenschluſsmaschine (am verbreitetsten; Lichtcentralen; Motoren von konstanter Umlaufszahl). Der Anker ist durch die (relativ dünndrähtige) Magnetwickelung und die äuſsere Leitung nebeneinander geschlossen; Schema in Fig. 1. Die Klemmspannung ist bei kleinem äuſseren Widerstande gleich Null und steigt mit dessen Anwachsen zu einem Grenzwert.

2. Hauptstrom- oder Serienmaschine (besonders als Straſsenbahnmotor; als Generator selten mehr gebraucht). Die, dickdrähtige, Magnetwickelung liegt mit Anker und der Auſsenleitung im einfachen Stromkreise (Fig. 2). Mit wachsendem äuſseren Widerstand nimmt die

el. Kraft des Generators bis auf Null ab. Die Klemmspannung hat für einen bestimmten äufseren Widerstand ein Maximum.

3. Gleichspannungs- oder Verbund- (Compound-) Maschine. Der Elektromagnet hat zwei Wickelungen. Die eine, dünndrähtige, liegt wie bei der Nebenschlufsmaschine an den Bürsten (in Fig. 3 punktirt gezeichnet), oder auch an den Klemmen der Maschine. Die andere, dickdrähtige, liegt mit dem Anker und der äufseren Leitung in Serienschaltung. Bei geeigneten Verhältnissen wird bei normaler Umdrehungszahl die Klemmspannung vom äufseren Widerstande wenig beeinflufst.

Eine ausführliche Zusammenstellung von Maschinen-Anordnungen s. Grawinkel-Strecker, Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik 6. Aufl. S. 307. 1900.

Bezeichnungen: i = Aufsenstrom, i_A = Ankerstrom;
i_N = Nebenschlufs-, i_S = Serienwicklungsstrom;
w, w_A, w_N, w_S die entsprechenden Widerstände;
E = elektrom. Kraft, P = Klemmspannung.

Bei der Serienmaschine ist $w_A + w_S$ der Maschinenwiderstand und die i sind alle gleich, bei der Nebenschlufsmaschine ist $i_A = i + i_N$.

Den Zusammenhang zwischen i und P für die drei Schaltungsarten zeigen die Kurven. Die gröfsten Stromstärken können übrigens wegen unzulässiger Erhitzung der Maschine nicht dauernd benutzt werden.

Technische Betriebe arbeiten meist auf konstante Spannung (an Glühlampen etc.), selten auf konstanten Strom. Um die Spannung konstant zu erhalten, dienen Regulirwiderstände, welche in Nebenschlufswickelungen oder neben Serienwickelungen geschaltet werden können, sowie nebengeschaltete „Pufferbatterien" aus Akkumulatoren.

I. Stromstärke.

Über die hier in Betracht kommenden direkten Strommesser vgl. **81**, **84**, **85**, **102**, **120** IV, über die Zuhilfenahme der Abzweigung **86** und über die für sehr grofse Stromstärken besonders in Betracht kommende Methode der Spannungsmessung an den Enden eines Starkstrom-Präcisionswiderstandes **101**.

Direkt mefsbar sind der Aufsenstrom und der Nebenschlufsstrom.

Den Maschinenströmen kommen im allgemeinen Schwankungen zu, deren Einflufs durch gute Dämpfung der Instrumente vermindert wird.

Um von mehreren Gröfsen (Strom, Spannung, Lichtstärke) zusammengehörige Werte zu erhalten, geschehen die Ablesungen gleichzeitig an Instrumenten, die sich rasch einstellen, mit Benutzung des Taktes des Motors und unter ev. Auslassen bei dem Aussetzen von Gasmotoren. — Vgl. auch **121**, V.

II. Widerstand.

Technisch sind hauptsächlich die betriebswarmen Widerstände von Bedeutung. Deren Messung (vgl. **90** bis **93** u. **101**) kann, mit Ausnahme des Ankerwiderstandes, während des Betriebes durch Messung von Stromstärke und Spannung nach **91** II 1 oder sicherer nach **91** II 3 mit Einschaltung eines Starkstrom-Präcisionswiderstandes geschehen.

Den Ankerwiderstand mifst man in derselben Weise sofort nach Aufhören des Betriebsstromes mit einem Strom von nahe gleicher Stärke aus Akkumulatoren. Während der Messung werden Magnet- und Ankerwicklung von einander getrennt oder der Anker festgekeilt. Unregelmäfsige Übergangswiderstände an den Bürsten eliminirt man durch Beobachtungen bei verschiedener Kollektorstellung. Die Bürsten sollen gut eingelaufen, der Kollektor frisch geschmirgelt sein.

Aus den Widerständen w_0 kalt und w warm berechnet sich die Temperaturerhöhung in Graden etwa $= 250 \cdot (w - w_0)/w_0$. Die Erhöhung soll bei Dauerbetrieb höchstens 40^0 erreichen.

III. Elektromotorische Kraft.

Direkt mefsbar nach **101, 102** ist die Spannung P zwischen den Klemmen, oder P_B zwischen den Bürsten der Maschine. Es gilt für Nebenschlufs-Maschine $P_B = P$,
Serien- und Verbund-M. mit kurzem Nebenschlufs $P_B = P + i\,w_S$.

Die gesamte el. Kraft E ist allgemein gleich der Bürstenspannung, vermehrt um den (kleinen) Spannungsverlust im Anker

$$E = P_B + i_A w_A.$$

Ferner gilt für die Serienmaschine $i_A = i$,
für Nebenschlufs- und Verbund-Maschine

$$i_A = i + i_N.$$

IV. Leistung oder Effekt.

Als Einheit dient das Watt = Volt × Ampere $= 10^7$[C-G-S]; vgl. Anh. 30.

Die äufsere, nutzbare Leistung ist $L = Pi$, die gesamte elektrische Leistung $= Ei_A$ oder $= Pi + V$, wo V die Summe der Verluste durch Stromwärme in der Anker- und Magnetwicklung bedeutet. Es gilt bei Nebenschlufsmaschinen

$V = i_N P + i_A^2 w_A$, bei Serien-M. $= i^2 (w_A + w_S)$; bei Verbund-M. entsteht ein aus diesen zusammengesetzter Ausdruck.

Über die Messung der Leistung vgl. auch **120** IV; über die Prüfung von Elektricitätszählern für Gleichstrom z. B. Feussner, Elt. ZS. 1900, 1035.

Elektrisches Güteverhältnis γ. So heifst das Verhältnis der äufseren zur gesamten elektr. Leistung. Es ist also

$$\gamma = \frac{L}{E i_A} = \frac{P i}{P i + V}.$$

Bei modernen Maschinen von	über 10,	von 5,	von 1 KW
beträgt γ	über 90,	knapp 90,	etwa 80 %.

V. Wirkungsgrad η.

So nennt man das Verhältnis der von der Maschine geleisteten äufseren elektrischen Arbeit zu der durch die Maschine verbrauchten mechanischen Arbeit L_0, beide in gleichem Mafse ausgedrückt; also

$$\eta = L/L_0 = P i / L_0.$$

1 Pferdestärke = 75 kg-Gew·meter/sec = 0,736 Kilowatt (rund $^3/_4$).

Moderne Maschinen von	100	10	2	1	0,1 K-W Leistung
haben etwa η =	über 90	85—90	80	70—75	60—70 %.

Elektrische Bestimmung des Arbeitsverbrauchs L_0. Aufser dem Verlust V durch Stromwärme (s. v. S.) wird eine Verlustsumme V' durch Reibung, Magnetisirungswiderstand (Hysterese) und „Wirbelströme“ im Eisen bewirkt und es ist

$$L_0 = P i + V + V'.$$

Zuerst belastet man die Maschine bei normaler Geschwindigkeit („Tachometer“; vgl. z. B. Kittler, Handbuch S. 474, Grawinkel-Strecker S. 164) mit vollem, oder halbem, viertel etc. Strom, mifst i_N und bestimmt Pi und V nach Nr. IV. Dann trennt man die Magnetwicklungen vom Anker und führt ihnen denselben Strom i_N von aufsen zu, wobei die Maschine nahe denselben Magnetismus erhält wie vorher. Nach Wegnahme des Treibriemens wird an die Bürsten von aufsen allmählich eine so hohe Spannung P' angelegt, dafs der Anker, nun als Motor leerlaufend, die vorige Geschwindigkeit bekommt. Dabei nehme er den Strom i' auf, so ist (von Riemendruck und Änderung der Anker-Rückwirkung abgesehen) $V' = i' P' - i'^2 w_A$, worin das zweite Glied meist zu vernachlässigen ist.

Damit ist L_0 gefunden und η berechenbar.

Beispiel. Eine Nebenschlufsmaschine gab bei 500 Dreh./min $P = 250$ V, $i = 212$ A, also $L = 53{,}0$ Kilowatt. Dabei war $i_N = 3{,}9$ A, also $i_A = 216$; ferner $w_A = 0{,}0662$ Θ. Hieraus findet sich der Verlust durch Stromwärme

$$V = 216^2 \cdot 0{,}0662 + 3{,}9 \cdot 250 = 3090 + 970 = 4060 \text{ Watt}$$

(also 7,7 % von L), so dafs das elektr. Güteverhältnis

$$\gamma = \frac{53{,}0}{53{,}0 + 4{,}06} = 0{,}929 \text{ gefunden ist.}$$

Als Motor leerlaufend mit 3,9 A im Nebenschlufs brauchte die Maschine, um auf 500 Dreh./min zu kommen, eine Bürstenspannung $P' = 252$ V, einen Ankerstrom $i' = 6{,}40$ A. Also ist

$$V' = 6{,}40 \cdot 252 - 6{,}4^2 \cdot 0{,}066 = 1610 \text{ Watt (d. h. } 3{,}0\,\% \text{ von } L)$$

und der Wirkungsgrad $\eta = \frac{53{,}0}{58{,}7} = 0{,}903$.

Mechanische Messung des Arbeitsverbrauchs L. Man multiplicirt die Umfangsgeschwindigkeit der Riemenscheibe der Dynamomaschine mit der Differenz der Spannungen des ablaufenden und des auflaufenden Riementeils. Multiplikation mit 9,81 verwandelt die Kg-Gew. m/sec in Watt. Zur Messung dient z. B. das Hefner'sche oder das Fischinger'sche Transmissions-Dynamometer.

120. Messungen an Wechselströmen.

Der Wechselstrom bedarf für die Begriffe Stromstärke und Spannung besonderer Definitionen. Auch die Messungen sind, erstens wegen der Veränderlichkeit des Zustandes überhaupt, zweitens aber auch im allgemeinen wegen der zu den stromerregenden Kräften hinzutretenden el. Kraft der Induktion (oder wegen einer Kapacität) besonders zu behandeln.

Die der Theorie am einfachsten zugängliche Form ist der Sinusvorgang, dargestellt durch $C \cdot \sin \frac{2\pi}{\tau} t$, wenn t die Zeit, τ die Dauer der Periode und C den Maximal- oder Scheitelwert einer Spannung (einer Stromstärke) bedeutet. Nennt man n die Periodenzahl oder ν die Wechselzahl in der Zeiteinheit, d. h. $n = 1/\tau$, oder $\nu = 2/\tau$, so kommt $C \cdot \sin 2\pi n t$ oder $C \cdot \sin \pi \nu t$. Wir wollen $2\pi n = \pi \nu = a$ bezeichnen und erhalten dann die Form $C \cdot \sin a t$.

Sinusspannungen liefert z. B. ein Stahlmagnet, der in einem engen, hinreichend langen Multiplikator rotirt. τ bedeutet dann seine Umlaufszeit. C hat in diesem Falle einen mit τ umgekehrt proportionalen Betrag, ist für ein bestimmtes τ also eine Konstante. Vgl. über einen Sinusinduktor F. K., Pogg. Ann. Jubelbd., 290. 1875. (Daselbst auch eine geometrische Darstellung der in II. gegebenen Ableitung mit Rücksicht auf eine Kapacität in der Leitung.)

Sehr schnelle sinusähnliche Schwingungen gibt ein Kranz aus Eisenstückchen auf der Peripherie eines Kreises, der rasch zwischen Magnet- oder Elektromagnetpolen rotirt, welche mit Induktionsspulen bewickelt sind. Verstärkt und zugleich von Obertönen gereinigt werden diese Schwingungen, wenn man zu den Induktionsspulen vom Selbst-Ind.-K. S eine solche Kondensatorkapacität c zuschaltet, dafs die dem Systeme eigene (Anh. 28) Schwingungszahl $(2\pi\sqrt{cS})^{-1}$ mit der des inducirten Stromes in Resonanz tritt. — Vgl. hierüber und über einen solchen, bis 17000 Schw./sec. reichenden Sinusinduktor M. Wien, Ann. d. Physik, 4, 425. 1901.

I. Stromstärke und Spannung.

Effektive (wirksame) Stromstärke i_e oder Spannung P_e, oder auch Stromstärke (Spannung) schlechthin. So heifst die Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwerte der Quadrate der Augenblicks-Stromstärken (Spannungen), welche durch ihre Beziehung zur Stromleistung eine besondere Bedeutung hat; vgl III. Also:

$$i_e = \left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i^2\,dt\right]^{1/2} \qquad P_e = \left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau P^2\,dt\right]^{1/2}. \qquad 1.$$

τ ist als Periodendauer (oder ein Vielfaches derselben) zu nehmen, könnte aber, einen symmetrischen Verlauf des positiven gegen den negativen Teil der Kurve vorausgesetzt, natürlich auch die Dauer der halben Periode oder endlich irgend einen grofsen Zeitraum bedeuten.

Für einen Sinusvorgang, wenn also i bez. $P = C \sin \frac{2\pi}{\tau} t$ ist, wird hieraus i_e bez. P_e gleich $C/\sqrt{2} = 0{,}707\,C$ gefunden.

Messung. Die Instrumente mit quadratischer Empfindlichkeit, Elektrodynamometer (84), Hitzdraht-Strommesser (85, 4), Elektrometer in Doppelschaltung (127, 128) geben, unabhängig von der Wechselzahl und der Gestalt der Spannungskurve, direkt die „effektiven“ Gröfsen. Strommesser mit weichem Eisen (85, 3) müssen für die verschiedenen Periodenzahlen geaicht werden; geeignete Formen des Eisens können jedoch die Differenz der Angaben für Gleich- und Wechselstrom bis zu Periodenzahlen von 50/sec auf 1 bis 2% vermindern.

Von geringerer Bedeutung sind die mittlere Stromstärke, d. h. der ohne Rücksicht auf die Richtung, sowie die elektrolytische Stromstärke, d. h. der mit Rücksicht auf die Richtung gebildete zeitliche Mittelwert der Augenblicksstromstärken. Die el.-lyt. Stromstärke wird von einem gewöhnlichen Galvanometer angegeben; sie ist bei den gebräuchlichen Maschinen mit symmetrischem positiven und negativen Stromverlauf gleich Null. Die mittlere Stromstärke ist wesentlich nur eine theoretisch abzuleitende Gröfse.

II. Scheinbarer Widerstand und Phasenverschiebung.

Für einen unverzweigten Leiter vom Ohm'schen Widerstande w und dem konstanten Selbstinduktionskoefficienten S (**117**; Anh. 28) mit sinusförmiger Endspannung von der Periodenzahl $n = 1/\tau$ ist, wenn wieder

$$2\pi/\tau \text{ oder } 2\pi n = a$$

gesetzt wird, die eff. Stromstärke i_e durch die eff. Spannung P_e gegeben als

$$i_e = \frac{P_e}{\sqrt{w^2 + a^2 S^2}}. \qquad 2.$$

$\sqrt{w^2 + a^2 S^2}$ oder $w\sqrt{1 + a^2 S^2/w^2}$ heifst scheinbarer Widerstand („Impedanz"; aS wird wohl „Induktanz" genannt).

Zugleich bleibt die Stromstärke zeitlich hinter der Spannung zurück. Der Betrag dieser Zeit im Verhältnis zur Dauer der Periode heifst die Phasenverschiebung. Indem man den periodischen Vorgang als einen Umlauf auf einem Kreise auffafst, kann man diese Verschiebung als einen Winkel ansehen, der sich zu 2π oder, wenn φ, wie gewöhnlich, in Bogengraden ausgedrückt wird, zu 360^0 verhält, wie die zeitliche Verschiebung zur Periodendauer. In diesem Sinne soll der „Phasenverschiebungswinkel" durch φ bezeichnet werden. Dann gilt

$$\frac{aS}{w} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{aS}{w}. \qquad 3.$$

Hiernach darf, wenn die Konstante E die Scheitelspannung darstellt, geschrieben werden

$$i = \frac{E\cos\varphi}{w}\sin(at - \varphi). \qquad 3a.$$

(Man wolle festhalten, dafs Konstanz des Selbst-I.-K. S vorausgesetzt wird, dafs die Betrachtungen sich also auf technische Maschinen und Stromkreise nur in den besonderen Fällen erstrecken, in denen trotz Magnetisirung von Eisen ein merklich konstanter Selbst-I.-K. erhalten bleibt, wie es z. B. bei Transformatoren häufig der Fall ist, wenn diese nämlich nur mäfsige Magnetisirungen benutzen.)

Ableitung. Die Spannung ist dargestellt durch $P = E\sin at$. Die el. Kraft der Selbstinduktion $-S\,di/dt$ summirt sich mit P, so dafs die Stromstärke i der Differentialgleichung unterliegt

$$wi = E\sin at - S\frac{di}{dt}. \qquad 4.$$

Der dieser Gleichung entsprechende periodische Vorgang ist

$$i = \frac{E}{w^2 + a^2 S^2}(w \sin at - a S \cos at), \qquad 5.$$

wie man durch Einsetzen von i und di/dt in Gl. 4 leicht beweist. Dies kann man umformen in

$$i = \frac{E}{\sqrt{w^2 + a^2 S^2}} \sin(at - \varphi), \quad \text{wenn } \operatorname{tg} \varphi = \frac{aS}{w}. \qquad 5a.$$

Dafs Gleich. 5 und 5a identisch sind, sieht man, wenn man die aus $\operatorname{tg} \varphi = aS/w$ folgenden Ausdrücke

$$\cos \varphi = w/\sqrt{w^2 + a^2 S^2} \quad \text{sowie} \quad \sin \varphi = aS/\sqrt{w^2 + a^2 S^2}$$

einsetzt in $\sin(at - \varphi) = \sin at \cos \varphi - \cos at \sin \varphi$.

Hieraus folgt: 1) Der Strom bleibt sinusförmig (er behält auch in der ganzen Leitung zur gleichen Zeit den gleichen Wert).

2) Als Widerstand ist nicht w einzusetzen, sondern der gröfsere Wert

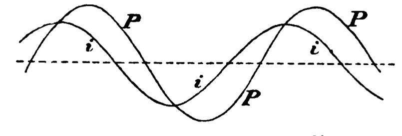
$$\sqrt{w^2 + a^2 S^2} \quad \text{oder auch } w/\cos \varphi.$$

Also verhält sich der scheinbare zum Ohm'schen Widerstand $= 1 : \cos \varphi$. 6.

3) Der Strom bleibt hinter der Spannung um die Zeit $\tau' = \varphi/a$ oder, da $a = 2\pi/\tau$ gesetzt wurde, um $\tau' = \tau \cdot \varphi/(2\pi)$ zurück. Also verhält sich $\varphi : 2\pi = \tau' : \tau$ oder, wenn φ in Bogengraden gemessen werden soll,

$$\varphi : 360 = \tau' : \tau.$$

Graphische Darstellung. Der zeitliche Verlauf von i und P werde durch die Höhe von Ordinaten dargestellt, wobei die Höhe für i so gewählt werden soll, dafs, wenn keine Selbstinduktion vorhanden wäre, die Kurven für i und P zusammenfallen. Durch Mitwirkung der Selbstinduktion entsteht dann nach Gl. 3a für i eine gegen P niedrigere und verschobene Kurve. Der zeitliche Vorgang wird mittels der Figur erhalten, wenn man ein Papier mit ausgeschnittenem schmalem vertikalem Spalt über die, einen Vorgang mit 45° Phasenverschiebung darstellende Zeichnung hält und diese von links nach rechts unter dem Spalt durchzieht. (Die Herstellung der Kurve für i wird dadurch erleichtert, dafs (vgl. Gl. 3) ihre Scheitelpunkte bei dieser Wahl der Ordinatenhöhe für i stets in der Kurve für P liegen.)



Über graph. Darstellungen, besonders mit Kreiskoordinaten vgl. Anh. 28; ausführliches in Bedell u. Crehore, Theorie d. Wechselströme, Dtsch. von Bucherer.

In ähnlicher Weise treten auch bei dem Vorhandensein von Kapacität in der Leitung Verschiebung und Gröfsenänderung ein. — Näheres, auch über den ähnlichen Einflufs eingeschalteter chemischer Zersetzungszellen z. B. in K. u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte S. 61 ff.

III. Stromleistung L und Stromarbeit.

a) In einem Leiter von der Endspannung P und der gleichzeitigen, nach der Richtung des Spannungsgefälles positiv ge-

rechneten, Stromstärke i beträgt **stets** die in dem Zeitelement dt verrichtete Stromarbeit $iP\,dt$ (Anh. 30). Die Arbeit während der Zeit τ beträgt also $\int_0^\tau iP\,dt$, die mittlere Leistung L wird demnach, wenn τ die Dauer der Periode ist, **allgemein** dargestellt durch

$$L = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau iP\,dt. \qquad 7.$$

b) **Induktionsfreier Leiter.** Hier wird einfach

$$L = i_e P_e. \qquad 7a.$$

Für Sinusvorgänge (vgl. oben) ist also $L = \frac{1}{2}JE$, wenn J und E die Scheitel-Stromstärke und Spannung bedeuten.

Denn induktionsfrei gilt $P = wi$, also nach Gl. 1 $P_e = \left[\frac{w^2}{\tau}\int_0^\tau i^2\,dt\right]^{1/2}$. Dies mit $i_e = \left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i^2\,dt\right]^{1/2}$ multiplicirt gibt $i_e P_e = \frac{w}{\tau}\int_0^\tau i^2 dt$. Denselben Wert aber erhält man durch Einsetzen von $P = wi$ in Gl. 7.

c) **Leiter mit Selbstinduktion, also mit Phasenverschiebung.** Ist φ der Phasenverschiebungswinkel, so gilt für Sinusvorgänge

$$L = i_e P_e \cdot \cos\varphi.$$

Beweis. Aus $P = E\sin(2\pi/\tau)t$ und $i = J\cdot\sin[(2\pi/\tau)t - \varphi]$ erhält man $L = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau iP\,dt = \frac{EJ}{\tau}\int_0^\tau \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \varphi\right)\sin\frac{2\pi}{\tau}t\,dt$

$$= \frac{EJ}{\tau}\cos\varphi\int_0^\tau \sin^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt - \frac{EJ}{\tau}\sin\varphi\int_0^\tau \cos\frac{2\pi}{\tau}t\sin\frac{2\pi}{\tau}t\,dt.$$

Das zweite Integral ist gleich $(\sin^2 2\pi - \sin^2 0)/4\pi$, also stets gleich Null. Nach Gl. 1 ist nun

$$J\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sin^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt\right]^{1/2} = i_e, \qquad E\left[\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sin^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt\right]^{1/2} = P_e;$$

das erste Glied in der Gleichung für L ist also $= i_e P_e \cdot \cos\varphi$, q. e. d. (Die Technik nennt $i_e \sin\varphi$ den „wattlosen Strom“ und $i_e\cos\varphi$ den „Wattstrom“.)

$\cos\varphi$ ist also der „**Leistungsfaktor**“, nämlich der Faktor, mit welchem multiplicirt die Leistung, die ohne Phasenverschiebung bestehen würde, die der Verschiebung φ entsprechende Leistung gibt.

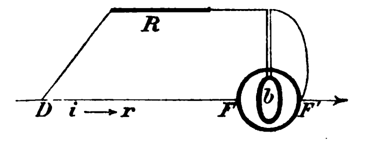
Auch für andere als sinusförmige Ströme und endlich auch, wenn Strom und Spannung wegen Anwesenheit von Eisen einen unähnlichen Verlauf haben, d. h. wenn die Phasendifferenz sich

nicht mehr als eine zeitliche Verschiebung definiren läfst, wird L in derselben Form geschrieben $L = i_e P_e \cdot \cos\varphi$. Der Faktor $\cos\varphi$ ist der, aus der einzelnen Messung von L, i_e und P_e sich ergebende Leistungsfaktor k (stets $\leqq 1$). — Auch in diesen Fällen nennt man $\operatorname{arc}\cos k$ die Phasenverschiebung.

IV. Messung der Leistung.

1. Mit dem Leistungs- oder Effektmesser.

Das Verfahren liefert die Leistung unabhängig von Phasenverschiebung. Die Aufgabe besteht darin, ein Instrument anzuwenden, welches eine Kraft etc. erfährt, die sowohl der Spannung wie der Stromstärke proportional ist. Dies leistet das Dynamometer (84): durch eine feste, dickdrähtige Rolle



(Widerstand $= r_f$) wird der Strom geleitet; die bewegliche, dünndrähtige Rolle (Widerstand $= r_b$), meist mit grofsem vorgeschaltetem induktionsfreiem Widerstande R, wird als „Spannungszweig" an den Nutzwiderstand r angelegt (Fig.). Der vorgeschaltete Widerstand R soll, damit die beiden Rollen keine zu grofsen Spannungsunterschiede bekommen, auf der Seite von D liegen.

Die Leistung L in dem Leitungsteile r einschl. r_f ist dem Skalenausschlage α proportional $L = A \cdot \alpha$. Die Instrumentkonstante A würde aus dem Reduktionsfaktor C des Dynamometers für Strommessung (84, 89) als $A = C^2(R + r_b)$ entstehen. Sie läfst sich auch direkt durch Anlegung des Effektmessers an einen bekannten Gleichstrom i vom Widerstande w einschl. r_f (also von der Leistung $i^2 w$) als $A = i^2 w/\alpha'$ ermitteln, wenn α' den hier erhaltenen Ausschlag bedeutet.

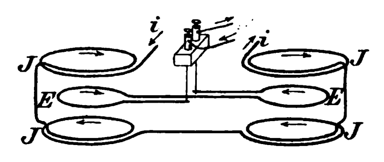
Korrektionen. a) Die als $r_f i_e^2$ zu berechnende kleine Leistung in der Stromspule ist von der ganzen gemessenen Leistung abzurechnen.

b) Wegen der Selbstinduktion in der Spannungsspule bleibt eine kleine Phasendifferenz δ zwischen Spannung DF' und Strom i_b, gegeben durch $\operatorname{tg}\delta = aS_b/(R + r_b)$, bei den üblichen Instrumenten zwischen 0,001 und 0,01. Deswegen sind die Angaben des Leistungsmessers, wenn zwischen Hauptstrom i und der Spannung die Ph.-Diff. φ' besteht, mit $(1 + \delta^2)/(1 + \delta \operatorname{tg}\varphi')$ zu multipliciren. Streng gilt dies nur für Sinusvorgänge, es bleibt aber bis auf kleine Beträge (z. B. von einigen Zehntausendteln) praktisch richtig.

H. F. Weber, Bericht über d. el. Ausstellung Frankfurt, II S. 43 ff.

Technische Leistungsmesser (Wattmeter).

Wattwage (Lord Kelvin). Die Figur stellt die Anordnung, eine Kombination zweier Rayleigh'scher Stromwagen (84 III) an einer Laufgewicht-Wage, schematisch dar. Alle Spulen liegen horizontal, die Spannungsspulen E, — in Wirklichkeit mit zahlreichen Windungen — auf einem Wagebalken, der, vermöge seiner Aufhängung an seinen Zuleitungen, weichen Kupferdrahtbändern, vertikal drehbar ist. Diese Spulen werden, um eine Einwirkung des Erdmagnetismus etc. auszuschliefsen, von dem Spannungsstrom entgegengerichtet durchflossen.



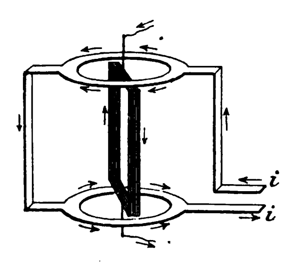
Die Stromrichtung in den vier Stromspulen J ist derart, dafs die eine Spannungsspule nach oben, die andere nach unten gezogen und gestofsen wird. Das hieraus resultirende Drehmoment ist der Stromleistung proportional; es wird durch eine — nicht gezeichnete — Reiterverschiebung auf einer Skale gemessen, deren Einteilung gleich die Leistung angibt.

Die Stromspulen haben an Instrumenten für grofse Leistung wenig Windungen und umgekehrt.

Würden die Spannungsspulen anstatt nebengeschaltet, hintergeschaltet sein, so dafs der ganze Strom auch sie durchflösse, so würde das Instrument als gewöhnliche elektrodynamische Stromwage wirken (84 III). Die zusammengesetzte Wage (composite Balance) ist mit einem Kommutator für beide Gebrauchsarten eingerichtet.

Über verschiedene Ausführungen desselben Grundgedankens vgl. den Katalog von J. White, Glasgow.

Leistungsmesser von Raps (Siemens u. Halske). Der Hauptstromleiter verzweigt sich (Fig.) durch zwei übereinanderliegende Paare von halbkreisförmigen Bahnen. Zwischen diesen hängt die Spannungsspule, deren Stromwindungen sich in die Richtung des Hauptstroms zu drehen suchen. Das daraus entstehende Drehmoment ist vermöge der Halbkreisform auf einer grofsen Strecke nahe konstant, so dafs für die Leistung eine fast gleichmäfsige Skalenteilung resultirt. Die Stromzufuhr zur Spannungsspule und ihre Aufhängung geschehen wie bei den Weston-Galvanometern (85, 2). Ein, in einem kreisförmig gebogenen Luftcylinder sich bewegender Kolben gibt die Dämpfung.



Der Hauptstromleiter besteht aus isolirten Blechen, die je nach dem beabsichtigten Mefsbereich des Instrumentes verschieden hinter oder nebeneinander geschaltet sind, auch an demselben Instrument durch Stöpsel in zwei Schaltungen gebraucht werden können.

Raps, Elt. ZS. 20, 665. 1899.

Als weitere Leistungs- oder Wattmesser mögen genannt werden die, für technische Zwecke geeignete Ausführung des Siemens'schen Torsionsdynamometers (**84** II) von Ganz u. Co.; der L.-M. von Hartmann u. Braun, bei welchem eine geeignet gestaltete, durch eine Torsionsfeder mit einer Direktionskraft versehene, drehbare Spannungsspule in Stromspulen hineingezogen wird; die Instrumente von Weston oder der Allg. El.-Gesellschaft.

Als Fehlerquelle ist bei sehr dicken Leitungen der Stromspulen und raschem Stromwechsel hauptsächlich das durch die Selbstinduktion bewirkte Herausdrängen der Ströme aus den inneren Leitungsteilen zu beachten. Man setzt deswegen die Leiter aus besponnenen Drähten oder aus Lamellen zusammen, die gegeneinander isolirt sind, etwa durch mit Lack getränktes Japanpapier.

Über die Anwendung elektrometrischer Methoden auf die Messung von Stromleistungen vgl. **130** IV.

2. Durch Messung von Strom und Spannung; s. I u. III.

a) In einer induktionsfreien Leitung (Glühlampen) ist $L = i_e P_e$. Vgl. auch c.

b) Mit Selbstinduktion kommt der Faktor $\cos\varphi$ hinzu (vgl. IIIc), also ist, wenn die Leistung aus Strom und Spannung ermittelt werden soll, aufserdem die Verschiebung φ zu bestimmen; vgl. **121** V. Umgekehrt liefert die direkte Messung von L mit dem Leistungsmesser (IV, 1) und gleichzeitig von i_e und P_e den Leistungsfaktor $k = L/(i_e P_e)$, also auch die Phasendifferenz $\varphi = \operatorname{arc}\cos k$.

c) Ist in der Leitung kein Eisen (keine Hysteresis) und auch keine fremde el. Kraft (z. B. Polarisation in Zersetzungszellen) oder Wirbelstrom vorhanden, so findet nur Energieumsatz in Joule'sche Wärme des Nutzwiderstandes r statt, dann ist L also, auch wenn Selbstinduktion besteht, durch Stromstärke und Widerstand gegeben: $L = i_e^2 r$.

Über die Prüfung von Elektricitätszählern für Wechselstrom s. z. B. Orlich, Elt. ZS. 1901, 94.

V. Bestimmung der Periodenzahl.

Hierzu dienen u. a. die Messung des scheinbaren Widerstandes (II) einer Rolle mit Selbstinduktion, durch die der Strom oder ein Teil desselben geleitet wird; ferner Methoden, die der Bestimmung einer Tonhöhe (**57**) analog sind, insbesondere in der Form, dafs ein Draht oder eine Feder aus Eisen, deren Schwingungsdauer durch Verkürzen etc. geändert werden kann,

vor einem Elektromagnetpol auf maximales Mitschwingen abgestimmt oder stroboskopisch beobachtet wird (57, 3 u. 5), oder dafs chemisch präparirtes Papier, welches durch den Strom gefärbt wird, sich unter einem Stromkontakt und einer schreibenden Stimmgabel fortbewegt (Janet; vgl. 57, 1). Auch das phonische Rad ist anwendbar (57, 7).

Schnell wechselnde Zustände kann man mittels einer fortbewegten Spitze auf einen Harzkuchen übertragen und durch nachherige Lichtenberg'sche Bestäubung sichtbar machen.

W. König, Wied. Ann. 67, 533. 1899; vgl. auch v. Bezold, Pogg. Ann. 140, 145. 1870.

Die Periodenzahl des Stromes einer Wechselstrommaschine ergibt sich als Umlaufzahl, multiplicirt mit der aus der Konstruktion ersichtlichen Periodenzahl eines Umlaufs.

Eine Literaturzusammenstellung z. B. bei Kempf-Hartmann, Elt. ZS. 1901, S. 9.

Über die Aufnahme von Stromkurven vgl. auch 121, V.

121. Wechselstrom-Dynamomaschinen.

Die Wechselstrom-Maschine gestattet, bei ruhenden Ankerspulen und umlaufendem System der durch Gleichstrom erregten Feldmagnete, direkt hohe Spannungen bis 20000 und mehr V zu erzeugen, was für Fernübertragung elektrischer Leistung wichtig ist. Denn hier werden geringe Stromstärken gefordert, da sonst entweder die Kupferquerschnitte der Leitungen oder die Spannungsverluste zu grofs werden. Ferner kann die Spannung von Wechselströmen durch Apparate ohne bewegliche Teile (Transformatoren, 122), die also keiner Schmierung und Wartung bedürfen, in fast beliebigem Verhältnis, mit wenigen Procenten Verlust, den Gebrauchszwecken entsprechend umgesetzt werden.

Gleichstrom von sehr hoher Spannung läfst sich wegen des Kollektors nicht herstellen, und aufserdem erfordert seine Transformirung auf andere Spannungen laufende Maschinen und daher Wartung.

Zur Fernübertragung von Starkstromleistungen eignet sich daher nur der Wechselstrom.

Man unterscheidet Ein- und Mehrphasenmaschinen, die letzteren entweder 2phasig, d. h. mit zwei um $\frac{1}{4}$ Periode (90°), oder meist 3phasig, d. h. mit drei um je $\frac{1}{3}$ Periode (120°) gegeneinander verschobenen Strömen. Mehrphasenströme sind mittels Drehfeldes unmittelbar zum Motorenbetrieb anwendbar. — Die in Deutschland gebräuchlichen Periodenzahlen/sec liegen zwischen 45 und 55.

I. Über die Messung von Stromstärken und über den Widerstand vgl. 120, I u. II.

II. Effektive elektromotorische Kraft E_e. Über Messung der Klemmspannung P_e s. **120**, I. — Die ganze el. Kraft wird aus P_e, dem Spannungsverlust im Anker $v_e = i_e\sqrt{w_A^2 + a^2 S_A^2}$, der inneren Verzögerung φ_A der augenblicklichen Stromstärke gegen den Spannungsverlust (gegeben durch $\operatorname{tg}\varphi_A = aS_A/w_A$) und der äufseren Verzögerung φ von i gegen P (vgl. **120**, II) nach der Beziehung gefunden

$$E_e^2 = P_e^2 + v_e^2 + 2 P_e v_e \cos(\varphi_A - \varphi).$$

Die Formel setzt die Sinusströme voraus.

III. Leistung. Über die Messung s. **120** IV. Die ganze äufsere Leistung wird gemessen, indem man in Fig. S. 493 die Punkte D und F' als Maschinenpole ansieht. Die kleine Leistung $P_e^2/(R+r_b)$ in der Spannungsspule addirt man zu der gemessenen Stromleistung.

IV. Der Wirkungsgrad einer Wechselstrommaschine ergibt sich auf analogem, elektrischem Wege wie bei der Gleichstrommaschine unter **119**, V, aber weniger einfach und unsicherer im Resultat.

V. Bestimmung der Spannungs- oder Stromkurve.

a) Augenblickskontakt. Mit der Welle der Maschine läuft eine Scheibe (Joubert'sche Scheibe) um, deren Peripherie einen leitenden Kontakt mit sich führt. Dieser sei z. B. mit dem einen Maschinenpol dauernd verbunden, so dafs er stets die augenblickliche Spannung dieses Pols hat. Eine verstellbare Feder berührt den Kontakt bei jedem Umlauf in einer durch ihre Stellung bestimmten Phase des Umlaufs.

Mit der Feder und andrerseits dem zweiten Maschinenpol steht ein Elektrometer oder ein Galvanometer in Verbindung. Dem Mefsinstrument ist ein Kondensator geeigneter Gröfse parallel zu schalten.

Der Ausschlag zeigt die Spannung an dem gewählten Punkte der Periode an. Die ganze Spannungskurve konstruirt man aus einer hinreichenden Anzahl solcher Bestimmungen.

Die Stromkurve wird erhalten, wenn die beschriebene Kontaktleitung an einen induktionsfreien Teil der Stromleitung von bekanntem Widerstande angelegt ist. Der Vergleich der bei einem bestimmten Vorgange gleichzeitig aufgenommenen Spannungs- und Stromkurve gibt, wenn die Kurven ähnlich sind, die Phasenverschiebung (**120**, II).

Über einen hierauf beruhenden Kurvenindikator, welcher die Ausschläge des Galvanometers etc. auf einen Cylinder zu projiciren und nachzuzeichnen gestattet, der mit der Kontaktfeder gleichzeitig um denselben Winkel verstellt wird, s. R. Franke, Elt. ZS. 1899, 802; ZS. f. Instr. 1901, 11

b) Oscillograph, Rheograph. Mittels eines Galvanometerspiegels von momentaner Folgsamkeit (Blondel: gedämpfte Schwingungen bis 50000/sec; Abraham: Kompensation der Trägheit durch Induktion) wird der augenblickliche Stromzustand ohne merklichen Zeitverlust wiedergegeben. Der zeichnende Lichtstrahl erhält durch einen oscillirenden Spiegel oder mittels eines vor einem vertikalen Glühlampenfaden bewegten Horizontalspaltes zugleich eine Vertikalschwingung; die Kurve wird hierdurch zusammenhängend sichtbar gemacht. Blondel 1893. 1899; Abraham 1897. Darstellung und Literatur bei Blondel, Rapports du Congrès internat., III, 264. 1900. — Vgl. auch Feufsner, Elt. ZS. 1901, 207.

c) Zerlegung nach der Fourier'schen Reihe. Analytisch drückt man den periodischen Stromvorgang i von der Hauptperiode $\tau = 2\pi/a$ aus durch

$$i = J_1 \sin(at + \varphi_1) + J_2 \sin(2at + \varphi_2) + J_3 \sin(3at + \varphi_3) + \cdots.$$

Die Konstanten J und φ der Reihe lassen sich mit dem Dynamometer bestimmen, wenn die eine Rolle von dem zu analysirenden Strom, die andere von Sinusströmen der Periode τ bez. $\tau/2$, $\tau/3$ etc. durchflossen wird. Vgl. hierüber Des Coudres, Elt. ZS. 1900, 753 u. 771.

d) Die chemische Bestimmung der Periodendauer (120 V) läfst mittels nebeneinanderliegender Aufnahmen der Spannung und des Stroms die Phasenverschiebung bestimmen. Janet, Blondel, C. R. 1894.

e) Abgelenkte Kathodenstrahlen (Braun'sche Röhre). Vgl. 124 I. Die Strahlen treffen, durch ein Diaphragma eingeschnürt, einen der Kathode im Rohre gegenüberliegenden fluorescirenden Schirm. Der zu untersuchende Strom durchfliefst eine neben dem Diaphragma angebrachte kleine elektromagnetische „Indikatorspule" und lenkt dadurch den Lichtfleck ab. Im rotirenden Spiegel (29a) kann man die durch Wechselströme entstehenden Schwingungen beobachten. Wied. Ann. 60, 552. 1897.

Indem man mittels eines neben dem Diaphragma rotirenden Magnetes dem Fleck gleichzeitig in einer zur obigen senkrechten Richtung eine Sinusbewegung von gleichem oder ganzzahlig vermehrtem oder vermindertem Takt erteilt, erscheinen Lissajous'sche Figuren.

Zwei senkrecht zu einander gestellte Ind.-Spulen endlich erzeugen (ähnlich wie zwei gekreuzte Stimmgabeln nach Lissajous) Kurven, die bei gleicher Stromphase geradlinig, bei Phasenverschiebung elliptisch verlaufen.

122. Transformatoren.

Der Transformator setzt eine Wechselstrom-Leistung von hoher in Leistung von niederer Spannung um oder umgekehrt. Das Mittel hierzu ist die Wechsel-Induktion zwischen Spulen verschiedener Windungszahl, für technische Zwecke meist verstärkt durch gleichzeitige Magnetisirung lamellaren Eisens. Alte Formen von Transformatoren sind der Neeff'sche Hammer und das Rühmkorff'sche Induktorium. Die modernen, eisengeschlossenen Transf. besitzen einen vielmal höheren Wirkungsgrad; vgl. III.

Gebräuchliche Formen z. B. in Grawinkel-Strecker, S. 336, 345. 1900.

I. Inducirte elektromotorische Kraft.

Es seien w_1, w_2 die Ohm'schen Widerstände, p_1, p_2 und i_1, i_2 die effektiven Klemmspannungen und Stromstärken (d. h. die in **120**, I mit P_e und i_e bezeichneten Gröſsen) in beiden Wicklungen, L_1 die den Primärklemmen zu-, L_2 die von den Sekundärklemmen abgeführte Leistung (**120** III u. IV), e_1, e_2 die zusammen durch die Oscillationen des Magnetismus und der Ströme durch gegenseitige und Selbstinduktion primär und sekundär inducirten (effektiven) el. Kräfte. Für moderne Transformatoren mit geringen Verlusten sind e und p nahe gleich, und es gilt für ihre kleinen Unterschiede von der Stromform unabhängig sehr nahe die Beziehung

$$p_1 - e_1 = \frac{w_1 L_1}{p_1}; \quad e_2 - p_2 = \frac{w_2 L_2}{p_2}.$$

Danach lassen sich e_1 und e_2 bestimmen, da die übrigen Gröſsen, z. B. p und L nach **120** I u. IV zu messen sind.

II. Übersetzungsverhältnis p_2/p_1.

p_2/p_1 ist nahe gleich e_2/e_1 und dies sehr nahe gleich dem Verhältnis der Windungszahlen. Zwei auf einander reducirte Wechselstromspannungsmesser (**120** I), der für die Hochspannung mit geeignet gröſserem, induktionsfreiem Vorschaltwiderstande, dienen zur Messung.

Bei konstantem p_1 nimmt p_2 vom Leerlauf bis zur Vollbelastung (vgl. die obige Formel) nur sehr wenig ab, z. B. bei Transformatoren für mehr als 2 Kilowatt Leistung um 2 bis 3%.

III. Wirkungsgrad L_2/L_1.

Wegen des Energieverlustes durch Hysterese bei der Magnetisirung, durch die in den zusammenhängenden Metallmassen inducirten Wirbelströme und endlich durch die Stromwärme ist L_2 stets kleiner als L_1. Das Verhältnis L_2/L_1 wird, ähnlich wie unter **119** V angegeben, folgendermaſsen durch eine Verlustbestimmung ermittelt.

Mit der, durch die Konstruktion des Transformators bedingten normalen Leistung L_2 wird die mit dem Effektmesser bestimmte Leistung l' verglichen, welche in die Primärwicklung bei normalem p_1 und offenem Sekundärkreise hineinflieſst. Indem man bei diesem Leerlaufversuch die Spannung p_1 ebenso

hoch hält, wie bei dem Normalbetrieb (schärfer ist das wenig verschiedene e_1 an der Hand der unter I gegebenen Formeln konstant zu halten), so ist die Magnetisirung in beiden Fällen dieselbe, also auch der Hysteresis- und Wirbelstromverlust V'. l' liefert, ev. um das sehr kleine $w_1 i_1'^2$ vermindert, dieses V'. Dazu kommt das für die Ströme bei Normalbetrieb zu ermittelnde $V = i_1^2 w_1 + i_2^2 w_2$ (vgl. **119** V).

Der gesamte aus diesen vier Gröfsen bestehende Transformatorenverlust beträgt bei modernen Apparaten

für eine Leistung	$>$ 20	von 5	von 1 Kilowatt
kleiner als	3 %,	etwa 5 %,	etwa 8 %.

Der durch die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Stromstärke bestimmte Leistungsfaktor der in die Primärwicklung eingeführten Energie (vgl. **120** III c) ist bei Vollbelastung kaum von 1 verschieden, da alsdann diese Phasenverschiebung sehr klein ist. Er sinkt mit Abnahme der Belastung zunächst langsam, dann schneller bis auf etwa 0,6 bei Leerlauf (für die jetzt gebrauchten eisengeschlossenen Typen).

IV. Phasenverschiebung φ. Gemessen seien die (effektive) Klemmspannung p, Stromstärke i und Leistung L. Die Phasenverschiebung ist gegeben durch $\cos\varphi = L/(pi)$; vgl. **120** III c.

Die Phasen von Primär- und Sekundärstrom sind bei Vollbelastung für einen modernen Transformator, auf gleiche Richtung im Raum bezogen, fast genau entgegengesetzt.

Vgl. z. B. Feldmann oder Kapp, Wechselstrom-Transformatoren.

123. Elektrische Lampen.

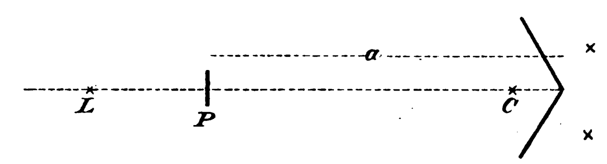
Photometrie elektrischer Lampen. Räumliche Lichtverteilung. Vgl. 72.

Die mittlere räumliche Lichtstärke in einem abgegrenzten Kegel ist gleich dem Lichtstrom in diesem, geteilt durch seinen Öffnungswinkel, also durch 4π, wenn die ganze Lichtmenge gegeben ist. Zur Ermittelung gehört das Photometriren nach einer ausreichenden Anzahl von Richtungen. Man zerlegt z. B. eine um die Lampe gedachte Kugelfläche in Zonen gleichen Flächenraums und diese durch Meridiane in gleiche Teile. Man mifst in der Richtung nach den Mitten dieser Teile hin und nimmt das Mittel. Glühlampen werden hierbei auf einem Gestell mit horizontaler und vertikaler Drehaxe mit Teilkreisen montirt.

Eine eingehende Darstellung und die Anwendung eines rotirenden Spiegels sowie die an mehreren Typen von Glühlampen gefundene Lichtverteilung siehe bei Liebenthal, ZS. f. Instr. 1899, 193 u. 225.

In der Praxis ist es gebräuchlich, die horizontalen Lichtstärken von Glühlampen nach drei um je 120° auseinanderliegenden Richtungen zu messen, von denen die eine senkrecht zur Verbindungslinie der Enden des Kohlefadens liegt, und zwar mit Hilfe von Spiegelung gleich das Mittel aus den drei Lichtstärken herzustellen.

Glühlampen. Zwei Spiegel sind um 120° gegeneinander geneigt. In einem festen Punkte C ihrer Mittellinie (90 mm vor der Kante) wechselt man die zu messende Lampe mit einer Normallampe aus und photometrirt beide einschliefslich ihrer Spiegelbilder aus einem grofsen Abstande gegen ein konstantes Hilfslicht L. Der Abstand a vom Photometer P wird dabei von der Kante des Winkelspiegels gezählt, in welcher der Schwerpunkt der drei Lichter liegt; Fig. Vgl. Liebenthal l. c.



Dieses Verfahren, bei dem streng noch der Schwächungskoefficient der Spiegel (etwa 0,93 an guter Versilberung) in Rechnung gezogen werden müfste, genügt praktischen Zwecken. Es ist dabei gebräuchlich, die Öffnung des Kohlefadens senkrecht zur Mittellinie zu stellen. Die Gröfse der aus der Spiegelschwächung entspringenden Fehler kann dadurch ermittelt werden, dafs man die Lampe um ihre Axe dreht.

Bogenlampen lassen sich nicht wohl unmittelbar mit der Hefnerlampe vergleichen. Als Zwischenglied dient z. B. eine hochkerzige Glühlampe. Vgl. S. 304. Bei Messungen nach verschiedenen Richtungen, wofür ein Handregulator am geeignetsten ist, benutzt man wohl einen um 45° gegen die Photometerbank geneigten, um eine der Bank parallele Axe drehbaren Spiegel; die Abschwächung bei der Reflexion für den Spiegel wird ein für allemal besonders bestimmt. Direkter ist die Anwendung eines in beliebiger Richtung einstellbaren Photometers, z. B. des Weber'schen mit dem Lummer-Brodhun'schen Würfel (72, 6).

Die vollständige Untersuchung elektrischer Lampen besteht in gleichzeitiger Messung der Lichtstärke und des Energieverbrauchs, der bei Gleichstrom als Spannung × Stromstärke,

bei Wechselstrom durch die in **120** IV behandelte Leistung bestimmt wird. Aufserdem kann die Untersuchung die Haltbarkeit betreffen.

Je höher die Temperatur der Glühlampenfaser, um so geringer ist der Energieverbrauch pro Lichteinheit, um so geringer aber auch die Lebensdauer der Lampe. Die normale Spannung, bez. seltener Stromstärke mufs daher sehr nahe innegehalten werden. 1 % Änderung der Spannung bewirkt 6 bis 7 % Änderung der Lichtstärke.

Vgl. z. B. Krüss, die el. Photometrie; Grawinkel-Strecker, Hilfsbuch 6. Aufl. S. 220.

124. Messungen an Geissler'schen Röhren (1864); Kathodenstrahlen (Hittorf 1869).

I. Experimentelles.

Bei konstant bleibender Oberfläche der Kathode wächst die Länge der Kathodenstrahlen mit zunehmender Spannung und abnehmender Gasdichte, und zwar besonders rasch, wenn der Gasdruck unter etwa 0,1 mm gesunken ist. Die Strahlen stehen senkrecht auf den Oberflächenteilen der Kathode, gleichgiltig wo sich die Anode befindet, und bleiben bei der Ausbreitung im Vakuum merklich geradlinig (Hittorf). Werden die K.-Str., wegen ihrer mit zunehmender Verdünnung zunehmenden Lichtschwäche, selbst schwer sichtbar, so wird ihr Querschnitt da, wo sie die Glaswand treffen, an der mit der Verdünnung wachsenden Fluorescenz (und Erregung von Röntgenstrahlen) bemerklich und wird an dem grünen Leuchten der Wand deutlich erkannt. — Abgegrenzte Bündel erhält man durch Diaphragmen, die in den Weg eingeschoben sind.

Vgl. über das vorige Hittorf, Pogg. Ann. 136, 1 u. 197. 1869. H. gebraucht die Bezeichnung „die Strahlen des negativen Lichts oder Glimmlichts". Die Bezeichnung „Kathodenstrahlen" stammt von Goldstein.

Zu Messungen ist der intermittirende Strom des Induktoriums wenig geeignet. Konstante, durch ein eingeschaltetes Telephon auf Gleichmäfsigkeit zu prüfende Ströme liefert eine Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie oder, bei kleiner Stromstärke, eine Influenzmaschine (**80** II). Die Stärke des Batteriestromes regulirt man mittels verschiebbarer Elektroden in einer vorgeschalteten Röhre mit einem Elektrolyt, häufig 10prozentiger Jodcadmiumlösung in Amylalkohol (Hittorf).

1. Gefälle der Spannung (Potentialgradient) dV/dx.

Der Spannungsverbrauch verteilt sich zwischen den Elektroden auf den einzelnen, durch ihr Aussehen charakterisirten Strecken sehr ungleichmäfsig und ferner je nach dem Gasdruck ganz verschieden. Der Gradient ist klein innerhalb des „Faraday'schen" dunkelen Raumes, der

positives von negativem Licht trennt, und in der dritten Schicht des die Kathode umgebenden (Goldstein) negativen Glimmlichts; von mittlerer, und zwar im Zusammenhang mit der Lichtstärke ungleich verteilter Gröſse innerhalb des positiven Lichts; ziemlich beträchtlich an der Anode selbst. Unmittelbar an der Kathode ist der Gradient am gröſsten.

Die Spannung zwischen der Kathode und der äuſseren Grenze des negativen Glimmlichts heiſst Kathodengefälle, und zwar normales K.-G., solange die Kathode noch nicht ganz mit Glimmlicht bedeckt ist. Das normale K.-G. wird, von Gasdruck und Stromstärke ziemlich unabhängig, wesentlich durch das Metall der K. und das Gas bestimmt (z. B. PtN 232; PtH 300; MgN 207; MgH 168 V). Verunreinigung mit O erhöht das Gefälle erheblich. — Warburg, Wied. Ann. 31, 545. 1887; 40, 1. 1890.

Man miſst das Gefälle elektrometrisch zwischen Platindrähten, die in das Rohr eingeschmolzen sind, oder mit einer verschiebbaren Doppelsonde, d. h. den Ausläufern zweier mit Seide und Paraffin gut von einander isolirter Drähte, die durch eine absperrende Quecksilbersäule von Barometerhöhe hindurch in die Geissler'sche Röhre eingeführt sind.

Näheres z. B. bei W. P. Graham, Wied. Ann. 64, 49. 1898.

2. Die Stromstärke kann in gewöhnlicher Weise galvanometrisch gemessen werden. Von intermittirenden Strömen lässt sich naturgemäſs nur ein zeitlicher Mittelwert bestimmen.

3. Ablenkung im Magnetfelde (Hittorf l. c.).

K.-Str. krümmen sich im transversalen Magnetfelde in einer zur Feldrichtnng senkrechten Ebene im Sinne des Biot-Savart'schen Gesetzes. Die Krümmung wird durch Projektion der Gestalt auf eine hintergestellte Zeichnungsebene oder durch Photographie von der Seite ermittelt, z. B. in der J. J. Thomson'schen Anordnung. Das Magnetfeld wird etwa durch zwei, vorn und hinten aufgestellte Stromspulen erzeugt.

Die Ablenkung ist in verschiedenen Gasen von gleicher Gröſse gefunden worden, wenn die Spannung zwischen den Elektroden gleich groſs war (Kaufmann).

Vgl. J. J. Thomson, Entladung der Elektricität durch Gase; deutsch von Ewers, S. 104. 1900.

4. Einfluſs eines elektrischen Feldes.

Die Feldrichtung sei wieder senkrecht auf der ursprünglichen Richtung der K.-Str. Die letzteren krümmen sich jetzt

der positiven Richtung der Kraftlinien entgegen (J. J. Thomson). Da das Gas dadurch, dafs eine Entladung hindurchgeht, selbst ein beträchtliches Leitvermögen erhält, so darf die Feldstärke nicht ohne weiteres aus der geometrischen Anordnung berechnet werden. Nur in sehr grofser Verdünnung oder bei Wechselfeldern kann die Rechnung zutreffen.

In einem den K.-Str. gleichgerichteten Felde wird ihre Geschwindigkeit, je nach dem Vorzeichen des Feldes, vergröfsert oder verkleinert (Des Coudres, Kaufmann, Lenard).

5. Energie der K.-Str.

Diese ist einerseits mittels einer Thermosäule oder auch mittels eines Flächenbolometers (**43** u. **72a**) untersucht worden, deren Ausschlag als Funktion der zugestrahlten Wärme empirisch bestimmt wurde. Andrerseits kann man die Energie pro Zeiteinheit auch aus der Stärke i des Stromes, der durch die auffangende Fläche geht, und der Spannung V der Kathode gegen die letztere als iV zu berechnen versuchen.

Vgl. z. B. J. J. Thomson, Ph. Mag. (5) 44, 293. 1897; Cady, Ann. d. Physik 1, 678. 1900. An letzterem Orte besonders auch einige Vorsichtsmafsregeln und Einwände.

II. Zur Theorie der Kathodenstrahlen.

In der Annahme, dafs die K.-Str. aus Massenelementen bestehen, die mit neg. El. geladen die Kathode verlassen („Emissionstheorie" — Crookes, Schuster, Wiechert, J. J. Thomson), sind aus der Ablenkung im Magnetfelde einerseits und einer der übrigen Messungen andrerseits die folgenden Schlüsse auf die Geschwindigkeit u, die Masse m und die elektrische Ladung ε der Teilchen gezogen worden.

1. Aus der Krümmung im Magnetfelde H.

Die durch ein transversales magn. Feld H senkrecht zur Feld- und Bewegungsrichtung ausgeübte el.-magn. Kraft ist $H \cdot u\varepsilon$. Hieraus entsteht eine Bahn von einem solchen Krümmungshalbmesser r, dafs die Centrifugalkraft $mu^2/r = Hu\varepsilon$ ist. Daraus folgt

$$\frac{mu}{\varepsilon} = rH. \qquad 1.$$

Die Bahn würde kreisförmig sein.

2. Aus der Krümmung im elektrischen Felde F.

Ein senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung stehendes elektrisches Feld (Anh. 14b) lenkt in der Zeit t aus dieser Richtung senk-

recht ab um $y = \frac{1}{2} t^2 \cdot F \varepsilon / m$. Ohne die Ablenkung wäre das Teilchen geradlinig vorgeschritten um $x = ut$. Also stellt $y = \frac{1}{2} F \frac{\varepsilon}{m u^2} x^2$ die Gleichung der parabolischen Bahnkurve in den rechtw. Koordinaten x und y dar. Sind x und y gemessen, so ist also (vgl. indessen die Bemerkung zu I 4)

$$\frac{m u^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} F \frac{x^2}{y}. \qquad 2.$$

3. Aus dem Potentialgefälle.

Ist V_0 bez. V_1 das Potential an der Kathode bez. am Beobachtungsorte, so wird $\frac{1}{2} m u^2 = (V_1 - V_0) \varepsilon$, also

$$\frac{m u^2}{\varepsilon} = 2(V_1 - V_0). \qquad 3.$$

Der Potentialabfall $(V_1 - V_0)$ liegt gröfstenteils in der Nähe der Kathode.

4. Aus der Wärme-Entwickelung der K.-Str.

Durch Umsetzung der Bew.-Energie $\frac{1}{2} m u^2$ in Wärme entsteht die Wärmemenge $\frac{1}{2} m u^2 / A$, wenn A das mech. Wärmeäquivalent ist. n sei die Anzahl der in der Zeiteinheit von dem Kalorimeter (z. B. von der Fläche der Thermosäule, aufgenommenen Teilchen, d. h. der aufgenommene Teil des Stromes ist $i = n \varepsilon / t$, so dafs $n = it / \varepsilon$ gefunden wird. Also beträgt die in der Zeit t entwickelte Wärmemenge $Q = \frac{1}{2} n m u^2 / A = \frac{1}{2} i t m u^2 / (A \varepsilon)$ und es ist also

$$\frac{m u^2}{\varepsilon} = 2 A \frac{Q}{it}. \qquad 4.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dafs von dem Teil der Kathodenstrahlen, welcher erfahrungsmäfsig reflektirt wird [Goldstein; vgl. besonders Starke, Wied. Ann. 66, 49. 1898 u. Ann. d. Phys. 3, 75. 1900], keine Energie an das reflektirende Kalorimeter abgegeben werden würde. Vgl. indessen z. B. Cady, l. c. und Gehrcke, Berl. Sitz.-Ber. 1901, 461.

Alle Gröfsen sind z. B. in einem zusammenhängenden C.G.S-System zu messen.

5. Berechnung von m/ε und u.

Bei einem Versuch sei aus der Gl. 1 $m u / \varepsilon = a$ gefunden, aus einer der Bestimmungen bezw. Gl. 2 bis 4 $m u^2 / \varepsilon = b$, dann kann man die Geschwindigkeit u und m/ε einzeln ausrechnen, nämlich

$$u = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \frac{m}{\varepsilon} = \frac{a^2}{b}. \qquad 5.$$

Aus der umfangreichen neueren Literatur, besonders seit der Mitte der 90er Jahre, s. u. a. die Arbeiten von Aschkinafs, Cady, Capstick, Des Coudres, Ebert, Gehrcke, Goldstein, Graham, Herz, Heuse, Jaumann, Kaufmann, Lenard, Perrin, Riecke, A. Schuster, Simon, Starke, Strutt, J. J. Thomson, Warburg, Wiechert, E. Wiedemann, W. Wien, Wood. — Weitere Citate bei J. J. Thomson l. c.

125. Elektrische Wellen (Hertz).

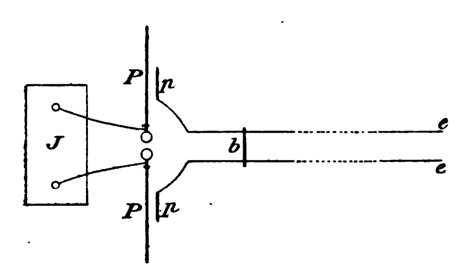
Eine Funkenentladung enthält, ähnlich wie ein sich brechender Luftstrom den Schallwellen gegenüber, im allgemeinen Anstöfse zu einer grofsen Mannichfaltigkeit elektrischer Wellen. Um einzelne Wellenlängen (Schwingungszahlen) zu erhalten oder zu beobachten, dient entweder ein Leitersystem von besonderer Gestalt, dem der Funke entnommen wird („Erreger" von Righi, Blondlot etc.), oder umgekehrt ein „Resonator", der, wie ein akustischer Resonator, nur auf eine einzelne Schwingungsdauer anspricht, oder endlich man begünstigt durch Interferenz die Ausbildung einer einzelnen von den vielen erregten Wellen, ähnlich wie in der Akustik durch die Interferenz in Luftsäulen. Man kann in verschiedener Weise auch diese Mittel zusammen wirken lassen.

I. Wellen längs Drähten; vgl. auch 133.

1. Wellenerzeuger.

Zum Betrieb dient ein Induktorium mittlerer Gröfse mit Federunterbrecher (besondere Vorteile bietet der sehr schnell arbeitende Deprez-Unterbrecher (Wiedemann, Elektrizität IV, S. 556. 1898).

Der Erzeuger erhält für feinere Versuche besondere Formen (**133** 10); für einfachere genügt die Hertz'sche Form; Fig. Zwei parallele vertikale quadratische Metallplatten P — z. B. 30 cm Seite — tragen in halber Höhe kurze starke Drähte mit Kugeln ($2r = 3$ cm); die „primäre" Funkenstrecke zwischen den Kugeln $= 0{,}4$ bis 0,8 cm. Die Zuleitdrähte vom Induktorium werden zweckmäfsig in unmittelbarer Nähe hinter den Kugeln angelegt. Der Aufbau mit Einschlufs des Induktoriums J soll symmetrisch sein.



Der „primäre" Funke mufs weifs sein und mit scharfem Knall einsetzen; seine Wirkung wird matt, wenn die Kugeloberflächen einige Zeit gebraucht sind; diese müssen dann auf das sorgsamste geputzt werden. Erhöhte Wirksamkeit und Fortfallen des Putzens erhält man, wenn man die primären Funken unter nichtleitenden Flüssigkeiten erzeugt (de la Rive und Sarasin). Zu dem Zweck werden die kugeltragenden Drähte mittels Korke in die durchbohrten Seitenwände eines parallelepipedischen Glastrogs geführt, der am besten mit Vaselinöl, verdickt durch etwas Vaselin, gefüllt wird.

2. Sekundärer Leiter.

Die parallelen Drähte (Durchmesser 1—2 mm, Abstand 3—15 cm, Länge 5 m), längs deren der Wellenzug verfolgt wird, sind blank und in horizontaler Ebene ausgespannt. Die Energieaufnahme erfolgt durch

kleine angelötete quadratische Endplatten p (5—10 cm Seite), in wenigen Centimetern Entfernung von den Platten P; s. Fig. vor. S.

Auf den Drähten läfst sich mittels eines Holzgriffes eine Brücke b verschieben, ein Metalldraht mit umgebogenen Enden, durch die ein fester Kontakt gesichert ist.

3. Beobachtungsmittel für stehende Wellen.

Stehende Wellen bilden sich längs der Drahtleitung bei gewissen Lagen der Brücke b. Zu ihrem Nachweise dienen:

a) Geifsler'sche Röhren (Lecher), sowohl mit wie ohne Elektroden; im letzteren Falle werden sie quer über die Drähte gelegt, andernfalls werden die Elektroden durch kurze Drahtösen mit zwei gegenüberliegenden Punkten der Drähte verbunden. Die Röhren leuchten in den Wellenbäuchen, diese können mithin durch Verschieben der Röhre längs der Drähte aufgesucht werden. Mit besonders empfindlichen Röhren, die nur um die Knotenpunkte dunkel bleiben, sucht man besser die letzteren auf.

Bringt man einen beträchtlichen Teil der Doppeldrahtleitung (2—3 m) in ein Glasrohr, das evakuirt werden kann, so sieht man unmittelbar das Gas an den Bäuchen leuchten, an den Knoten dunkel bleiben (Arons).

b) Das Bolometer: Auf den Drähten verschieben sich zwei durch ein Holzbrettchen verbundene Glasröhrchen, welche die Drähte eng umschliefsen; um die Röhrchen sind die langen, dünnen Drähte, die zum Bolometer führen, ein oder mehrmals herumgewickelt. Durch Ablesung der Galvanometerausschläge kann der ganze Wellenverlauf verfolgt werden. Die Lage der Brücke und der Glasröhrchen wird an einem Bandmafs abgelesen oder auf einem auf den Fufsboden gezeichneten Mafsstab abgelotet.

Das Bolometer befindet sich in der Paalzow-Rubens'schen Verzweigung (85, 4).

Rubens, Wied. Ann. 42, 154. 1891.

4. Lage der Bäuche und Knoten.

Ist die Leitung auch an den Enden überbrückt, so liegt dort ein Knoten; die ganze Drahtlänge zerfällt in eine ungerade Anzahl von Viertelwellen. Wegen der Brücke b und der Platten p mufs zu der gemessenen Drahtlänge l eine Korrektion l_0 hinzugefügt werden. Sämtliche mögliche Wellenlängen λ_n ergeben sich aus der Formel $\frac{1}{4}\lambda_n(2n-1)=l+l_0$. l_0 kann in erster Annäherung aus einem bestimmten n und dem zugehörigen (gemessenen) λ_n berechnet werden (Rubens, Wied. Ann. 42, 154. 1891. Eine theoretisch strenge Behandlung bei Cohn und Heerwagen, Wied. Ann. 43, 343. 1891).

Ist die Leitung bei e offen, so liegt dort ein Bauch, die Formel lautet dann $\frac{1}{2}\lambda_n \cdot n = l+l_0$.

Man kann bequem bis $n=10$ kommen, indem man b entsprechend

gegen p hin verschiebt, doch treten wegen des vermutlich wechselnden Wertes von l_0 bei kurzen Wellen Unregelmäßigkeiten auf.

5. Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (v).

Vgl. über die Messungen auch **133** 10.

Nach Sarasin und de la Rive ist längs Drähten der Werth von v gleich dem im umgebenden Dielektrikum. Durch λ und die Schwingungsdauer ist $v = \lambda/\tau$ gegeben.

a) λ wird gemessen, τ berechnet; Sarasin und de la Rive, Blondlot etc.

Ein zwischen den Drähten verschiebbarer „Resonator" (Fig.) $ABCD$ (z. B. $AB = 10$ cm, $BD = 20$ cm) aus Kupferdraht ($2r = 1$ bis 2 mm) ist bei c aufgeschnitten; hier sind an beide Drahtenden einander parallele, unter den Drähten liegende Metallplatten (6 cm Radius) von wenigen Millimetern Abstand angelötet. An den Platten ist ein fein regulirbares Funkenmikrometer (Spitze und kleine Kugel, Abstand Bruchteile eines Millimeters) befestigt. Die Schwingungsdauer τ dieses Resonators berechnet sich nach der Formel $\tau = 2\pi\sqrt{cS}$; Anh. 28.

Seine Kapacität c wird galvanometrisch gemessen oder aus den Dimensionen berechnet (**132**).

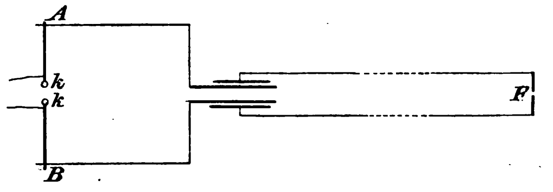
Der Selbstinduktions-Koefficient S berechnet sich (Mascart)

$$S = 4\left\{-2(a+b-m) + a\log\frac{2ab}{\varrho(a+m)} + b\lg\frac{2ab}{\varrho(b+m)}\right\}\cdot 10^{-9}\,\text{cm},$$

worin a und b die Seiten des Rechtecks, $m = \sqrt{a^2+b^2}$, ϱ der gegen a und b kleine Radius des Drahtes. Länge der Drahtleitung $= 25$ m, Abstand $= 11$ cm, AB ist etwa 10 m vom Erreger entfernt; jenseit CD wird die Brücke b verschoben. Die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Brückenlagen, bei denen das Funkenspiel ausbleibt (Regulirung der Funkenstrecke!), ist gleich der halben Wellenlänge des Resonators.

b) λ und τ wird gemessen (Trowbridge und Duane).

Der Primärkreis (Fig.) wird durch Verschieben der die primäre Funkenstrecke kk enthaltenden Leitung AB so lange geändert, bis sich auf der Sekundärleitung (Drahtlänge ca. 60 m) mit dem Bolometer eine wohlausgebildete halbe Welle nachweisen läßt. (Knoten bei F und in der Nähe der Kondensatorplatten, auf welche die Energie übertragen wird.) Der Knotenabstand ist $= \frac{1}{2}\lambda$. Bei F ist eine sehr kleine Funkenstrecke; das Bild der Fünkchen wird nach Reflexion an einem rotirenden Spiegel photographirt und hieraus τ (etwa $\lambda \cdot 10^{-7}$ sec. bei $\lambda = 60$ m) berechnet (**29a**, 5).



II. Wellen in freier Luft.

Zur Erzeugung der Wellen dient ein Erreger, der aus zwei gleichgestalteten Leitern besteht, zwischen deren einander zugekehrten Enden der primäre Funke überschlägt; den Empfänger bildet ein ähnliches System von Leitern. Als Stromquelle dient entweder das Induktorium oder eine grofse Holtz'sche oder Toepler'sche Influenzmaschine. Von den Mitteln zum Nachweis der Schwingungen im Empfänger erwähnen wir

1) die Fünkchen, die zwischen den sehr nahe aneinander gerückten Enden des Empfängers auftreten;

2) die Geifsler'sche Röhre mit Nebenelektroden. Die Hauptelektroden sind mit einer Akkumulatorenbatterie verbunden; durch Einschalten von Widerstand wird die Entladung gerade zum Verschwinden gebracht; springt nun zwischen den Nebenelektroden, die mit dem Empfänger verbunden sind, ein Fünkchen über, so setzt die Entladung der Akkumulatorenbatterie wieder ein (Zehnder);

3) das Elektroskop. Dessen Kugel ist mit der einen Hälfte des Empfängers verbunden; der Kugel gegenüber steht in geringer Entfernung eine Spitze, die mit der andern Empfängerhälfte und mit einer andrerseits zur Erde abgeleiteten Trockensäule verbunden wird. Setzen die Fünkchen ein, so ladet die Trockensäule das Elektroskop (Boltzmann);

4) das Thermoelement; feine Drähte aus verschiedenen Metallen (z. B. Platin und Patentnickel) werden an die einander zugekehrten Enden A und B der Empfängerhälften gelötet (Fig.), umeinander geschlungen und nach aufsen durch ein Galvanometer verbunden; der Ladungsausgleich zwischen A und B erwärmt die Berührungsstelle und veranlafst einen Thermostrom im Galvanometerkreis (Klemenčič). — Auch das Bolometer nach Paalzow-Rubens (85, 4) kann verwendet werden, mit besonderen Vorsichtsmafsregeln auch der „Cohaerer".

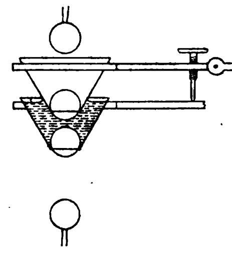
A

B

Um die „elektrischen" Strahlen zusammenzuhalten (paralleles Strahlenbündel) werden Erreger und Empfänger in der Brennaxe von parabolischen Cylinderspiegeln aus Metall (Zink) befestigt. Die Verbindungsdrähte zur Stromquelle resp. den Nachweisapparaten werden isolirt durch Löcher in den Spiegeln geführt.

Die Dimensionen der Apparate sind entsprechend der gewünschten Wellenlänge sehr verschieden (Wellenlänge bei Hertz mehrere Meter, Righi 2—20 cm, Lebedew bis 6 mm abwärts). Als Beispiel sei eine vertikale Anordnung von Righi angeführt (ausführliche Beschreibung verschiedener Apparate in „L'Ottica delle Oscillazioni elettriche", Bologna 1897, deutsch von B. Dessau).

Der Erreger ($\lambda =$ ca. 10 cm) besteht aus 2 Messingkugeln pp ($2r = 3{,}75$ cm) im Abstand von 0,08 cm; sie sind (siehe Fig. folg. S.)



in zwei Glastrichter ohne Ausflufsrohre eingekittet. Die Trichter ruhen in Holzfassungen, deren Abstand vermöge des Gelenks mit Stellschraube fein regulirt werden kann. Die mit der Elektricitätsquelle (bei Righi 4-plattige Holtz'sche Elektrisirmaschine) verbundenen Kugeln entladen sich durch 2 cm lange Funkenstrecken auf die Erregerkugeln; der untere Trichter ist mit Vaselinöl gefüllt, in dem die Funken überspringen.

Der Empfänger besteht aus einem dünnen Streifen auf Glas niedergeschlagenen Silbers (3,6 $\times$ 0,2 cm), der in halber Länge durch einen feinen Diamantstrich geteilt ist; an diesem Strich wird das Funkenspiel beobachtet, ev. unter Zuhilfenahme einer Lupe. Die parabolischen Spiegel haben z. B. 20 cm Höhe, 25 cm Öffnung und 3 cm Brennweite. Bei Beobachtung des Empfängers mittels Lupe ist diese selbstverständlich hinter dem Spiegel vor einer kleinen Öffnung anzubringen.

Mit diesen Apparaten lassen sich alle Versuche anstellen, die zuerst Hertz an elektrischen Wellen in Analogie mit optischen Erscheinungen ausführte.

Die Flächen der Prismen für Brechungsmessungen, sowie die Flächen reflektirender Spiegel, polarisirender Gitter etc. sind den Spiegelöffnungen entsprechend zu wählen; Abblendschirme zweckmäfsig gröfser. Für feinere Untersuchungen (Beugung, Doppelbrechung etc.) empfehlen sich kleine Apparate, die sich auf einem der üblichen Spektrometergestelle aufbauen lassen (Lebedew, Wied. Ann. 56, 1. 1895).

Elektrostatik.

126. Allgemeines über elektrostatische Messungen.

Isolirung. Gut isolirende Stützen liefert Schellack. Zur Beseitigung der Oberflächenleitung des Glases dient Abwaschen oder besser Abkochen mit destillirtem Wasser und Trocknen in staubfreier Luft. Frisch gereinigte Gläser isoliren meistens gut. Die dauerhafteste Isolirung liefert Flintglas, schwer schmelzbares Kaliglas, alkalifreies Glas aus Jena; oder auch ein Überzug von Schellack. Paraffin isolirt gut, deformirt sich aber leicht. Paraffinirtes Holz (8, 19) genügt für manche Zwecke. Für höhere Temperaturen leisten parallel zur Axe geschnittene Quarzplättchen als Unterlagen gute Dienste.

Wenn die Entladung eines gewöhnlichen Elektroskops durch die Berührung mit einem abgeleiteten Körper eine merkliche Zeit in Anspruch nimmt, so ist der Widerstand des Körpers mindestens auf die Ordnung 10^{10} Ω zu schätzen.

Influenzmaschinen hält man am einfachsten durch Anwärmen der Scheiben mit einem zwischengesetzten Petroleumlämpchen (Ganglampe) trocken. Man achte auf Fasern der Transmissionsseile und ähnliches.

Schutzhüllen. Um Influenzwirkungen nach und von aufsen zu beseitigen, schliefse man die Apparate und Leitungen in zur Erde abgeleitete, metallische Hüllen ein (Pappe, innen mit Stanniol überzogen; Netz aus Draht oder aus Stanniolstreifen, die auf, oder besser in die Glashüllen geklebt sind u. dgl.).

Vorsichtsmafsregeln bei der Messung mit abgetrennten Elektricitätsmengen. Zur Vermeidung von Reibungselektricität füllt man an Kommutatoren u. dgl. das Quecksilber in Fingerhüte, welche in eine isolirende Unterlage eingesetzt werden.

Die Messung kleiner Kapacitäten verlangt Zuleiter, Kommutatoren u. dgl. von kleiner Kapacität. Man stellt Kommutatoren z. B. aus Platindrähtchen an Schellackstäbchen her und bewirkt die Verbindungen durch ebenso gehaltene Platindrahtbügel.

Kondensatoren für genauere Messungen sollen thunlichst rückstandsfrei sein. Man wähle Luftkondensatoren oder auch solche mit Paraffin; bei der Herstellung werden die Kondensatorplatten unter Vermeidung von Verunreinigungen (z. B. Öl) in flüssiges Paraffin völlig eingetaucht; s. Arons, Wied. Ann. 35, 291. 1888.

Rückstandsfreie Träger werden durch kleine, abgeleitete, nicht ganz bis an ihre Enden mit Paraffin ausgegossene Metallröhrchen geliefert, in deren Axen die Leitungsdrähte laufen.

Erzeugung konstanter Potentiale. Am besten dienen vielpaarige galvanische Ketten, kleine Akkumulatoren, Spamer'sche Chromsäureelemente oder Clark-Elemente etc.; die letzteren in U-förmigen Röhrchen angeordnet, mit Paraffinverschlufs auf der Seite der Zinklösung Monate lang haltbar, montirt auf einem Brett mit Glasstreifen, oder an einem isolirten Gestell aufgehängt. S. auch S. 352.

Hohe Potentiale werden durch Leidener Flaschen oder Batterien von grofser Kapacität bez. geringem Elektricitätsverlust geliefert. Man ladet einige Zeit vorher, weil Anfangs die Spannungsabnahme durch Rückstandsbildung und El.-Verlust am stärksten ist. Nimmt man dann durch Berührung mit einem Halbleiter vor dem Gebrauch einen Teil der Ladung fort, so führt der nun freiwerdende Rückstand in Verbindung mit dem El.-Verlust einen zeitlichen Maximumzustand der Spannung herbei, so dafs die Spannung sich dann eine Zeit lang wenig ändert. Durch alternirendes Beobachten lassen Änderungen sich eliminiren.

Nullpunkt des Potentials. Mefsbar sind nur Differenzen von Potentialen. Um für diese einen, allen Apparaten einer Versuchsanordnung gemeinsamen Anfangspunkt, ein Potential „Null", festzulegen, verbindet man alle auf Null zu haltenden Körper mit der Erde (Wasserleitung, Gasleitung, Erdplatte).

Im Folgenden ist unter Potential stets die Potentialdifferenz gegen den gewählten Nullpunkt verstanden.

127. Elektrometer. Messung von Potentialen (Spannungen).

I. Sinus-Elektrometer (R. Kohlrausch, 1853).

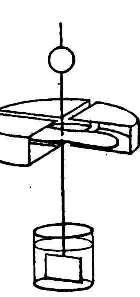
Die Ablenkung φ der Magnetnadel in einem konstanten Kreuzwinkel gegen den abstofsenden Arm bedeutet das Potential $V = C\sqrt{\sin\varphi}$. Die konstante Stellung erkennt man durch einen Spalt an dem Koincidiren des zweimal gespiegelten Bildes einer Marke mit einem Punkte auf dem Spiegel der Nadel. φ ist der Winkel, um welchen man von dem Nullpunkte an den Arm bis zu diesem Einspielen der Nadel nachdrehen mufste.

Verschiedene Nadeln und Kreuzwinkel ermöglichen sehr verschiedene Werte von C. Um diese auf einander zu reduciren, vergleicht man die verschiedenen, einer konstanten Spannung (vgl. oben) entsprechenden φ.

II. Quadrant-Elektrometer (W. Thomson, um 1860).

Vier leitende Quadranten, von denen je zwei gegenüberliegende mit einander verbunden sind, bilden eine geschlitzte Schachtel. In dieser ist die „Nadel" mit einem Stiel, der einen Ablesespiegel trägt, an einem feinen Draht aufgehängt, dessen Torsionselasticität eine Direktionskraft abgibt. Die Fortsetzung des Stieles nach unten läuft in ein kleines Platinblech aus, welches in koncentrirte staubfreie Schwefelsäure untertaucht, die aufser zum Trockenhalten des Instrumentes, zum Dämpfen der Schwingungen dient.

Der Nadel wird ihre Ladung (vgl. unten) durch ihren Aufhängedraht bez. versilberten oder hygroskopisch gemachten Quarzfaden (8, 21) oder von der Schwefelsäure aus zugeführt.



In der Ruhelage, d. h. wenn alle Elektrometerteile abgeleitet sind, soll die Mittellinie der Nadel mit einem Trennungsdurchmesser der Quadranten zusammenfallen, was durch Drehung des Torsionskopfes zu bewirken ist.

Genauere Orientirung. Man dreht die Nadel mittels der Aufhängung so, dafs der bei abgeleiteten Quadranten unter Anlegung eines hohen Potentials an die Nadel eintretende Ausschlag ein Minimum wird, oder besser, dafs die unter Vorzeichenwechsel dieses hohen Potentials eintretenden entgegengesetzten Ausschläge gleich werden.

Nach einer frischen starken Ladung der Nadel ist das Gleichgewicht zuweilen instabil. Oft hilft blofses Abwarten. Sonst verstelle man, wenn dies möglich ist, einen Quadranten, oder versuche, ob eine Änderung der Nadellage hilft; oder endlich, man gebe eine schwächere Ladung.

Die Empfindlichkeit variirt mit Vertikalverschiebungen der Nadel und läfst sich dadurch variiren. Bei genaueren Messungen stelle man aber die Nadel womöglich in die Mitte der Quadrantenschachtel, die Minimumlage der Empfindlichkeit. Ein Nachlängen der Suspension hat dann weniger Einflufs, auch wird die Symmetrie der Ablenkungen in dieser Lage am wenigsten durch Verbiegungen der Nadel, ungleiche Höhe der Quadranten etc. gestört.

Die Schwefelsäure veranlafst häufig Nullpunktsverschiebungen, Kriechen der Nadel. Umrühren etwa $\frac{1}{2}$ St. vor der Beobachtung beseitigt dies. Das Beruhigungsplättchen soll an einem äufserst feinen platinirten und geglühten Platindraht (8, 18) aufgehängt sein, der central durch die Flüssigkeitsoberfläche geht. Über andere Dämpfung s. Hallwachs l. c. (S. 515).

Formen des Quadrantelektrometers s. aufser bei Lord Kelvin bei Kirchhoff, Branly, Mascart, Edelmann, Hallwachs, Dolezalek.

Durch eine mehrfache Nadel in einer entsprechenden Anzahl übereinandergesetzter Quadrantenschachteln — z. B. Kelvin's „Multicellular-Voltmeter" — wird die Empfindlichkeit gesteigert, so dafs auch eine Zeigerteilung in Anwendung kommen kann, deren Aichung natürlich empirisch geschieht (**129**).

Allgemeine Formel. Werden die Quadrantenpaare und die Nadel bez. auf die Potentiale Q_1, Q_2 und N gebracht, so tritt eine, mit Spiegel und Skale (**25**) zu beobachtende, Drehung der Nadel um den Winkel α ein (Maxwell, S. 352)

$$\alpha = C(Q_1 - Q_2)[N - \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2)] \qquad 1.$$

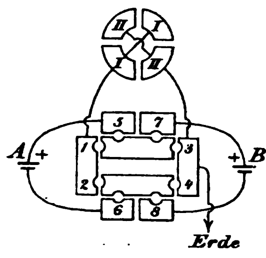
wo C die Elektrometerkonstante ist (**129**).

Mit Hilfsladung.

1. Quadrantschaltung. Das eine Quadrantenpaar wird dauernd auf dem Potential Null, die Nadel auf einem gegen das zu messende hohen Potential gehalten. Letzteres geschieht mit einer andrerseits abgeleiteten vielpaarigen Kette oder bei geringeren Anforderungen an Konstanz mit einer Zamboni'schen Säule oder einer, oft schon mit dem Instrument verbundenen Leidener Flasche.

Die Ladung des zweiten Quadrantenpaares zu dem Potential V bewirkt dann eine mit V nahe proportionale Ablenkung aus dem mit allseitiger Ableitung gefundenen Nullpunkt. Die Unsymmetrie der Ausschläge für positive und negative Ladungen wird mittels Kommutiren von V durch Messung des Gesamtausschlages eliminirt.

Die Ausschläge für $+V$ und $-V$ sind nach Formel 1 gleich $CV(N-\frac{1}{2}V)$ und $CV(N+\frac{1}{2}V)$, sie unterscheiden sich also von einander um V/N ihres Betrages, z. B. um 2%, wenn 50 Akkumulatoren (100 V) die Nadel laden und wenn 2 V gemessen werden. Im Mittelwert hebt $\frac{1}{2}V$ sich weg.



Zu rascher Herstellung aller Verbindungen und zugleich zum Austauschen zweier Elemente ist der Kommutator der Figur bequem (Dorn). Es bewirkt: Stöpselung 1, 4, 5, 6 Ladung des Qu.-Paares I mit $+V$, 2, 3, 5, 6 mit $-V$ vom Element A. Paar II ist dabei immer abgeleitet. Stöpselung 1, 3 leitet alle Quadranten ab. — 7 u. 8 statt 5 u. 6 schaltet ebenso das andere Element B an.

2. Nadelschaltung. Die beiden Quadrantenpaare werden dauernd durch Verbinden mit den Polen einer vielpaarigen galvanischen Kette, deren Mitte zur Erde abgeleitet ist, auf entgegengesetzt gleiches Potential geladen. Verbindet man die vorher abgeleitete Nadel dann metallisch mit dem zu messenden Potential V, so tritt (siehe Formel 1, vor. S.) eine mit V proportionale Ablenkung ein. Eventuell vertausche man das Vorzeichen von V mittels eines Kommutators. Vollkommene entgegengesetzte Gleichheit der Quadrantenpotentiale ist nicht nötig.

Bei Beobachtungen mit Hilfsladung mufs man wegen der Schwankungen des Hilfspotentials von Zeit zu Zeit die Empfindlichkeit bestimmen (**129** I).

Ohne Hilfsladung (Doppelschaltung) für gröfsere Potentiale.

Die Nadel und das eine Quadrantenpaar sind abgeleitet. Das vorher abgeleitete zweite Quadrantenpaar gibt dann mit einem Potential V einen mit V^2 proportionalen Ausschlag e, so dafs

$$V = c \cdot \sqrt{e}. \qquad 2.$$

Statt die mit der Nadel verbundenen Quadranten abzuleiten, die anderen zu laden, kann man auch umgekehrt verfahren.

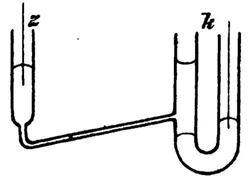
Gröfsere Skalenausschläge werden auf Winkel reducirt (**25**); doch kann man die Korrektion auch mit der Kaliberkorrektion (**129**) vereinigen. Ferner ist bei genauen Messungen der mittlere Ausschlag bei gleichzeitiger Vertauschung der Quadranten und des Potentialvorzeichens zu nehmen, um Kontakt-Potentialdifferenzen zwischen den Elektrometerteilen zu eliminiren. Ohne dies können erhebliche Fehler entstehen. S. Hallwachs, Wied. Ann. 29, 1. 1886; 55, 170. 1895.

Die Konstanz ist hier nur bedingt durch die Konstanz der Aufhängung in Bezug auf Direktionskraft, Länge und Torsion und ist durch sehr feine Metalldrähte oder leitend gemachte Quarzfäden in weitem Umfang erreichbar.

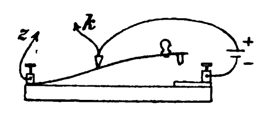
III. Kapillar-Elektrometer (Lippmann).

Die Kapillarspannung in einer mit verdünnter Schwefelsäure in Berührung stehenden Quecksilberoberfläche wird durch Polarisation mit Wasserstoff um einen Betrag verkleinert, welcher der Polarisation nahe proportional ist, so lange diese unter etwa $\frac{1}{10}$ V bleibt. Später wird die Abnahme langsamer; einem Minimum der Kapillarkonstante bei etwa 1 V folgt dann wieder eine Zunahme.

Wässrige Schwefelsäure (25% etwa) steht mit Quecksilber in Berührung einerseits in der Kapillare einer eng ausgezogenen Glasröhre, andrerseits in einem weiten Glasrohr. Aus beiden Quecksilbermassen ragen Platindrähte z und k als Elektrometerpole heraus. Der negative Pol der zu messenden Spannungsdifferenz, welche < 1 V sein mufs, wird mit z, der andere mit k verbunden. Man beobachtet entweder mit einem Mikroskop die Gröfse der Verschiebung oder die Gröfse der Druckänderung, welche die Kontaktstelle auf den Nullpunkt zurückführt. Nullpunkt ist Einstellungspunkt bei metallischer Verbindung von z mit k.



Unbenutzt sollen z und k metallisch verbunden stehen. Der Federschlüssel (Fig.; Ostwald) verbindet, mittels seines isolirenden Knopfes niedergedrückt, k und z mit den Polen des Elements, losgelassen verbindet er k und z mit einander. Ein Morse-Taster hat dieselbe Einrichtung.



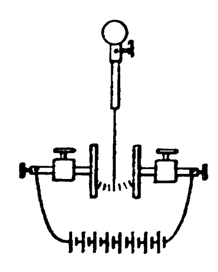
Nach Anwendung einer zu großen oder einer verkehrt gerichteten Spannung ist das Quecksilber an der Berührungsstelle in der Kapillare zu erneuern.

Die Aichung geschieht am besten, unter Benutzung des Satzes von der Proportionalität der Änderung mit kleinen Spannungen, nach dem Verfahren I 2, S. 520, durch bekannte Elemente (80, S. 349 ff.). Oft dient das Instrument auch zu Nullmethoden.

Lippmann, Pogg. Ann. 149, 546. 1873. Einfache Formen für das Kapillar-Elektrometer s. z. B. bei Ostwald, physiko-chemische Messungen S. 243.

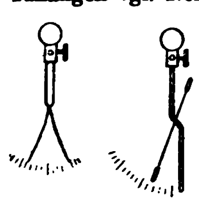
IV. Andere Elektrometer.

1. Hankel'sches Elektrometer; eine zu Messungen eingerichtete Form des Bohnenberger'schen Elektroskops. Zwischen Polplatten spielt ein Gold- oder Aluminiumblatt oder ein versilberter Quarzfaden. Durch eine trockene Säule oder Elemente können entweder das Blättchen oder (Fig.) die Polplatten zu konstanter Spannung geladen werden. Der andere Teil nimmt das zu messende Potential auf. Die Schaltungen entsprechen der Nadel- bez. Quadrantschaltung in II. Ein Mikroskop mit Okularmikrometer mißt die Verschiebungen an einem feinen Zacken des Blättchens. Für scharfe Einstellung beleuchte man mit einer nicht großen Gasflamme aus einiger Entfernung.



Das Instrument hat sehr kleine Kapacität und momentane Einstellung. Bei maximaler Empfindlichkeit läßt sich 0,01 V beobachten. Durch Entfernen oder Annähern der Seitenplatten bezw. Änderung des Hilfspotentials wird die Empfindlichkeit variirt. Doppelschaltung mißt bis etwa 100 V.

Über einen Vorschlag, eine trockene Säule am Torsionsfaden aufzuhängen vgl. Nernst u. Dolezalek, ZS. f. Instr. 1897, 65.



2. Blattelektroskope. Aluminium- oder Goldblatt-Elektroskope mit geeignetem Gradbogen lassen Potentiale von 50 bis 10000 V messen. Die Blättchen sollen möglichst in abgeleitete Metallhüllen eingeschlossen sein (126). Die Skala wird empirisch graduirt.

Über ein Elektroskop für Potentiale von 50—200 V (Fig. 1) s. Exner, Wiener Berichte 95 II, 1088. 1887; ein desgl. mit einem um eine Axe spielenden Aluminiumstreifen für 500—10000 V (Fig. 2) s. bei Braun, Wied. Ann. 44, 771. 1891.

3. Righi'sches Spiegelelektrometer, für stärkere Spannungen von etwa 3000 bis 25000 V als Hilfsapparat des absoluten Elektrometers besonders geeignet (128). Eine Nadel, welche auf das zu messende Potential *V* geladen wird, wird infolge ihrer unsymmetrischen Stellung zu zwei Ausschnitten im Gehäuse oder dgl. ab-

gelenkt. Die Ausschläge e sind dem Quadrat von V genähert proportional. Bei der empirischen Graduirung (**129**) kann man die Formel $V = c\sqrt{e}(1 - c'e)$ zu Grunde legen. Über Flüssigkeitsdämpfung vgl. S. 513.

Die Anordnung s. bei Quincke, Wied. Ann. 19, 564. 1883.

Eine andere Anordnung mit regulirbarer bifilarer Direktionskraft und Ausschlägen, die nahe prop. V^2 sind, für 6000 bis 60000 V Heydweiller, ZS. f. Instr. 1892, 377.

128. Absolute Messung elektrostatischer Potentiale (Harris 1834).

1. Von einer mit Elektricität von der Flächendichte σ gleichmäfsig geladenen Ebene erfährt eine El.-Menge ε, die ihr in einem gegen die Ausdehnung der Ebene verschwindenden Abstand gegenüber steht, eine zur Ebene senkrechte Kraft $= 2\pi\sigma \cdot \varepsilon$, also vom Abstande unabhängig.

Beweis. Man zerlege die Ebene von dem Fufspunkte der von ε gefällten Senkrechten a aus in Elementarringe. Ein Ring vom Halbmesser r und der Breite dr übt die Kraft aus $\varepsilon \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr \cdot a(r^2 + a^2)^{-3/2}$. Die Gesamtkraft ist also $= \varepsilon\sigma 2\pi a \int r(r^2 + a^2)^{-3/2} dr$. Das Integral ist $= -(r^2 + a^2)^{-1/2}$, also zwischen den Grenzen 0 und r genommen $= 1/a - 1/(r^2 + a^2)^{1/2}$, und wenn das zweite gegen das erste Glied verschwindet, $= 1/a$. Die Kraft wird also $= \varepsilon\sigma \cdot 2\pi$; q. e. d.

2. Anziehung einer auf dem Potential V gehaltenen Platte f durch eine im kleinen Abstande a befindliche, grofse abgeleitete Platte. Das System bildet einen Kondensator von der Kapacität (**132** I 3) $f/(4\pi a)$, d. h. die Platte vom Potential V hat die Ladung $V \cdot f/(4\pi a)$. Bei relativ sehr kleinem Abstande ist die entgegengesetzte Ladung der abgeleiteten Platte nahe ebensogrofs, d. h. die Flächendichte ihrer Ladung beträgt $\sigma = V/(4\pi a)$. Die Menge $V \cdot f/(4\pi a)$ erfährt also nach 1 eine Gesamtkraft $k = 2\pi \cdot V/(4\pi a) \cdot Vf/(4\pi a) = f/(8\pi) \cdot V^2/a^2$. Welcher Nullpunkt dabei für das Potential gewählt wird, ist gleichgiltig; V bedeutet in der Kraftformel immer den Pot.-Unterschied zwischen beiden Platten.

Je weniger a gegen die Ausdehnung von f verschwindet, desto ungenauer wird der Ausdruck. Das Umgeben der geladenen Platte mit einem Schutzring (vgl. unten) erweitert seine Giltigkeit.

Absolute Elektrometer (W. Thomson 1860).

Eine bewegliche, kreisförmige ebene Platte von der Gröfse f hängt, von einem auf gleichem Potential erhaltenen Schutzringe umgeben, über einer gröfseren festen Platte in einem kleinen Abstande a. Der Potentialunterschied $V - V_0$ bedingt dann eine gegenseitige Anziehungskraft $k = \frac{1}{8\pi}\frac{f}{a^2}(V - V_0)^2$; vgl. oben Nr. 2. Man erhält also

a V V_0

die Differenz $V - V_0$ oder, wenn $V_0 = 0$ ist, $V = a\sqrt{8\pi k/f}$. Alle Längen in cm, k in Dynen gemessen, kommt V in elektrostatischen [C.G.S], von denen eine Einheit 300 ∀ beträgt. (Anh. 7, 15 u. 26.)

Für f ist genauer zu setzen, wenn R und R' die Halbmesser der beweglichen Scheibe und des Schutzringes bedeuten, also $b = R' - R$ die Breite der schmalen Fuge,

$$f = \frac{\pi}{2}\left(R^2 + R'^2 - b\frac{R + R'}{1 + 4{,}5\, a/b}\right).$$

Maxwell, Elektricität § 217 u. 218; 4,5 ist $= \pi/\mathrm{lgnat}\,2$.

Kirchhoff'sche Wage. Die bewegliche Platte (Fig. vor. S.) bildet die Schale einer Wage, mit dem Schutzring in einer Ebene liegend, wenn der Wagezeiger auf Null steht. Ein Anschlag der zweiten Wagschale verhindert weitere Annäherung an die tiefer stehende feste Platte.

Wird letztere auf ein Potential V geladen, so mufs man auf die zweite Wagschale p gr legen, damit die Wage umzukippen beginnt. Das Potential bestimmt sich dann nach der oben gegebenen Formel, wenn man $k = 981 \cdot p$ setzt. Der Beginn des Umkippens wird durch das Aufhören eines galvanischen Stromes scharf fixirt, welcher durch den Anschlag zur zweiten Wagschale fliefst.

Das Verfahren ist für Potentiale von mehreren [C.G.S] (reichlich 1000 ∀) an aufwärts geeignet.

Näheres s. Quincke, Wied. Ann. 19, 561. 1883; Czermak, Wiener Berichte 97, 307. 1888; über feste Führung der Schale und Anordnungen bis zu 100000 ∀ s. Abraham u. Lemoine, Journ. de phys. (3) 4, 466. 1895; über eine plattenelektrometrische Zeigerwage von Kelvin das Verzeichnis von White, Glasgow. — Vgl. Wiedemann, Elektricität, 4. Aufl. I, S. 182.

Thomson'sches absolutes Elektrometer. Die bewegliche Platte bildet eine Federwage, die bereits in der Nullstellung mit Gewichtchen belastet ist. Der wegzunehmende Betrag p gr, bez. die in das Gewicht p gr umgerechnete Anspannung der Aufhängefedern, wodurch nach der Ladung die Nullstellung wieder herbeigeführt wird, gibt, mit $g = 981$ gr multiplicirt, die Kraft k.

Die Schwierigkeit, a genau zu messen, wird hier so umgangen: die aufgehängte Platte samt Schutzring wird mit dem

Gehäuse — einer Leidener Flasche — zu einem konstanten, nicht zu kleinen Potential geladen. Die feste, aber mefsbar parallel verschiebbare Platte f wird zunächst zur Erde abgeleitet; die zum Erzielen der Nullstellung nötige Kraft sei $=k$, wenn f eine bestimmte Lage hat. Nun wird das zu messende Potential V der Platte f mitgeteilt. Damit die bewegliche Platte bei derselben Kraft k wieder in ihre Nullstellung kommt, sei eine Verschiebung von f um l cm nötig. Dann ist $V = l\sqrt{8\pi k/f}$.

Denn es ist, das konstante Hilfspotential durch V' bezeichnet, (v. S.)

$$V' = a\sqrt{8\pi k/f} \quad \text{und} \quad V' \pm V = (a \pm l)\sqrt{8\pi k/f}.$$

Näheres über die Einrichtung in W. Thomson, Papers on Electrostatics etc. oder in dem von White in Glasgow herausgegebenen Verzeichnis: Lord Kelvin's Standard Electr. Instr. — Auch in Wiedemann, Elektricität 4. Aufl. I, 185.

Beurteilung von Potentialen aus der Schlagweite.

Zwischen Oberflächenteilen eines geladenen und eines abgeleiteten Leiters tritt bei hinreichend hohem Potential Funkenentladung ein. Eine genaue quantitative Beziehung wird durch die Umstände erschwert, die den Vorgang beeinflussen; so wird bei kleinen Schlagweiten im Beginn der Ladung ein höheres Potential erfordert, als später; Belichtung, besonders der Kathode, erleichtert den Funkenübergang; die Schlagweite hängt aufser der Natur des Gases auch von seinem Druck ab.

Trotzdem ist die Schlagweite unter Umständen ein bequemes Mittel zur Schätzung hoher Potentiale von mindestens einigen 1000 V. S. darüber Tab. 35.

Über den Einflufs der Ladungszeit auf die Schlagweite vgl. Toepler, Pogg. Ann. 134, 217. 1868; Jaumann, Wied. Ann. 55, 655. 1895; Warburg, Wied. Ann. 59, 1. 1896. Über den Einflufs der Belichtung der Kathode Warburg, Wied. Ann. 59, 1. 1896; 62. 385. 1897; Verh. Deut. Ph. Ges. 1900, 212.

129. Aichung und Kalibrirung eines Elektrometers.

Man beobachtet die Ausschläge, welche bekannte Potentiale, an das Elektrometer angelegt, hervorbringen, und stellt die Resultate, ev. mit Hilfe der genähert bekannten Form der Abhängigkeit, graphisch oder tabellarisch oder in einer Formel dar.

I. Instrumente für kleinere Potentiale.

1. Man beobachtet die Ausschläge, welche mehrere Normalelemente (**80**, II) einzeln und zusammenwirkend hervorbringen, wenn die Pole je mit einem Quadrantenpaar verbunden sind, wobei stets kommutirt und der beiderseitige Ausschlag gemittelt werde.

2. Man leitet einen konstanten Strom durch einen Rheostaten von grofsem Widerstande, dessen eine Polklemme mit der Erde in Verbindung steht. Die ganze Klemmspannung des Rheostaten soll das gröfste zur Kalibrirung erforderliche Potential erreichen. Die Stromstärke i sei in A gemessen. Ein Elektrometerpol wird an den abgeleiteten und nun der andere stufenweise an andere Punkte des Rheostaten angelegt. Ein zwischen den Elektrometerpolen liegender Widerstand w Θ bezeichnet eine Spannung von iw V. Kommutiren des Stromes gibt die Ausschläge nach beiden Seiten.

II. Instrumente für gröfsere Potentiale.

1. Mit einem absoluten Elektrometer (**128**); für Spannungen von 1000 V und mehr. Die Potentiale werden durch eine mit einer Leidener Batterie verbundene Influenzmaschine erzeugt. Am besten wird das absolute Instrument zuerst für das zu erreichende Potential eingestellt, erst dann die Ladung der beiden Instrumente vorgenommen, und zwar auf etwas höheres Potential wie das verlangte. Durch Annäherung einer abgeleiteten Spitze, Berührung mit einem Taschentuch u. dgl. bewirkt man dann ganz langsames Sinken des Potentials und liest, sobald das absolute Instrument einspielt, das zu aichende ab.

2. Mit galvanischer Kette; für Spannungen bis zu einigen Tausend Volt. Auch wenn die Spannung der Kette direkt nicht ausreicht, kann man auf folgendem Wege aichen.

a) Man verbindet mit der einen Endklemme eines Potentialverstärkers die Kette, mit der andern das Elektrometer. Ist z die Verstärkungszahl, V die Spannung der Kette (S. 349 ff.), so ist zV das Potential auf dem Elektrometer.

Hallwachs sowie Exner, l. c. (**127**).

b) Der eine Pol P_1 der isolirt aufgestellten Kette ist mit

der innern Belegung einer grofsen, aufsen abgeleiteten Leidener Batterie dauernd verbunden. Man leite P_1 ab und verbinde P_2 mit dem zu aichenden oder mit einem passenden Hilfselektrometer und beobachte den der Spannung V der Kette entsprechenden Ausschlag n_1. Alsdann wird P_1 von der Erde gelöst und das Elektrometer mit P_1 sowie einer Potentialquelle (Elektrisirmaschine etc.) verbunden und wieder bis zum Ausschlag n_1 geladen. Jetzt hat der Pol P_2 die Spannung $2V$.

Auf analoge Weise fortfahrend kann man beliebige Vielfache von V erzielen und an das Elektrometer anlegen. Vorausgesetzt wird eine im Vergleich mit den Elektrometern grofse Kapacität der Batterie. Vgl. F. Braun, l. c. **127**.

130. Elektrometrische Messung von Spannung, Widerstand, Stromstärke und Stromleistung.

I. Vergleichung von Spannungen.

Die Ausführung ist nach **127** selbstverständlich. Man legt an jedes der zu vergleichenden Elemente in der beschriebenen Weise das Elektrometer an. Die beobachteten, ev. auf Proportionalität corrigirten (**127**, **129**) Ausschläge geben durch einander dividirt das Verhältnis der Spannungen oder el. Kräfte im stromlosen Zustande zu einander. Zur Messung der Spannungen in Volt vergleicht man mit einem Normalelement (**80** II). — Ebenso mifst man Spannungen im Stromkreise (**101**).

II. Bestimmung von Widerständen, vgl. 91 I.

Man schaltet die zu vergleichenden Widerstände gleichzeitig hinter einander in denselben Stromkreis ein, dessen Konstanz man prüft, bringt die beiden Endpunkte von einem derselben mit den Zuleitungsdrähten in Verbindung und bestimmt aus dem Ausschlage des Elektrometers die Spannung zwischen den Punkten. Ebenso verfährt man mit dem anderen Widerstande. Das Verhältnis der Spannungen gibt das Verhältnis der Widerstände.

Elektrolytische Widerstände kann man ebenso messen, indem man von der Flüssigkeit durch zwei seitliche Bohrungen in der Glasröhre nach dem Elektrometer abzweigt, und zwar zunächst durch dieselbe Flüssigkeit, von da mittels zweier gleicher

Elektroden; Reste von Ungleichheit fallen durch Kommutiren heraus. Die principielle Vermeidung der Polarisation durch angeschlossene Zinksulfatlösung mit Zinkelektroden (Bouty) ist umständlich. — In jedem Fall ist die Stromwärme zu beachten.

Vgl. Sheldon, Wied. Ann. 34, 122. 1888; Rasehorn, Dissert. Halle 1889; Bouty, Ann. d. Ch. (6) 3, 433. 1884.

III. Messung von Stromstärken.

Stromstärken können aus der Spannung e V zwischen zwei konstanten Punkten des Stromkreises ermittelt werden wie in **88** u. **101**. Ist w Θ der Widerstand, so gibt e/w die Stromstärke in A.

Wechselströme. Je nach dem Elektrometer oder der Schaltungsweise am Quadrantelektrometer (**127** II, IV) sind die Elektrometerausschläge, sowohl bei Spannungs- wie bei Strommessung, der zu messenden Gröſse einfach oder quadratisch proportional. Also kann man sowohl $\frac{1}{\tau}\int e dt$ wie $\frac{1}{\tau}\int e^2 dt$ etc. messen. Die letztere Möglichkeit ist besonders wichtig, denn das Elektrometer zeigt jetzt das Quadrat der effektiven Spannung (oder Stromstärke) an; vgl. **120** I.

IV. Messung von Strom-Leistungen.

Ein Elektrometer in Doppelschaltung (S. 515) werde an das eine Ende eines Widerstandes w im Stromkreis angelegt, während das andere Ende von w abgeleitet ist. Der Ausschlag, geteilt durch w, ist der Strom-Leistung (Anh. 30; **84**, **120** III) innerhalb der Strecke w proportional, wenn innerhalb w keine el. Kräfte liegen. Dies gilt in induktionsfreien Leitern auch für Wechselströme.

Legt man endlich die ganze Spannung e eines Leiters etwa an die Nadel, während die Quadranten an einen induktionsfreien Teil dieses Leiters angelegt werden, so ist der Ausschlag proportional mit $\frac{1}{\tau}\int ei dt$; er miſst also unmittelbar die Leistung des Stromes in dem Leiter, auch wenn Phasenverschiebung (**120** II) vorhanden ist.

131. Messung der Elektricitätsmenge eines Kondensators.

Siehe auch **132** II.

1. Mit dem Elektrometer. Da die Ladungsmenge in einem bestimmten Kondensator dem Potential proportional ist, so lassen sich Ladungen desselben Kondensators mit dem Elektrometer (**127**) vergleichen. Der „Rückstand“, d. h. die bei einer kurz dauernden Entladung zurückbleibende Elektricitätsmenge äufsert keinen Einflufs auf das Potential; den Angaben des Elektrometers ist also die durch eine kurz dauernde Verbindung beider Belegungen entladene „disponibele“ Ladung proportional.

2. Mit dem Galvanometer. Eine grofse Elektricitätsmenge kann mittels ihrer Entladung durch ein Galvanometer von hinreichend isolirten Windungen bestimmt werden (**109** I). Die Gefahr eines Überspringens zwischen den Windungen oder einer Änderung des Nadelmagnetismus wird durch Einschaltung eines grofsen Widerstandes (feuchter Faden) vermindert.

Die elektromagnetische [C.G.S]-Einheit ist $= 10$ A sec oder $= 300 \cdot 10^8$ elektrostatischen [C.G.S]; Anh. Nr. 14 und 25.

3. Mit der Lane'schen Mafsflasche. Bei der Ladung einer Leidener Batterie kann man die zugeführte Elektricitätsmenge bestimmen, indem man die Belegungen isolirt und die eine mit der Elektrisirmaschine, die andere mit einer Mafsflasche verbindet. Jedem Funken der Mafsflasche entspricht ein bestimmter Zuwachs der Ladung der Batterie. Der Rückstand wird hier mit gemessen. — Die Aichung auf verschiedene Schlagweiten geschieht elektrometrisch (**127** I u. IV) oder nach Tab. 35.

4. Mit dem Luftthermometer (Riefs). Die Depression der Flüssigkeitssäule durch eine Entladung ist proportional dem Produkt aus der entladenen Elektricitätsmenge und ihrem Potential. Der Widerstand des Drahtes in der Thermometerkugel wird sehr grofs gegen die Widerstände der übrigen Entladungsstrecken vorausgesetzt. Da die Ladung derselben Leidener Flasche oder Batterie ihrem Potential proportional ist, so verhalten sich die entladenen Mengen wie die Quadratwurzeln aus den durch sie hervorgebrachten Depressionen.

132. Elektrostatische Kapacität.

Kapacität c eines Leiters ist die Elektricitätsmenge, welche ihn zum Potential 1 ladet, während die Leiter in influenzirbarer Nähe auf Null gehalten werden. Vgl. auch Anh. 16 u. 27. Die Kapacität hängt nicht nur von der Form des Leiters, sondern auch von seiner Lage zur Umgebung ab (Beobachter, Tisch, Wand etc.).

I. Aus den Dimensionen (in elektrostatischen Einheiten).

1) Kugel. $c = r$.

Beweis. Eine auf einer Kugelfläche gleichmäfsig ausgebreitete El.-Menge e gibt im Innern ein konstantes Potential V, welches also gleich dem auf den Mittelpunkt ausgeübten Potential sein mufs. $V = e/r$. Also $c = e/V = r$.

Kondensatoren. Kapacität schlechtweg heifst hier die Kapacität der einen (inneren) Belegung, des „Kollektors". Zu feineren Mefszwecken benutzt man Luftkondensatoren (R. Kohlrausch, verschiebbare Platten; grofse konstante Kapacitäten z. B. Lord Kelvin), allenfalls auch solche mit Paraffin (**126**). Glas-, Glimmer-, Wachstafft- etc. Kondensatoren folgen wegen Rückstand und Oberflächenleitung den einfachen Kondensatorgesetzen nicht genau. — Ihre Kapacität pflegt mit wachsender Temperatur zu steigen, bis über 1% auf 1°.

Die Kapacität einfach gestalteter Kondensatoren läfst sich berechnen. a bedeute den konstanten Abstand der Belegungen. Die Formeln gelten für Luft als Dielektricum; ev. ist noch mit der Dielektricitätskonstante (**133**, Tab. 36) zu multipliciren.

2) Kugelkondensator, innerer Halbmesser $= r$, äufserer $= r'$. Die äufsere Kugel sei abgeleitet. $c = rr'/(r' - r) = rr'/a$, wenn $a = r' - r$ der Abstand der Kugelflächen ist. Anstatt r und r' die beiden Flächen f und f' eingeführt, wird, da $r^2 = f/(4\pi)$ und $r'^2 = f'/(4\pi)$ ist, $c = \sqrt{ff'}/(4\pi a)$.

Beweis. Eine kugelflächig gleichmäfsig verteilte El.-Menge wirkt auf einen äufseren Punkt, wie wenn sie im Mittelpunkt koncentrirt wäre. Da das Potential auf einen Punkt aufserhalb beider Kugeln Null sein soll, so müssen die beiden Ladungen gleich grofs sein, etwa gleich $+e$ und $-e$. Dann ist das von beiden herrührende Potential (vgl. oben) auf der inneren Kugel also $V = e/r - e/r' = e(r' - r)/rr'$. Daraus folgt $c = e/V = rr'/(r' - r)$; q. e. d.

3) Parallele Flächen. Bei relativ sehr kleinem Abstande a ist, wenn f die Fläche bedeutet, genähert $c = f/(4\pi a)$; denn man kann diese als Teile von unendlich grofsen Kugeln betrachten. Die Plattendicke, sowie die nach den Rändern zunehmende Dichtigkeit der Ladung bringen um so gröfsere Korrektionen, je weniger a gegen f verschwindet.

4) Kreisplatten-Kondensator vom Radius r. Genähert, wenn a sehr klein ist, $c = r^2/4a$. Genauer ist (d = Plattendicke):

$$c = \frac{r^2}{4a} + \frac{r}{4\pi}\left(\lg\text{nat}\frac{16\pi r(a+d)}{a^2} - 1 + \frac{d}{a}\lg\text{nat}\frac{a+d}{d}\right). \qquad 1.$$

5) Schutzring-Kondensator. Darunter versteht man eine Kreisplatte als Kollektor, unter Belassung eines schmalen Luftringes umgeben von einer weiteren Platte, gegenüber gestellt einer parallelen, grofsen abgeleiteten Platte. Die Kreisplatte und die Schutzplatte werden zu gleichem

Potential geladen; die letztere vermindert hierbei die Ungleichmäfsigkeit der Ladung an den Rändern um so mehr, je dichter sie umschliefst. Als Ladungsmenge gilt aber nur die Ladung der Kreisplatte. r sei der Radius der Kollektorplatte, r' der innere Radius des Schutzrings, $b=r'-r$ die Furchenbreite.

Näherungsformel: $c=(r+r')^2/(16a)$.

Genauer ist:

$$c=\frac{(r+r')^2}{16a}-\frac{r+r'}{2\pi}(\beta\,\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{lgnat}\cos\beta), \qquad 2.$$

wo $\beta=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}b/a$. Die Formel setzt b klein gegen die Plattendicke voraus. Eine genaue Formel bei Kirchhoff.

Kirchhoff, Abhandl.; Formel 1: S. 112, wo der Abstand aber $=2a$ gesetzt ist, und Formel 2: S. 117. Eine andere Formel bei Maxwell, Elektr. I, § 201.

6) Cylinder-Kondensator von der Länge l, dem inneren Radius r, dem äufseren $r+a$. Wenn l grofs gegen r, so ist $c=\frac{1}{2}l/\mathrm{lgnat}\left(1+\frac{a}{r}\right)$; ist auch a klein gegen r, so wird $c=\frac{1}{2}lr/a$.

Ein Cylinder, den man verschieden tief in einen anderen einschiebt, ist für variabele Kapacitäten bequem.

7) Die reciproke elektrostatische Kapacität ist bei beliebiger Gestalt gleich der mit 4π multiplicirten Gröfse, welche S. 346 Widerstandskapacität genannt ist, wenn man den Kondensator in eine grofse Flüssigkeitsmenge eingetaucht denkt und die beiden Platten als Elektroden ansieht.

Eine elektrostatisch in cm gemessene Kapacität gibt, durch 900 000 geteilt, die Kapacität in Mikrofarad (Anh. 27).

II. Mit dem Elektrometer.

Man beachte, besonders bei kleinen Kapacitäten, die Bemerkungen S. 511 und zu Anfang dieses §. Die zu vergleichenden Leiter müssen so aufgestellt sein, dafs sie sich nicht gegenseitig influenziren.

Schnelle Beruhigung der Elektrometerschwingungen läfst sich durch passendes Ein- und Ausschalten von Elementen in die Erdleitung des geeigneten Elektrometer-Teils erreichen.

1. Vergleichung durch Ladungs-Teilung. Der Leiter I wird, mit dem Elektrometer (Kapacität γ) verbunden, zum Potential V geladen. Der vorher abgeleitete Leiter II wird zugeschaltet: das Potential sinke auf V'. Dann ist

$$c_2:(c_1+\gamma)=(V-V'):V'.$$

Die Methode eignet sich für grofse Kapacitäten, bei denen γ einen geringen Einflufs hat. Sie stellt erhebliche Anforderungen an Isolation.

Die Kapacität γ eines Elektrometers läfst sich gerade

so durch Ladungs-Teilung mit der eines Leiters, z. B. eines Kondensators, vergleichen.

Kapacitäten, namentlich des Quadrantelektrometers, auch der Zuleitungen etc. werden leicht unterschätzt. Eventuell ist auch auf die Veränderlichkeit von γ mit der Ablenkung zu achten.

2. Vergleichung durch Gegenstellen. Man schliefse eine vielpaarige galvanische Säule durch einen grofsen Widerstand (Rheostat) R und verbinde die Leiter I und II je mit einem Ende von R. An beliebiger Stelle von R sei eine Erdleitung anzubringen. Wird diese so angelegt, dafs nach der Abtrennung der Leiter deren Ladungen sich bei gegenseitiger Verbindung neutralisiren, so verhalten sich die Kapacitäten umgekehrt wie die beiderseitigen Teile von R. Vgl. auch 3.

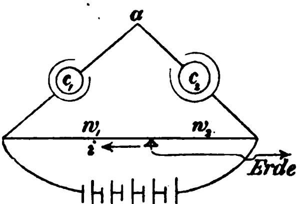
Die Kapacität des Elektrometers, an welchem man die Neutralisirung prüft, kommt hier nicht in Betracht.

Beweis aus **80** I 4.

Die Methode läfst sich auf verschiedene Weise modificiren. Man kann z. B. die Leiter an die Pole der offenen Säule anlegen und die Erdleitung an der letzteren so anbringen, dafs sie die Elementenzahl im Verhältnis $c_1:c_2$ teilt.

Auch kann man, namentlich bei dem Vergleich nahe gleicher Kapacitäten, dem einen Pol der offenen Säule noch Elemente zufügen, die durch einen Widerstand geschlossen sind. Indem man von diesem an passender Stelle ableitet, lassen sich die Potentiale genau in ein solches Verhältnis bringen, dafs die Ladungen sich neutralisiren. Über die Ausführung vgl. Lebedew, Wied. Ann. 44, 289. 1891.

3. Vergleich von Kondensatoren. Man schiebt den Erdkontakt (Fig.) so, dafs bei der Verbindung von a mit dem vorher abgeleiteten Elektrometer kein Ausschlag entsteht, dann ist



$$c_1:c_2 = w_2:w_1.$$

Man benutzt eine vielpaarige Säule und einen grofsen Widerstand. Vor der Verbindung mit der Säule sind alle Teile zu entladen.

Beweis: Die Potentiale der äufseren Belegungen sind $-iw_1$ und $+iw_2$. Ist p das gemeinsame Potential auf c_1 und c_2, so sind die Ladungen der letzteren $(p+iw_1)c_1$ und $(p-iw_2)c_2$. Da die Summe wegen der Isolirung Null sein mufs, so folgt $p(c_1+c_2)=i(w_2c_2-w_1c_1)$, woraus für $p=0$ folgt $w_1c_1=w_2c_2$.

Zur Kalibrirung eines gut isolirten Kapacitätssatzes eignen sich Nr. 2 u. 3.

III. Mit dem ballistischen Galvanometer.

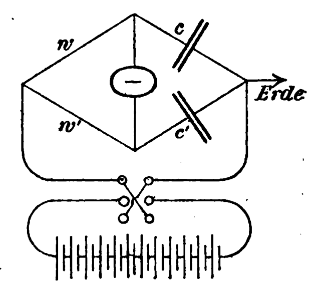
Diese Methoden geben nur bei grofsen Kapacitäten gute Resultate.

4. Vergleichung durch Einzelentladung. Man ladet die Kondensatoren zu gleichem Potential und entladet sie einzeln, bei grofser Spannung unter Einschaltung eines grofsen Widerstandes, durch dasselbe Galvanometer (**109**). Die Kapacitäten verhalten sich wie die Ausschläge. Das gleiche Potential liefert eine galv. Säule (S. 350 bis 352), wobei man mit Vorteil die Multiplikationsmethode (**110**) anwenden kann. Leidener Flaschen können auch mit der Elektrisirmaschine zu gleichem Potential geladen werden, indem man jene während der Ladung mit einander verbindet, oder indem man sie an ein Elektrometer legt.

5. Prüfung auf Gleichheit durch Gegenstellen. Die Ladung erfolgt auf gleiches Potential mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Gleichheit der Ladungsmengen wird mit dem Galvanometer geprüft, durch welches beide Kondensatoren, nach ihrer Abtrennung von der Quelle, gleichzeitig entladen werden.

Sind die Kapacitäten nicht genau gleich, so kann man ähnlich wie unter II 2 die Spannungen mefsbar auf ein anderes Verhältnis reguliren. Wird dabei durch Ausprobiren gefunden, dafs das Galvanometer keinen Ausschlag gibt, wenn das Spannungsverhältnis $= V_1/V_2$ ist, so gilt für die Kapacitäten $c_1 : c_2 = V_2 : V_1$.

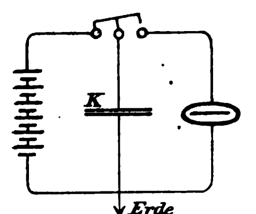
6. Vergleichung in der Wheatstone'schen Brücke. Werden w und w' so regulirt, dafs beim Kommutiren des Gesamtstromes kein Ausschlag entsteht, so ist $c : c' = w' : w$. w und w' können zusammen aus einem Draht mit Schleifkontakt bestehen. Siehe auch V 11.



Absolute Kapacität.

Durch das Galvanometer. Die Entladung (vgl. Nr. 4) liefert die Kapacität c in elektromagnetischem Mafse (Anh. 27), wenn die ballistische Galvanometerkonstante und die el. Kraft E der ladenden Säule (Normalelemente, Akkumulatoren; s. **80** II) bekannt sind. Die El.-Menge Q in A-sec und E in V gibt c in Farad.

7. Eine Wippe mit drei Kontakten, etwa Quecksilbernäpfen, gestatte, die eine Belegung des Kondensators K entweder mit dem einen Batteriepol oder mit der einen Galvanometerklemme zu verbinden, während die anderen Enden der drei Instrumente ein für alle mal an Erde (Gas- oder Wasserleitung) liegen.



Man läfst den Kondensator durch Verbindung mit der Batterie sich laden, verbindet ihn dann (um vom Rückstand unabhängig zu sein, kurz) mit dem ruhenden Galvanometer und beobachtet den ersten Ausschlag ε. Wenn die el. Kraft der Batterie $=E$ und der ballistische Reduktionsfaktor des Galvanometers $=\mathfrak{P}$, so ist

$$c = \frac{\mathfrak{P}}{E} \cdot \varepsilon.$$

Denn die Entladungsmenge Q ist einerseits $= c \cdot E$, andrerseits $= \mathfrak{P} \cdot \varepsilon$.

$\mathfrak{P}$ wird nach **109** I ermittelt; vgl. ebendort den Einflufs der Dämpfung. E wird aus der Anzahl n der Elemente und der el. Kraft e des einzelnen Elements als $E = n \cdot e$, z. B. für Akkumulatoren $E = n \cdot 2{,}01$ V berechnet.

Die Messungen lassen sich leicht wiederholen, auch unter Anwendung der Multiplikationsmethode (**110**), wenn die Pole der Batterie oder des Galvanometers sich durch die Wippe bequem vertauschen lassen.

8. Nach Maxwell. E und die Galvanometerkonstante fallen heraus bei folgendem Verfahren. Man schliefst die Säule durch das Galvanometer und einen gegen ihren inneren Widerstand sehr grofsen Widerstand R; der konstante Ausschlag sei $= \varepsilon_0$. Der mit derselben Batterie geladene Kondensator gebe bei der Entladung durch das Galvanometer den Ausschlag ε. Der Widerstand Säule + Galvanometer sei $= W$, die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel $= \tau$, das Dämpfungsverhältnis $= k$ und $\varLambda = \lg\text{nat}\, k$ (**27**). Dann ist

$$c = \frac{\tau}{\pi} \frac{1}{R+W} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\varLambda}$$

(Tab. 29). Bei gröfseren Ausschlägen wird ε auf den doppelten Sinus des halben Winkels, ε_0 auf die Tangente corrigirt (**25**; Tab. 28).

Verfügt man nicht über hinreichenden Widerstand R, so kann man bei der Bestimmung von ε_0 die Elemente gruppenweise in gleicher Zahl parallel schalten. Der obige Ausdruck ist dann durch die Anzahl der Gruppen zu dividiren. Oder man legt eine Abzweigung an das Galvanometer; vgl. **86.**

τ in sec, R und W in Ohm liefern die Kapacität in Farad (Anh. 27). 1 Mikrofarad $= 10^{-6}$ Farad $= 10^{-15}$ el. magnetischen $= 9 \cdot 10^5$ el. statischen [C.G.S]-Einheiten.

IV. Mit Dauerausschlägen durch rasch wiederholte Ladung und Entladung.

Wenn ein Kondensator c mittels einer selbstthätigen Wippe in rascher Folge Nmal/sec von der el. Kraft E geladen und durch ein Galvanometer entladen wird (Fig. vor. S., wo oben anstatt der umlegbaren Wippe ein durch Federkraft oscillirender Doppelkontakt zu denken ist), so ist die mittlere Stromstärke in diesem gleich $E \cdot cN$; d. h. der so behandelte Kondensator verhält sich ähnlich wie ein Widerstand $1/(cN)$ in einem Leitungskreise, der sonstige Widerstände nicht enthält (vgl. übrigens unten). Hiernach läfst sich die Messung einer Kapacität auf die Methoden der Widerstandsbestimmung zurückführen. Die Mefswiderstände werden induktions- und kapacitätsfrei vorausgesetzt (**80** IV).

Bei sehr raschem Gang der Wippe wird die ohne Rückstandsbildung geltende Kapacität gemessen; verschiedene Schwingungszahlen liefern ein Urteil über den im ersten Augenblick sich bildenden Rückstand.

Ladungs- und Entladungszeit. Vorausgesetzt wird jedoch die Innehaltung der Grenze von N, oberhalb deren die Ladung zum vollen Potential und die Entladung bis zum Potential Null nicht mehr stattfindet. Die Zeit, in der ein Potentialunterschied auf seinen $x$ten Teil sinkt, wird durch $t = wc \cdot \lg\text{nat}\, x$ dargestellt (**94a** u. Anh. 27), also mufs die Berührungsdauer um so gröfser sein, je gröfser die Kapacität und der Galvanometerwiderstand ist. Für $x = 1000$ wird $t = 6{,}9 \cdot wc$, beträgt also z. B. für $w = 10\,\Theta$ und $c = 10^{-6}$Far $t = 6{,}9 \cdot 10^{-5}$ sec. Es reicht demnach meistens eine sehr kurze Zeit aus. Vgl. über Selbstinduktion noch Anh. 28.

Als Wippe ist eine elektromagnetisch angeregte schwingende Feder oder Stimmgabel mit geglühter Platinspitze in reinem Quecksilber geeignet; zur Bestimmung ihrer Schwingungszahl am besten das phonische Rad (**57**, 7).

9. Bestimmung nach Siemens. Zeigt das Galvanometer (Fig. vor. S.) die Stromstärke i (z. B. $i = \mathfrak{C}\varepsilon$, wenn $\mathfrak{C}$ der Reduktionsfaktor und ε der Ausschlag; **89**), so ist nach dem vorigen $i = EcN$, also $c = i/(EN)$.

Die absolute Messung von i kann ersetzt werden dadurch,

dafs man dieselbe Batterie E durch das Galvanometer (γ) und einen grofsen vorgeschalteten Widerstand R schliefst. Der Ausschlag sei $=\varepsilon_0$, dann ist offenbar

$$c = \frac{1}{N} \frac{1}{R+\gamma} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

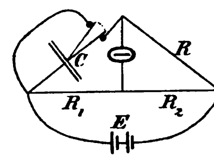
$\varepsilon/\varepsilon_0$ wird vorteilhaft nicht weit von 1 genommen, weil dann die Korrektionen auf die Tangente etc. unerheblich wirken. Über das Verfahren bei mangelndem grofsen R s. III 8.

Um Kondensatoren zu vergleichen, genügt es, die zugehörigen beobachteten Ausschläge durch einander zu dividiren.

Die Kapacitäten der Zuleitungen sind ev. besonders zu ermitteln und in Rechnung zu stellen.

Siemens, Pogg. Ann. 102, 66. 1857. Vgl. auch die Umkehrung der Methode **94a**, 5.

10. Nullmethode (Maxwell). Dieses Verfahren gibt wohl die genauesten Resultate. Man schaltet den Kondensator wie in der Figur in eine Brückenverzweigung und gleicht die Widerstände bis zur Stromlosigkeit der Brücke ab, d. h. so, dafs die Ladeströme des Kondensators den konstanten Strom kompensiren, dann ist genähert



$1/(cN):R=R_1:R_2$, also

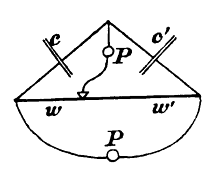
$$c = \frac{1}{N} \frac{R_2}{R R_1}.$$

Genauer tritt rechts noch der Faktor hinzu (J. J. Thomson), wenn γ der Galvanometer- und w der Batteriewiderstand ist,

$$\frac{1-R_2^2/[(R_1+R_2+w)(R+R_2+\gamma)]}{[1+R_2/R\cdot w/(R_1+R_2+w)][1+R_2/R_1\cdot \gamma/(R+R_2+\gamma)]}.$$

Maxwell, Electr. II, § 775; J. J. Thomson, Phil. Tr. 174, 707. 1883; Klemenčič, Wien. Ber. 89, 298. 1884; Himstedt, Wied. Ann. 29, 560. 1886; 33, 1. 1888; über die Ausführung auch Dittenberger u. Grüneisen, ZS. f. Instr. 1901, 111.

V. Vergleichung durch Wechselströme mit dem Telephon.



11. Die beiden P bedeuten ein Induktorium und ein Telephon. Wenn das letztere schweigt oder als optisches Telephon keinen Ausschlag gibt, so ist, wie unter Nr. 6, $c:c'=w':w$ (Palaz). w und w' sollen induktionsfrei sein.

12. Über Vergleichung einer Kapacität mit einem Selbstinduktions-Koefficienten s. **117**, 4 u. 5. Da der letztere konstanter als die elektrostatische Kapacität ist, kann die Methode vorteilhaft sein.

Siehe über Methoden auch Heydweiller, El. Messungen S. 202 ff.

VI. Aus dem Widerstande des mit einem Leiter gefüllten Kondensators.

13. Kann der Kondensator, soweit Kraftlinien merklich durchgehen, mit einer Flüssigkeit vom bekannten Leitvermögen $\varkappa$ gefüllt oder in sie eingetaucht und der nun zwischen den Platten vorhandene Leitungswiderstand w gemessen werden (**69**), so folgt für Luft als Dielektrikum in elektrostatischem Mafs

$$c = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{w\varkappa}.$$

Vgl. S. 525. — Auf kleine Kapacitäten wird die Methode angewandt werden können. — Wegen der hohen Diel.-Konstante wässriger Lösungen sind andere Flüssigkeiten vorzuziehen.

Kalibrirung eines Mefs-Kondensators von veränderlicher Kapacität (Nernst).

Einen solchen Kondensator (K) kann man herstellen, indem man in die Luftschicht eines Platten-Kondensators eine mit einer Längenteilung versehene (Glas)-Platte von höherer Dielektricitätskonstante (**133**) mehr oder weniger tief einschiebt. Besser wird, um Einflüsse der Umgebung auf die Kapacität zu vermindern, eine der Platten durch eine Doppelplatte ersetzt, welche die andere einhüllt, und mit einer Doppelglasplatte gearbeitet. Am besten wird ein mit einzuschiebendem Glascylinder versehener oder selbst verstellbarer Cylinder-Kondensator sein.

Zur Kalibrirung dient ein ähnlicher Hilfskondensator (H) und ein kleiner Kondensator (c) von konstanter Kapacität, den man ab- oder zuschalten kann. Man stellt K und H auf Gleichheit ein (siehe z. B. oben V) und liest K ab. Dann fügt man zu H die Kapacität c, stellt K wieder ein und liest ab. Nun entfernt man c, stellt zunächst H wieder ein, fügt dann c abermals zu H, verstellt K u. s. w. Den Verschiebungen von K entspricht jedesmal ein konstanter Zuwachs der Kapacität. Eine Kurve oder Tabelle nimmt diese auf.

Nernst, ZS. f. phys. Ch. 14, 639. 1894. Vgl. auch **133** I.

133. Dielektricitätskonstante (Faraday 1837).

I. Mit dem Kondensator.

Die Kapacität eines Kondensators ist cet. par. der Dielektricitätskonstante oder dem specif. Induktionsvermögen D der isolirenden Zwischenschicht, des „Dielektrikums", proportional. D wird für Luft $=1$ gesetzt. Ist also c_0 die Kapacität mit Luft, c diejenige mit einem anderen Dielektrikum von der D.-K. D, so ist $D = c/c_0$. Gase bezieht man auch wohl auf den leeren Raum als Einheit. Einige D.-Konstanten s. Tab. 36.

Eine D.-Konstante wird also gemessen durch das Verhältnis zweier Kapacitäten (**132**). Die Auswahl der Methoden ist wegen des Leitvermögens der Dielektrika beschränkt. Auf die hieraus entstehenden Fehler hat man hauptsächlich zu achten. Man verringert sie durch raschen Wechsel der Ladung und Entladung.

Die Proportionalität zwischen Kapacität und D.-K. ist daran geknüpft, daſs die Kraftlinien ganz im Dielektrikum verlaufen. Cylinder-Kondensatoren, deren äuſsere Belegung abgeleitet wird, lassen diese Bedingung besser erfüllen als Platten-Kondensatoren.

Kapacitäten der Zuleitungen sind ev. von den gemessenen Gröſsen abzuziehen.

Vollkommene Isolatoren.

Nach den Methoden in **132**.

Flüssigkeiten.

1) Man vergleicht den Versuchskondensator, einmal Luft, das andere Mal die Flüssigkeit enthaltend, mit einem zweiten, konstanten Kondensator von ähnlicher Kapacität. Um die obige Bedingung zu erfüllen, kann man nötigenfalls den Kondensator ganz in die Flüssigkeit untertauchen. Zur Messung bequem sind z. B. die Methoden **132** V.

Gase (Boltzmann) verlangen, da ihre D.-K. wenig verschieden ist, eine Nullmethode: etwa **132** Nr. 2 oder 10.

Tropfbare Flüssigkeiten s. u. a. bei Silow, Pogg. Ann. 158, 306. 1876; Palaz, J. de phys. (2) 5, 370. 1885. Über Gase und Dämpfe: Boltzmann, Pogg. Ann. 155, 403. 1875; Klemenčič, Wien. Ber. 91, 712. 1885; Lebedew, l. c.

Feste Körper.

2a) Einen schmelzbaren Körper kann man wie eine Flüssigkeit behandeln, indem man ihn um den eingetauchten Kondensator erstarren läſst.

2b) Platten-Verfahren. Der Körper wird als Scheibe zwischen die parallelen, reichlich kleineren Platten eines Luftkondensators gebracht. Der Kondensator von R. Kohlrausch

läfst Platten leicht auswechseln und parallel stellen. Je relativ kleiner der Plattenabstand, desto mehr verschwinden die Fehler, welche der Methode wegen des rückwärts verlaufenden Teiles der Kraftlinien anhaften.

Bedeutet a den Plattenabstand des Kondensators (klein gegen den Radius), c_0 die Kapacität mit Luft, c die Kapacität mit eingeschobenem Körper von der Dicke d (**21** II), so ist

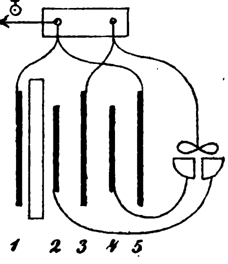
$$\frac{1}{D} = 1 - \frac{a}{d}\frac{c - c_0}{c}.$$

Beweis. Es ist $c_0 = \frac{1}{4} r^2/a$ (**132** I). Die Scheibe des Dielektrikums wirkt wie eine Luftschicht von der Dicke d/D. Daneben ist noch eine Luftdicke $a - d$; also $c = \frac{1}{4} r^2/(a - d + d/D)$. Durch Division fällt r heraus; s. Boltzmann, Pogg. Ann. 151, 482 u. 531. 1874.

3) Platten-Verschiebung. Man vermeidet die Messung von a und die Korrektion wegen der Zuleitungen, wenn die eine Kondensatorplatte parallel mefsbar verschoben werden kann. Nach Einbringen der festen Platte sei eine Abstandsvermehrung um e nötig, um die frühere Kapacität herzustellen. Dann ist (vgl. den obigen Beweis)

$$D = d/(d - e).$$

Auch auf Flüssigkeiten, welche man in ein zwischen den Platten stehendes planparalleles Gefäfs eingiefst, ist die Methode anwendbar.



Unter Anwendung eines Hilfskondensators kann man eine der Nullmethoden von **132** gebrauchen.

4) Eine besondere Form der Nullmethode (Gordon, Phil. Trans. 1879, 417) ist durch fünf äquidistante Kondensatorplatten gegeben, von denen eine (Nr. 1) verschiebbar ist. 1 und 5 sind abgeleitet. 3 ist mit einem Pol eines Induktionsapparates verbunden, dessen anderer Pol abgeleitet ist, sowie mit der Nadel eines Elektrometers. Die Schaltung des letzteren entspricht dem Dynamometer in der Wheatstone'schen Brücke Fig. S. 416. Ist Nr. 1 so eingestellt, dafs die Nadel ruhig bleibt, so verhalten sich die Kapacitäten (1,2):(2,3)=(4,5):(3,4). Die Einstellung wird mit und ohne dielektrische Platte gemacht; die Verschiebung ist $= e$. Je gröfser D, desto empfindlicher wirken Einstellungs-Fehler.

An Stelle des Elektrometers kann man ein Telephon anwenden (Winkelmann).

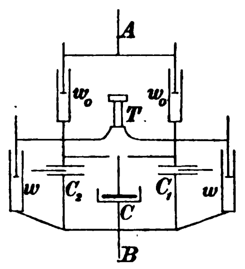
Über Anwendung von nur 3 Platten s. Winkelmann, Wied. Ann. 38, 161. 1889; vgl. jedoch dazu: Cohn, ib. 46, 135. 1892. Über Anwendung des Differentialinduktors: Elsas, ib. 44, 654. 1891.

Die Resultate der obigen Methoden können schon durch Spuren von Leitung erheblich gefälscht werden.

Unvollkommenere Isolatoren.

5) Mit Kompensation des Leitvermögens (Nernst).

C ist der Versuchskondensator, bestehend aus einer Metallplatte von konstanter Stellung zu dem Boden eines abgeleiteten Metallgefäfses, welches mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, mit einer Flüssigkeit von bekannter D.-K. D_0 (Xylol 2,36; Tab. 36) und endlich mit Luft gefüllt wird. Letzteres geschieht, um die Kapacität der Zuleitungen etc. c' zu eliminiren, soweit sie von Kraftlinien herrührt, die aufserhalb der Flüssigkeit verlaufen. C_1 ist der Vergleichs-Mefskondensator aus zwei Metallplatten mit einschiebbarer Glasplatte (132, S. 531), C_2 ein konstanter Hilfskondensator. T ist ein Telephon. Bei A und B werden Wechselströme eines kleinen Induktoriums eingeführt.



w_0 und w_0 bedeuten zwei gleiche, gleichgestaltete Widerstände, bei Nernst Flüssigkeitssäulen mit Elektroden. Die Gleichheit wird daran erkannt, dafs, wenn das Telephon schweigt, Vertauschung der beiden w_0 keine Änderung bewirkt. w und w sind zwei Flüssigkeitswiderstände, die durch Elektrodenverschiebung oder mittels Verengerung der Säule durch einen verstellbaren Stift geändert werden können; sie sind nur bei der Untersuchung schlecht isolirender Körper nötig. Über die Flüssigkeit in w s. 96, S. 413.

Man schaltet C luftgefüllt zu C_2 und stellt C_1 ein. Man schaltet dann C zu C_1 und verstellt C_1 wieder bis zum Schweigen des Telephons. Diese Verschiebung mifst das Doppelte der Kapacität c des Kondensators einschl. der Zuleitungen.

Ebenso wird die Kapacität c_f nach Beschickung des Troges mit der Flüssigkeit von der unbekannten D.-K. D gemessen. Hat diese Flüssigkeit ein Leitvermögen, so ist das Telephon zunächst nicht zum Schweigen zu bringen. Man schaltet dann auf der Gegenseite durch Probiren eine solche Länge von w aus, dafs das Tonminimum wieder gut ist. Ein Leitvermögen

wie dasjenige eines guten destillirten Wassers ist so noch zu kompensiren.

Gerade so sei nach Füllung des Troges C mit der Aichflüssigkeit D_0 die Kapacität $=c_0$ gefunden. D ergibt sich dann aus der Formel

$$D-1=(D_0-1)\cdot(c_f-c)/(c_0-c), \qquad 1.$$

worin man für die c die entsprechenden (ev. der Kalibrirung entsprechend nach S. 531 korrigirten) Verschiebungen in C_1 setzt.

Folgt aus $c=\gamma\cdot 1+c'$, $c_f=\gamma\cdot D+c'$, $c_0=\gamma\cdot D_0+c'$, wo c' die Kapacität der Zuleitungen bedeutet.

Erdleitung sowie eine Berührung mit der Hand ist zu vermeiden, Symmetrie und Konstanz der Zuleitungen zu beachten.

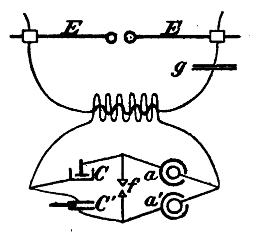
Je nach der Gröfse der D.-K. kann man Tröge von verschieden grofser Luftkapacität anwenden.

Über direkte absolute Messung, über Fehlerquellen und Vorsichtsmafsregeln vgl. Nernst, ZS. f. phys. Ch. 14, 622. 1894; Turner, ib. 35, 385. 1900.

Bessere Leiter.

6) Mittels sehr schneller Schwingungen (Nernst).

An die Elektroden E eines Funkeninduktors ist ein Nebenschlufs angelegt, der eine Spule (10 Windungen) und einen Glasplattenkondensator g enthält. Die bei den Funkenentladungen in diesem Zweige entstehenden elektrischen Schwingungen von einigen Millionen/sec induciren eine über die Spule geschobene Sekundärrolle (32 Windungen). Die Rolle dient als Stromquelle in der Brückenverzweigung, deren Zweige a und a' aus ungefähr gleichen Kondensatoren (Leidener Flaschen) bestehen, während C den mit dem zu messenden Dielektrikum zu versehenden Kondensator und C' einen mefsbar zu regulirenden Vergleichskondensator (vgl. Nr. 5 und S. 531) vorstellt.



Als Indikator der Stromlosigkeit in der Brücke dient eine Funkenstrecke f zwischen sehr fein einstellbaren, auf einander senkrechten Platinschneiden.

Stromlosigkeit beweist wieder die Proportionalität der Paare von Brückenzweigen. Man verfährt nun wie unter Nr. 5, füllt C mit Luft, mit einer Aichflüssigkeit und mit der zu messenden Flüssigkeit und rechnet nach Formel 1.

Ein Leitvermögen, wie von einem schlechten destillirten Wasser ($\varkappa\cdot 10^6=20$), macht sich noch nicht störend bemerklich.

Über das Nähere vgl. Nernst, Wied. Ann. 60, 600. 1897.

7) Aus der Dauer elektrischer Schwingungen.

Wenn ein Kondensator c sich auf einem Wege vom Selbstinduktionskoefficienten S (**117**) entlädt, so treten zwischen den Kondensatorplatten elektrische Schwingungen von der Schwingungsdauer $\tau = 2\pi\sqrt{cS}$ auf; Anh. 28. τ ist also cet. par. proportional $\sqrt{c}$. Über Hervorbringung, Messung und Verwendung der Schwingungen zur Ermittelung von c und D s. Schiller, Pogg. Ann. 152. 535. 1874.

8) Aus der Entladungszeit eines Kondensators (Cohn u. Arons).

Die Zeit t, in der die Ladung eines durch einen Widerstand w geschlossenen Kondensators c auf ihren p^{ten} Teil sinkt, ist $t = cw \lg \text{nat} p$ (**94a** 5). Mittels des Helmholtz'schen Pendelunterbrechers (**109** III) läfst t sich messen. Cohn u. Arons, Wied. Ann. 28, 454. 1886.

II. Durch Kraftwirkungen.

Die gegenseitige Kraftwirkung zweier auf festem Potential erhaltener Leiter ist proportional der Diel.-Konstante des Mittels, in welchem sie sich befinden.

9) An einem passend gebauten Quadrantelektrometer in Doppelschaltung (**127**, II) beobachtet man die durch ein konstantes Potential (Daniell, Akkumulatoren) hervorgebrachten Ausschläge bei Füllung mit Luft bez. mit der Flüssigkeit. Die auf Proportionalität mit dem Quadrat der Potentialdifferenz korrigirten Ausschläge (**129**) stehen im Verhältnis der D.-Konstanten. Die Nadel ist an einem feinen Metalldraht aufgehängt, der zugleich als Zuleitung dient (Silow).

Bei Spuren von Leitung stört die Polarisation; daher ladet man besser mit Wechselströmen (**96**; Induktionsapparat, rotirender Kommutator) und kann dann selbst Körper wie Alkohol, Wasser, Lösungen bis $\varkappa = 10^{-5}$ messen (Cohn u. Arons). Zur Eliminirung der Schwankungen des Potentials dient ein dem ersten parallel geschaltetes, gleichzeitig abgelesenes, gewöhnliches Elektrometer. Flüssigkeitsströmungen durch Temperaturschwankungen, Verdampfung etc. sind sorgfältig zu vermeiden.

Silow, Pogg. Ann. 156, 389. 1875; Cohn u. Arons, Wied. Ann. 33, 13. 1888; Tereschin, ib. 36, 792. 1889; Heerwagen, ib. 48, 35. 1892; Smale, ib. 57, 215. 1896.

III. Aus der Länge elektrischer (Hertz'scher) Wellen.

Nach Maxwell ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer el. Wellen in einem Mittel proportional $1/\sqrt{D}$. Ist die Wellenlänge der-

selben Schwingung in Luft $=\lambda_0$, in dem Dielektrikum $=\lambda$, so gilt also $D=(\lambda_0/\lambda)^2$, oder auch $D=n^2$, wenn n das Brechungsverhältnis langer Wellen aus Luft in das Mittel bedeutet.

Der ursprüngliche Versuch, aus den Beobachtungen an Lichtwellen das Br.-V. für lange Wellen nach den S. 236 gegebenen Formeln zu extrapoliren (wo z. B. in der Cauchy'schen Formel A den gesuchten Wert darstellen würde), hat sich, im Zusammenhange mit der anomalen Dispersion (S. 236), nur an wenigen Körpern als zulässig erwiesen. Selbst im Gebiet der langen Wellen hängt D noch von der Wellenlänge ab — „elektrische Dispersion" — wenn der Körper auch hier anomale Dispersion besitzt.

Man erzeugt längs einer Doppeldrahtleitung stehende, möglichst homogene Hertz'sche Wellen (**125**) und bestimmt ihre Länge sowohl in Luft wie in dem Dielektrikum aus der Beobachtung von Knotenpunkten oder Schwingungsbäuchen: mittels der an verschiedenen Stellen erhaltenen Fünkchen (Arons u. Rubens), mittels des Bolometers (Rubens, Cohn) oder eines empfindlichen Hitzdrahtinstrumentes (Hertz-Thwing) oder des Aufleuchtens einer Vakuumröhre (Lecher).

Das Verfahren ist auf Körper von gröſserem Leitvermögen anwendbar als die übrigen Methoden, z. B. noch auf verdünnte Salzlösungen.

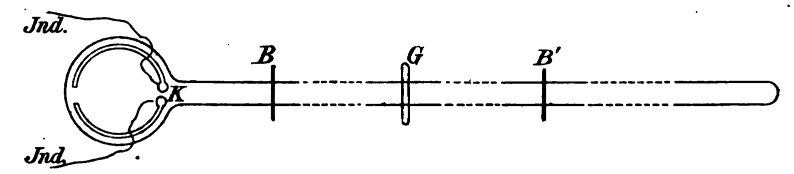
Lecher, Wied. Ann. 41, 850. 1890; Rubens, ib. 42, 154. 1891; Arons u. Rubens, ib. 42, 581 u. 44, 206. 1891; E. Cohn, ib. 45, 370. 1892; Cohn u. Zeeman, ib. 57, 15. 1896; Drude, ib. 55, 633. 1895; 58, 1 u. 59, 17. 1896; 61, 466. 1897; eingehende Beschreibung in ZS. f. phys. Ch. 23, 267. 1897; Auszug ZS. f. Instr. 1898, 351.

10) Anordnungen von Drude; vgl. 125.

Der Wellenerreger (Blondlot; Fig. folg. S.) besteht aus zwei in Petroleum liegenden Halbkreisen ($2r=5$ cm) aus 3 mm dickem Kupferdraht, je mit einem Pol eines Rühmkorff-Induktors verbunden; einem der Halbkreise aber sei die Zuleitung — vgl. auch die Bemerkungen **125** I 1 — nur bis zu ½ mm Abstand genähert, so daſs hier Funken überspringen. Die Entladungen finden zwischen den Kugelenden K von 6 mm Durchmesser mit etwa ½ mm Schlagweite statt. Die Halbkreise sind von einem Drahtkreis umgeben, dessen offene Enden mit einer hinten geschlossenen Doppeldrahtleitung von etwa 1 cm Abstand verbunden sind. Die so längs der Drähte laufenden elektrischen Wellen haben in Luft etwa 37 cm Halbwellenlänge.

Ein fest aufliegender Querdraht B überbrückt — an der Drude-schen Anordnung 7 cm hinter der Aufbiegung der Drahtleitungen — die beiden Drähte, so daſs an dieser Stelle bleibend ein Knoten der stehenden Wellen liegt. Ungefähr 16 cm hinter dieser Brücke liegt auf den Drähten als zweite Überbrückung eine stark evakuirte Geiſsler'sche oder Zehnder'sche Röhre G; sie leuchtet besonders stark auf, wenn kräftige Schwingungen vorhanden sind, also am stärksten, wenn auf der weiteren Strecke eine Stelle leitend überbrückt wird, der vermöge des Ortes von B

und der angewandten Wellenlänge ein weiterer Knoten zukommt. Diese Knoten sollen also in Luft nahe um ein Vielfaches von 37 cm von einander abstehend gefunden werden. Der erste Knoten liegt aber von der Brücke B etwas (bei dem Drude'schen Apparat um 6 cm) weniger entfernt.



Als verschiebbare Brücke dient ein zweiter Querdraht B' über einem Maſsstabe. Beobachtet werden also die Lagen von B', denen das stärkste Aufleuchten entspricht, bez. die Mitten zwischen den Übergangsstellungen, bei denen das Aufleuchten beginnt. Der Abstand benachbarter Lagen bezeichnet je eine halbe Wellenlänge.

1) Man bestimmt die Halbwellenlänge in Luft (λ_0) und demnächst in der zu messenden Flüssigkeit (λ), indem die Drähte durch einen mit dieser gefüllten Glastrog durchgeführt werden. Nach dem früheren ist dann $D = (\lambda_0/\lambda)^2$. λ_0 und λ werden aus mehreren solchen Resonanzlagen abgeleitet, ev. unter Anwendung der Berechnung nach 3 II.

Auch die Stellen schwächsten Leuchtens können in leicht ersichtlicher Weise zur Messung zugezogen werden.

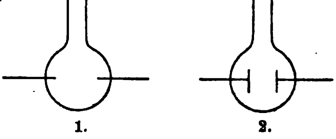
Korrektion wegen des begrenzten Flüssigkeitsquerschnitts. Das gemessene λ fällt wegen der beschränkten Querdimensionen etwas zu groſs aus; das hiermit berechnete D ist also zu vergröſsern. Die empirische Korrektion (Drude) beträgt

für ein gefundenes $D =$	10	20	30	40	50	60	80
im Kasten $3 \times 3{,}5$ cm	+0,8	1,9	2,8	3,3	3,6	3,8	+4,0%
„ „ 5×6 cm			+0,5				+2,1%.

Über Vorsichtsmaſsregeln bei besseren Leitern oder anomal absorbirenden Körpern vgl. Drude l. c.

2) Genäherte Werte von D erhält man mit sehr wenig Flüssigkeit nach Drude folgendermaſsen. Die Flüssigkeit wird in einen kleinen Kondensator (s. unten) eingefüllt. Die an den Enden jetzt offene Doppelleitung wird (auſser durch den festen Bügel B) geschlossen durch eine Überbrückung, einmal mit einem Metalldraht, das andere Mal mit diesem Kondensator. In beiden Fällen stellt man so, daſs die Röhre G maximal aufleuchtet; aus dem Unterschied l der beiden Einstellungen läſst sich D entnehmen, entweder nach einer rein empirischen, nachher

graphisch dargestellten Aichung mit bekannten Flüssigkeiten, etwa Mischungen von Benzol mit Aceton ($D = 2{,}3$ bis 20) oder Aceton mit Wasser ($D = 20$ bis 60); Tabellen bei Drude l. c. Oder man benutzt die von Drude aufgestellte Beziehung $D = a \operatorname{ctg} 2\pi l/\lambda - b$, deren Konstanten a und b empirisch ermittelt werden.



Zwei Kondensatorfläschchen (Fig. nat. Gr.) verschiedener Kapacität, bis in den Hals zu füllen, genügen. Nr. 1 dient für grofse, 2 für kleine D.-K.

Auch flüssig eingefüllte, in dem Fläschchen erstarrte Substanzen können, wenigstens annäherungsweise, bestimmt werden.

Über eine bequeme Anordnung mit posaunenartig mefsbar zu verlängernder Doppelleitung vgl. Drude l. c.

Anhang.

Das auf Längen-, Massen- und Zeiteinheit zurückgeführte „absolute“ Mafssystem mit Anschlufs einiger Gesetze und Erläuterungen.

Um einen Gegenstand, einen Vorgang oder Zustand physikalisch zu beschreiben, ist seine Art und Gröfse anzugeben. Dies geschieht durch eine Zahl, welche ausdrückt, wie oft eine anderweitig definirte Gröfse derselben Art, die Einheit, in der gemessenen Gröfse enthalten ist.

Als Einheit einer Gröfse genügt jede unveränderliche Gröfse derselben Art. Als Einheiten dienen für die Länge und für die Masse die international vereinbarten, durch das Wasser mit einander in Beziehung gesetzten Einheiten des Meter-Gramm-Systems, für die Zeit die Umdrehungsdauer des Erdkörpers, für die Temperatur das Intervall zwischen den Umwandlungspunkten der Aggregatzustände des Wassers.

Solche als unveränderlich zu verbürgende, willkürliche Grundeinheiten lassen sich aber nur für wenige Gröfsen aufstellen. Eine vollständige Mafskunde gibt es erst, seitdem man gelernt hat, die Einheiten der übrigen Gröfsen mittels geometrischer, kinematischer und physikalischer Beziehungen auf wenige Grundeinheiten zurückzuführen, z. B. eine Geschwindigkeit auf Länge und Zeit, eine Kraft auf Geschwindigkeit und Masse, eine Wärmemenge auf den Temperaturgrad und das Wasser oder auf die äquivalente Arbeit und hierdurch auf Kraft und Länge, eine Elektricitätsmenge auf die von ihr auf eine andere Menge ausgeübte Kraft.

Die Einführung dieser „abgeleiteten“ Einheiten bietet nicht nur den Vorteil, dafs die Anzahl der willkürlichen Einheiten eingeschränkt wird, sondern sie dient zugleich dazu, dem mathematischen oder physischen Gesetz, welches zur Definition der Einheit gebraucht wird, eine einfache Gestalt zu geben. Denn jede Ableitung einer Einheit läfst sich benutzen, um die „Konstante“, welche in einem Gesetz die verschiedenen Gröfsenarten ver-

bindet und deren Zahlenwert eben von den Einheiten abhängt, auf den bequemsten Zahlenwert zu bringen.

Der durch einen bewegten Körper zurückgelegte Weg l ist der Geschwindigkeit u und der Zeit t proportional, also $l = \text{Const.}\, ut$, wo der Zahlenwert Const. von den Einheiten abhängt. Würde als Geschwindigkeits-Einheit die Fall-Geschwindigkeit g am Ende der ersten Sekunde gelten, so wäre Const. $= g$. Setzt man aber als Einheit die Geschwindigkeit, bei welcher in der Zeit Eins der Weg Eins zurückgelegt wird, so ist Const. $= 1$, und das Gesetz erhält die einfachste Gestalt $l = ut$.

Das System der abgeleiteten Einheiten hat sich an den elektrischen und magnetischen Gröſsen entwickelt, weil für die meisten von diesen die Aufbewahrung von Grundmaſsen unmöglich ist. Gauſs und Weber zuerst führten diese Gröſsen auf Länge, Masse und Zeit zurück. Das so entstehende System heiſst wohl das absolute[1]) Maſssystem. Und zwar werden vorzugsweise Centimeter, Gramm und Sekunde als Grundeinheiten gewählt und die hierauf zurückgeführten Einheiten heiſsen [cm-gr-sec]- oder [C.G.S]-Einheiten. Werden, um kleinere oder gröſsere Einheiten zu erhalten, für Länge und Masse anstatt cm, gr andere Paare von Grundeinheiten vorgezogen, so bieten die Gauſs'schen Grundeinheiten mm, mg oder andrerseits dm, kg oder endlich m, Tonne den Vorteil, daſs ihr Zusammenhang durch das Wasser gewahrt bleibt.

Das Gramm ist hier als Masse von 1 cm^3 Wasser gemeint, während der gewöhnliche Sprachgebrauch unter Gramm etc. ein Gewicht, d. h. eine Kraft zu verstehen pflegt. Im C.G.S-System hat ein Körper von m gr das Gewicht nicht $= m$, sondern $= gm$, unter g die Schwerbeschleunigung verstanden. Die bei seiner Hebung um die Höhe h verrichtete Arbeit ist $= ghm$, das von ihm durch seine Schwere im Abstande l von einer Drehaxe ausgeübte Drehmoment $= glm$ zu setzen. Dagegen ist im letzteren Falle das Trägheitsmoment des Körpers, welches im statischen Maſssystem gleich $l^2 m/g$ sein würde, hier gleich $l^2 m$.

1) Der Name „absolut" stammt von der erdmagnetischen Intensität. Im Gegensatze zu der früher üblichen nur relativen Messung gab Gauſs in seiner *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* eine auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte absolute Einheit für die Intensität. Ein weiter gehender Anspruch wird mit dem Worte „absolut" nicht erhoben.

Gaufs hatte in seinem ersten diesbezüglichen Aufsatz (Erdmagnetismus und Magnetometer, Schumacher's Jahrbuch 1836; Gaufs' Werke Bd. 5, S. 329) den Magnetismus mittels des Grammes als einer Kraft-Einheit definirt, ist jedoch alsbald zu der Auffassung des Grammes als Masse übergegangen. Zweifellos war dieser für Physik und Technik so bedeutsam gewordene Schritt gerechtfertigt.

Denn da das Gewicht eines Körpers auf der Wechselwirkung mit einem anderen Körper beruht und daher schlechthin gar nicht existirt, da es ferner selbst an der Erdoberfläche um $\frac{1}{2}\%$ veränderlich ist, so kann man nicht das Gewicht eines bestimmten Körpers als Gewichtseinheit aufstellen. Genaue Gewichtseinheiten müfsten mindestens für jede geographische Breite besonders angefertigt werden. Was man mit dem Namen „Gewichtsatz" bezeichnet, ist aber nichts anderes als ein Massensatz; und eine Wägung mit der gewöhnlichen Wage ist keine Gewichts-, sondern eine Massenbestimmung, die auch in der That fast immer den Zweck der Wägung bildet. Der Chemie, dem Handelsverkehr, der Medicin ist es nicht um den Druck der Körper auf ihre Unterlage zu thun, sondern um die Masse, durch welche die chemische Wirksamkeit, der Geld- oder der Nahrungswert u. s. w. bedingt wird.

Innerhalb der Physik ist die Auffassung des Grammes etc. als Masse gröfstenteils durchgeführt. Die Gebiete, in denen die geographische Veränderlichkeit des Gewichts hinter andere Fehlerquellen zurücktritt und wo aus Bequemlichkeit der frühere Gebrauch sich erhalten hat, wie Elasticität, Kapillarität, auch wohl Druck und Arbeitsleistung, werden immer mehr eingeschränkt. In solchen Fällen der Beibehaltung des „statischen" Mafssystems wird die Einheit als Grammgewicht etc. bezeichnet.

Dimensionen. Einheiten, die aus anderen abgeleitet sind, stellen sich vermöge des Gesetzes, welches zur Ableitung benutzt worden ist, als Funktionen ihrer Grundeinheiten dar, die Einheiten des „absoluten" Mafssystems also als Funktionen von Längeneinheit $[l]$, Masseneinheit $[m]$ und Zeiteinheit $[t]$, z. B. die Geschwindigkeit als $[l]:[t]$, die Volumeinheit als $[l]^3$, die Krafteinheit als $[l]\cdot[m]:[t]^2$. Diese Abhängigkeit soll in der Form $[lt^{-1}]$, $[l^3]$, $[lmt^{-2}]$ etc. dargestellt und den Einheiten aller Gröfsenarten zugesetzt werden. Der Exponent von l, m oder t heifst die „Dimension" der Gröfsenart bezüglich Länge, Masse oder Zeit. Siehe Tab. 41.

Der Begriff der „Dimension", bereits von Fourier aufgestellt, schliefst sich in seiner sehr nützlichen Einführung in das Mefswesen an Maxwell und Jenkin an (Reports Brit. Assoc. 1863; Sonderabdruck: Reports of the Comm. on el. Standards, London 1873, S. 59). Er rechtfertigt sich durch die Erwägung, dafs eine Gleichung zwischen benannten Gröfsen nicht nur aussagt, dafs ihre linke und rechte Seite dem Zahlenwerte, sondern auch

dafs sie der Gröfsenart nach gleich sind. Man kann nicht 1 Glas Wasser = 1 Glas Wein setzen; bei der Anwendung des = Zeichens müssen nicht nur die Gläser gleich grofs sein, sondern es müssen entweder beide Wasser oder beide Wein enthalten.

Eine benannte Zahl stellt nun das Produkt aus der reinen Zahl und der ihr zugesetzten Einheit vor; l cm bedeutet $l \times$ die als Längeneinheit angenommene Länge des Centimeters. Drückt man jetzt z. B. das Galilei'sche Gesetz so aus: empfängt eine Masse m in einer Zeit t eine Geschwindigkeit u, so wirkt auf die Masse eine Kraft $k = m \cdot u/t$, so heifst dies nicht nur, dafs k und mu/t numerisch gleich sind, sondern dafs k Krafteinheiten gleich gesetzt werden m Masseneinheiten mal u Geschwindigkeits- durch t Zeiteinheiten; $[k] = [m][u][t]^{-1}$. Da nun ferner bei der Zurückführung der Geschwindigkeit auf Länge und Zeit $[u] = [l][t]^{-1}$ erhalten wird, so entsteht

$$[k] = [m] \cdot [l] \cdot [t]^{-2} = [m]^1 \cdot [l]^1 \cdot [t]^{-2}.$$

In ohne weiteres verständlichen Worten drückt man dies so aus: Die Krafteinheit hat bezüglich der Massen- und Längeneinheit die Dimension +1, bezüglich der Zeiteinheit die Dimension −2.

Es steht auch frei, zu sagen, eine Kraft hat bezüglich Länge, Masse und Zeit die Dimensionen 1, 1 und −2.

Gegen das vorige wird eingewendet, dafs die Multiplikation benannter Gröfsen mit einander keinen ersichtlichen Sinn hat. Wenn dieser Einwand berechtigt wäre, so dürfte man Gleichungen, welche zu Produkten aus solchen Gröfsen führen, überhaupt nicht aufstellen. Dadurch, dafs dieses Multipliciren aber niemals zu einem Widerspruch führt, beweist die Erfahrung, dafs ihm in der Natur ein Sinn innewohnt.

Den Dimensionen einer Gröfsenart kommt aber nicht eine absolute, ein für allemal bestimmte Bedeutung zu, sondern sie hängen im allgemeinen davon ab, welches Naturgesetz zur Ableitung der Einheit benutzt wird. Eine Elektricitätsmenge ε z. B. stellt sich, elektrostatisch aus dem Coulomb'schen Gesetz abgeleitet, dar als $[\varepsilon_s] = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$, elektromagnetisch aber, etwa aus dem Biot-Savart'schen Gesetz abgeleitet, als $[\varepsilon_m] = [l^{1/2} m^{1/2} t^0]$. Die Dimensionen drücken also die gegenseitigen Beziehungen der Gröfsenarten nur in dem gewählten Mafssystem aus, welches demnach in einer zusammenhängenden Betrachtung konsequent durchgeführt werden mufs.

In dem eben angezogenen Falle hat übrigens die Vergleichung der Dimensionen von ε_s und ε_m zu einem fundamentalen Ergebnis geführt. Die Division der beiden Formeln ergibt $[\varepsilon_s/\varepsilon_m] = [l/t]$; das Verhältnis der für eine Elektricitätsmenge in den beiden Systemen entstehenden Ausdrücke hat also die Dimensionen einer Geschwindigkeit, deren Zahlenwert ($300 \cdot 10^8$ cm/sec; vgl. S. 559) nun thatsächlich als „kritische Geschwindigkeit" oder in der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie als die Lichtgeschwindigkeit im Äther auftritt.

Die Dimension ist wertvoll als einfachstes Prüfungsmittel von Formeln auf eine Eigenschaft, welche bei einer richtigen Formel immer vorhanden sein muſs, nämlich auf die Homogenität. Wenn man nämlich die in der Formel vorkommenden Gröſsenarten durch ihre Dimensionen aus einem bestimmten Maſssystem ersetzt, so muſs links und rechts dasselbe entstehen.

Z. B. beträgt die Arbeit, welche von einem elektrischen Strome i, dessen Potentialdifferenz $=e$ ist, in der Zeit t verrichtet wird, $Q=eit$. Die Dimensionen (Tab. 41) aus dem elektromagn. System eingesetzt, erhält man $eit=[l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}]\cdot[l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}]\cdot[t]=[l^2mt^{-2}]$; aus dem elektrostatischen System $[l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}]\cdot[l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}]\cdot[t]=[l^2mt^{-2}]$, also in beiden Fällen die Dimension einer Arbeit (vgl. Nr. 9). — Ferner hängt die Schwingungsdauer t einer Masse vom Trägheitsmoment K mit der Direktionskraft D durch die Gleichung zusammen $t^2:\pi^2=K:D$. Setzt man, nach 12, $K=[l^2m]$ und nach 11a $D=[l^2mt^{-2}]$ ein, so entsteht rechts $[l^2m]:[l^2mt^{-2}]=[t^2]$, wie es sein muſs, da π eine reine Zahl ist.

Die Dimension ermöglicht ferner sofort den Übergang von einer Gruppe von Grundeinheiten, etwa mm, mg, zu einer anderen, etwa cm, gr. Denn wenn eine Grund-Einheit in der abgeleiteten auf der p^{ten} Potenz vorkommt, so ändert sich der Wert der abgeleiteten Einheit im Verhältnis n^p, sobald die Grundeinheit im Verhältnis n geändert wird. Der Zahlwert einer bestimmten Gröſse ändert sich hierdurch also im Verhältnis n^{-p}.

Die Zahl, welche eine Geschwindigkeit l/t darstellt, wird bei dem Übergang von mm zu cm im Verhältnis 10^{-1} geändert, beim Übergang von Sekunde zu Minute im Verhältnis 60^{+1}. Die Zahl für eine Kraft $[lm/t^2]$ ändert sich, wenn man von mm-mg zu cm-gr übergeht, im Verhältnis $10^{-1}\cdot 1000^{-1}=1/10000$ (Tab. 41).

Auch für das technische elektromagnetische Maſssystem, welches mit den Benennungen Ohm, Ampere, Volt, Farad etc. Einheiten für Widerstand, Stromstärke, Spannung, Kapacität etc. enthält, gibt es ein System von Grundeinheiten, nämlich, auſser der Sekunde als Zeiteinheit, den Erdquadranten $=10^9$ cm als Längeneinheit und 10^{-11} gr als Masseneinheit. Stellt eine abgeleitete Gröſsenart sich dar als $[l^\lambda\cdot m^\mu\cdot t^\tau]$, so ist also die Einheit im technischen Maſssystem im Verhältnis $10^{9\lambda}\cdot 10^{-11\mu}$ gröſser als im C.G.S-System.

Z. B. ist eine Stromstärke $=[l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}]$; also die Einheit Ampere $=10^{9/2}\cdot 10^{-11/2}=10^{-1}$ [C.G.S]-Stromeinheiten (vgl. Nr. 24). — Die Arbeits-

einheit 1 Volt-Ampere-Sek. oder Watt-Sek. $=[l^2 m t^{-2}]$ ist gleich $10^{18} \cdot 10^{-11} = 10^7$ [C.G.S]-Arbeitseinheiten.

Die Vorsätze Mega- oder Mikro- (z. B. Megohm oder Mikrofarad) bedeuten 10^6mal gröſsere oder kleinere Einheiten.

Einheiten aus Raum und Zeit.

Die am Schluſs jeder Definition in [ ] gegebenen Ausdrücke bedeuten die Einheit im [C.G.S]-System.

1. **Fläche** $f=[l^2]$. Einheit ist das Quadrat über der Längeneinheit; [cm²].

2. **Raum** $v=[l^3]$. Einheit ist der Würfel über der Längeneinheit; [cm³].

3. **Winkel** $\varphi=[l^0]$. Einheit ist der Winkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist; [Winkel von 57,296° Bogengraden].

Ein Winkel wird in der Mechanik gleich dem zugehörigen Kreisbogen, geteilt durch den Halbmesser, gesetzt. Ein kleiner Winkel ist also seinem Sinus oder seiner Tangente numerisch gleich. — Dimension $=l/l=1$, d. h. von den Grundeinheiten unabhängig.

4. **Geschwindigkeit** $u=[lt^{-1}]$. Die Geschwindigkeit Eins besitzt ein Punkt, der in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurücklegt; [cm/sec].

Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg, geteilt durch die zum Zurücklegen gebrauchte Zeit.

5. **Beschleunigung** $b=[lt^{-2}]$. Einheit ist die Beschleunigung, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um Eins wächst; [cm/sec²].

Wächst die Geschwindigkeit in der Zeit t um die Gröſse u, so besitzt das bewegte Ding eine Beschleunigung $b=u/t$. — Die Fallbeschleunigung beträgt unter 45° geogr. Breite 980,6 cm/sec² oder 9,806 m/sec².

Mechanische Einheiten.

6. **Dichtigkeit** $s=[l^{-3}m]$. Die Einheit besitzt ein Körper, der in der Raumeinheit die Masse Eins hat; [gr/cm³ oder Wasser von +4°].

7. **Kraft** $k=[lmt^{-2}]$. Einheit ist die Kraft, welche der Masse Eins in der Zeit Eins die Geschwindigkeit Eins mitteilt; [cm gr/sec² = 1 Dyne = 0,001020 gr-Gew.].

Das Grundgesetz der Mechanik sagt, daſs eine Kraft k, welche einer Masse m in der Zeit t eine Geschwindigkeit u erteilt, mit den Gröſsen m und u im direkten, aber mit t im umgekehrten Verhältnis steht; also

heifst das Gesetz vollständig $k = C \cdot m \cdot u/t$. Man sagt aber stets: die Kraft ist gleich Masse $\times$ Beschleunigung, setzt also $C=1$. Damit hat man gefordert, dafs für m, u und t gleich 1 auch $k=1$ sei. — Die durch die Anziehung der Erde auf 1 gr ausgeübte Kraft beträgt hiernach unter 45° geogr. Br. 980,6 cm·gr·sec^{-2}. Eine „Dyne" (Clausius) ist also ein wenig gröfser als die Anziehung der Erde auf 1 mg.

8. Druck $p=[l^{-1}mt^{-2}]$. Einheit ist der Druck, bei welchem auf die Flächeneinheit die Kraft Eins kommt; [gr/cm sec^2 oder Dyne/cm^2 = 0,9869·10^{-6} Atmosph.].

Sind Kräfte gleichmäfsig über eine Fläche verteilt, so nennt man Druck die auf die Flächeneinheit (senkrecht) wirkende Kraft. — Eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit s übt in der Tiefe h cm unter der ebenen Oberfläche den Druck ghs cm^{-1} gr sec^{-2} oder Dyne/cm^2 aus, wo für 45° Breite $g = 980{,}6$ ist. — Der Druck von 1 cm Quecksilber ist $= 13{,}596 \cdot 980{,}6 = 13\,332$ und 1 Atm $= 76 \cdot 13\,332 = 1\,013\,200$ Dyne/cm^2.

9. Arbeit, Energie, lebendige Kraft, Wärmemenge $Q=[l^2mt^{-2}]$. Einheit der Arbeit ist die Arbeit, welche die Kraft Eins verrichtet, wenn sich ihr Angriffspunkt nach ihrer Richtung um die Längeneinheit verschiebt; [cm^2 gr/sec^2 = 1 Erg = 1,020·10^{-8} Meterkilogrammgewicht = 2,39·10^{-8} Wasser-gr-Kal.].

Allgemein ist Arbeit = Kraft $\times$ Weg; $Q = kl$. Sind Kraft- und Wegrichtung gegen einander um den Winkel φ geneigt, so tritt $\cos\varphi$ als Faktor hinzu. — Durch Hebung von 1 kg um 1 m (Meterkilogrammgewicht des statischen Mafssystems) wird die Arbeit $1000 \cdot 981 \cdot 100 = 98\,100\,000$ Erg geleistet. — Die elektro-technische Arbeitseinheit „Wattsekunde" oder „Joule" ist $= 10^7$ Erg; vgl. Nr. 30.

Eine Volumvermehrung v unter dem konstanten Druck p bedeutet eine äufsere Arbeit $Q = vp$. Ist der Druck als h cm Quecksilber gemessen, so ist also $Q = 13332\, vh$ Erg. Eine Kubikcentimeter-Atmosphäre entspricht $Q = 13332 \cdot 76 = 1013\,200$ Erg; vgl. Nr. 8.

Arbeitsfähigkeit oder Potentialenergie eines Körpers oder eines Systemes ist die Summe von Arbeiten, welche der Körper oder das System durch Verschiebung unter dem Einflufs der wirkenden Kräfte leisten kann.

Gleichwertig mit Arbeit ist die lebendige Kraft, Bewegungs- oder kinetische Energie $\frac{1}{2}mu^2$ einer Masse m, welche eine Geschwindigkeit u besitzt.

$m \cdot u^2 = [ml^2t^{-2}]$ hat die Dimensionen der Arbeit.

9a. Wärmemenge Eins ist die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge; [1 Erg; vgl. oben].

Die Wasser-gr-Kalorie, der Hubarbeit 427 gr-Gew.$\times$m äquivalent, ist $= 427 \cdot 980{,}6 \cdot 100 = 41\,900\,000$ cm^2 gr sec^{-2} = 4,19 „Wattsekunde" oder

„Joule". Der reciproke Wert $239 \cdot 10^{-10}$ ist das Wärmeäquivalent der [C.G.S]-Arbeitseinheit oder des Erg in gr-Kal.

Arbeit bei der Wärmeausdehnung eines Gases. Ein Gasvolumen v werde bei konstantem Druck p von der absoluten Temperatur T auf $T+1$ erwärmt. Die Ausdehnung ist $=v/T$, die äufsere Arbeit also $=p \cdot v/T$, nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze für eine gegebene Gasmenge eine konstante Gröfse, die man für 1 gr eines Gases mit R und mit dem Namen (individuelle) Konstante des Gases bezeichnet. Es ist also $R=p/(sT)$, wenn $s=1/v$ die zu p und T gehörende Dichtigkeit des Gases (18) ist, für Luft z. B. $R=1013200/(0{,}001293 \cdot 273) = 2870000 \text{ cm}^2 \text{gr/sec}^2$.

Allgemeine Gaskonstante; Arbeit bei der Vergasung. Werden die Betrachtungen nicht auf 1 gr, sondern auf 1 gr-Molekül des Gases bezogen, so verliert die Gaskonstante ihren individuellen Charakter, denn jedes gr-Molekül eines vollkommenen Gases oder Dampfes (z. B. 32 gr Sauerstoff oder 2,016 gr Wasserstoff) hat cet. par. ein gleiches Volumen, nämlich bei 0^0 und 1 Atm 22400 cm^3, bei der abs. Temp. T und dem Drucke p [C.G.S] also $22400 \cdot 1013200/p \cdot T/273 = 83100000\ T/p \text{ cm}^3$ (Avogadro'sches Gesetz). Die bei der Vergasung eines gr-Moleküls unter Gleichgewichtsdruck bei der Temperatur T geleistete äufsere Arbeit beträgt also $831 \cdot 10^5 \cdot T$ Erg, und die hierzu verbrauchte Wärmemenge ist also $831 \cdot 10^5\ T/(419 \cdot 10^5) = 1{,}98 \cdot T$ Wasser-gr-Kal. 1,98 (öfters $=2$ gesetzt) bedeutet hiernach die allgemeine, auf das gr-Molekül bezogene Gaskonstante in kalorischem Mafse. — Dieselbe Zahl gilt für Stoffe, die in Lösung gehen und deren „osmotischer Druck" den Gasgesetzen folgt (van't Hoff).

Bei einem vollkommenen, d. h. bei einem Gase, in welchem die Ausdehnung nicht von einer inneren Arbeitsleistung begleitet ist, stellt die Differenz $c_p - c_v$ der specifischen Wärmen c_p bei konstantem Drucke und c_v bei konstantem Volumen die Wärmemenge dar, welche bei der Ausdehnung der Gasmenge Eins unter konst. Drucke durch 1^0 Temp.-Erhöhung auf äufsere Arbeit verwendet wird. 1,98 ist also gleich jener Differenz, bezogen auf die Erwärmung eines Grammmoleküls.

Zweiter Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie (Clausius). Ein Körper oder ein System von Körpern durchlaufe einen vollkommenen (umkehrbaren) thermodynamischen Kreisprocefs und nehme dabei die in Arbeitsmafs ausgedrückte Wärmemenge Q bei der abs. Temperatur T auf und gebe Q' bei T' ab. Dann ist erstens $Q-Q'$ die von ihm geleistete äufsere Arbeit oder die, in Arbeitsmafs ausgedrückte, in Arbeit umgesetzte Wärmemenge; zweitens gilt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'} \quad \text{oder} \quad \frac{Q-Q'}{Q} = \frac{T-T'}{T} \quad \text{(Carnot'scher Satz).}$$

Eine von den zahlreichen Anwendungen des Satzes siehe in 30.

9b. Die absolute Temperaturskale. Vollkommen läfst die Temperatur sich nicht auf die anderen Gröfsen zurückführen; ein Punkt der Skale mufs willkürlich positiv numerirt werden. Nachdem dies geschehen ist,

liegt aber durch die Anerkennung des Carnot'schen Satzes (v. S.) die ganze Skale fest. Ein Punkt der Skale — z. B. der Siedepunkt des Wassers — werde mit der Zahl T_1 numerirt. Bei dieser Temperatur nehme eine Maschine, die mit vollkommenem Kreisprocefs zwischen T_1 und einer anderen zu bestimmenden Temperatur T_2 — z. B. dem Eispunkt des Wassers — arbeitet, eine Wärmemenge auf und verwandele hierbei den, durch einen Versuch ermittelten Bruchteil $\mathfrak{n}$ dieser Menge in mechanische Arbeit. Dann gilt nach dem vorigen $\mathfrak{n}=(T_1-T_2)/T_1$, also ist hierdurch $T_2=T_1(1-\mathfrak{n})$ bestimmt. Jeder andere Punkt kann durch einen ihm entsprechenden Versuch festgelegt werden. Die Temperatur, welche als untere Grenze des Kreisprocesses alle Wärme in mechanische Arbeit verwandeln läfst, ist der absolute Nullpunkt (W. Thomson 1848).

Diese Definition ist identisch mit der gebräuchlicheren Form: wenn einem vollkommenen Gase (vgl. **18** und **42**) bei den Temperaturen T und T' unter gleichem Drucke die Volumina v und v' oder bei gleichem Volumen die Drucke p und p' zukommen, so verhält sich $T':T=v':v$ oder $=p':p$. Denn diese Proportion führt, auf einen vollkommenen, mit dem Gase vorgenommenen Kreisprocefs angewandt, zu der erstgenannten als Folgerung. Grundsätzlich ist die erste Definition vollkommener, weil über den Gaszustand eines Körpers von vorn herein nichts sicheres ausgesagt werden kann.

10. Leistung $A=[l^2mt^{-3}]$. Die Einheit der Leistung liegt vor, wenn in der Zeiteinheit die Arbeit Eins verrichtet wird; [cm^2 gr/sec^3 = Erg/sec = 10^{-7} Watt = $136\cdot10^{-12}$ Pferdestärke].

Unter Leistung wird die in der Zeiteinheit gethane Arbeit verstanden. — 1 Watt = 10^7 [C.G.S]; 1 Pferdestärke = 75 kg-Gew.m/sec = $735\cdot10^7$ [C.G.S].

10a. Wärmeleitvermögen. Das W.-L. Eins hat ein Körper, wenn bei einem Temperaturgefälle Eins durch den Querschnitt Eins in der Zeiteinheit die Wärmemenge Eins senkrecht hindurchfliefst; [cm gr/(sec^3 × Grad)].

Die Einheit ist, weil die, nicht auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte Temperatur eingeht, nicht in das C.G.S-System einzureihen. — Messung der Wärmemenge in Wattsekunden bez. in Wasser-gr-Kalorien[1]) macht die Zahl für das W.-L. 10^7mal, bez. $419\cdot10^5$mal kleiner, als in [C.G.S].

11. Drehmoment $P=[l^2mt^{-2}]$. Das D.-M. Eins wird dargestellt durch die Kraft Eins, welche senkrecht am Hebelarm Eins angreift; [cm^2 gr/sec^2 = Dyne × cm = 0,00102 gr-Gew. × cm].

Die Kraft k am Hebelarm l erzeugt das D.-M. $P=k\cdot l$.

11a. Direktionskraft $D=[l^2mt^{-2}]$.

Dieselbe mifst die Stabilität der Gleichgewichtslage eines um eine Axe drehbaren Körpers. Ablenkung des Körpers um den kleinen Winkel φ erzeugt ein mit φ proportionales Drehmoment P. Das konstante Verhältnis $P/\varphi=D$ heifst die auf den Körper ausgeübte Direktionskraft.

1) Auf S. 193 ist den Dimensionen der Faktor sec^{-1} hinzuzufügen.

Die D.-K. eines Pendels von der Masse $m=1$ kg im Abstande $l=1$ m von der Drehaxe beträgt $100\cdot1000\cdot981=98100000$ cm² gr sec⁻², denn das Drehmoment für einen kleinen Ablenkungswinkel φ ist $=lmg\cdot\varphi$.

Die von der Schwere ausgeübte D.-K. einer bifilaren Aufhängung (27a) von dem Fadenabstande 10 cm, der Fadenlänge 200 cm, der Masse 1000 gr ist $\frac{1}{4}\cdot10\cdot10/200\cdot1000\cdot980{,}6=122600$ [C.G.S].

12. Trägheitsmoment $K=[l^2m]$. Die Einheit wird dargestellt durch die Masse 1 gr im Abstande 1 cm von einer Drehaxe; [cm² gr].

Das T.-M. einer Masse m im Abstand l von einer Drehaxe ist $K=l^2m$. Vgl. **29**.

Das T.-M. des Pendels unter 11a ist also $100^2\cdot1000=10^7$ cm² gr.

Drehmoment durch T.-M. gibt die Winkelbeschleunigung.

T.-M. K, Direktionskraft D und einfache Schwingungsdauer t hängen durch die Gleichung $t^2/\pi^2=K/D$ zusammen.

13. Elasticitätsmodul $\eta=[l^{-1}mt^{-2}]$. Die Einheit des E.-M. würde ein Körper haben, der in Stabform vom Querschnitt Eins eine (kleine) relative Verlängerung gleich der dehnenden Kraft erleidet; [gr/(cm sec²) $=1{,}020\cdot10^{-8}$ kg-Gew./mm²].

Die (relativ kleine) Verlängerung eines Stabes von l cm Länge und q cm² Querschnitt durch eine dehnende Kraft von k Dynen beträgt $1/\eta\cdot kl/q$. — $\sqrt{\eta/s}$ gibt die Schallgeschwindigkeit, wenn s die Dichte ist.

Die praktisch gebrauchten Elasticitätsmoduln kg-Gew./mm² sind mit $1000\cdot981\cdot100=98100000$ zu multipliciren, um für das [C.G.S] System zu gelten. Vgl. **52**.

Kapillarkonstante und Reibungskoefficient s. 58 u. 59.

Elektrostatische Einheiten.

14. Elektricitätsmenge $\varepsilon=[l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}]$. „Elektrostatische" oder „mechanische" Einheit der E.-M. ist die Menge, welche eine ihr gleiche Menge aus der Entfernung Eins mit der Kraft Eins abstöfst; [cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$/sec $=333\cdot10^{-12}$ Amperesekunde oder „Coulomb" vgl. 25].

Diese Einheit fordert also, auf das Coulomb'sche Gesetz angewandt, dafs die Kraft k einer El.-Menge ε auf eine andere ε' aus dem Abstande l cm $k=\varepsilon\varepsilon'/l^2$ Dynen wird.

Die Dimension ergibt sich folgendermafsen: Wenn eine E.-M. ε eine gleiche Menge aus der Entfernung l mit der Kraft k abstöfst, so ist $\varepsilon=l\cdot\sqrt{k}$. Die Dimension von k ist durch $[lmt^{-2}]$, also von ε durch $[l]\cdot[l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}]$ $=[l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}]$ gegeben.

14a. Elektrische Flächendichte $\sigma=[l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Die Dichte

ist gleich Eins, wenn auf die Flächeneinheit die El.-M. Eins kommt; [$cm^{-1/2} gr^{1/2} sec^{-1}$].

14b. Elektrische Feldstärke $F = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die an einem Orte auf die El.-Menge Eins ausgeübte Kraft heifst die el. Feldstärke daselbst. Die Einheit hat also ein Feld, in welchem auf die E.-M. Eins die Kraft Eins ausgeübt wird; [$gr^{1/2}/(cm^{1/2} sec)$].

Das Feld in der Umgebung der E.-M. ε [C.G.S] hat an einem Punkte in l cm Abstand von dieser E.-M. die Stärke ε/l^2 [$cm^{-1/2} gr^{1/2} sec^{-1}$]. — Als Richtung des Feldes bezeichnet man die Richtung der auf positive Elektricität ausgeübten Kraft.

14c. Kraftlinie $\mathfrak{C} = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Kraftwirkung von El.-Mengen kann man darstellen durch Linien (Faraday). Von jeder Elektricitäts-Einheit gehen 4π Einheitskraftlinien aus. Die Richtung der Linien gibt die Kraftrichtung, ihre Dichtigkeit, d. h. ihre Anzahl in einem Bündel vom senkrechten Querschnitt Eins gibt die Feldstärke an dem betr. Orte; [$cm^{3/2} gr^{1/2}/sec$].

Von der El.-Menge ε gehen $N = 4\pi\varepsilon$ Kraftlinien aus. Im Abstande l sind diese über die Kugelfläche $f = 4\pi l^2$ gleichmäfsig verteilt, ihre Dichtigkeit ist also $N/f = \varepsilon/l^2$, gibt mithin die Feldstärke an dem Punkte. — Man sieht zugleich, dafs eine koncentrisch kugelig verteilte El.-Menge nach aufsen ebenso wirkt, wie eine gleich grofse punktförmige.

Feldstärke zwischen zwei el. Flächen. Die Flächen seien sehr grofs im Verhältnis zu ihrem Abstand und seien gleichmäfsig mit El. belegt von der Flächendichte, die eine $+\sigma$, die andere $-\sigma$. Dann besteht zwischen ihnen ein el. Feld von der Stärke $4\pi\sigma$. Dies folgt aus **128**, 1 oder auch daraus, dafs die $4\pi\sigma$ Kraftlinien, die von der Flächeneinheit ausgehen, bei hinreichend kleinem Abstande zu der gegenüberliegenden Fläche geradlinig hinübergehen. Vgl. auch magn. Feld, S. 554.

15. Elektrostatisches Potential oder Spannung $V = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Einheit des Potentials hat eine mit der E.-M. Eins auf ihrer Oberfläche gleichmäfsig geladene Kugel vom Halbmesser Eins; [$cm^{1/2} gr^{1/2}/sec = 300$ V; vgl. 26].

Wenn Massen vorhanden sind, welche anziehende oder abstofsende Kräfte nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung ausüben, so nennt man Potential dieser Massen auf einen in der Nachbarschaft befindlichen Punkt den Ausdruck, dessen Gefälle nach irgend einer Richtung die auf eine Masse Eins in dem Punkte nach dieser Richtung ausgeübte Kraft, bei El.-Mengen also die Feldstärke ergibt. Gefälle ist die Gröfse, um welche der Ausdruck abnimmt, wenn man von dem betrachteten zu einem nahe benachbarten Punkte übergeht, geteilt durch den Abstand beider Punkte; oder kurz der negative Differentialquotient

des Ausdrucks nach der betrachteten Richtung. Danach ist das Potential der El.-Menge ε auf einen Punkt im Abstande l gleich ε/l; denn es ist $-\frac{d(\varepsilon/x)}{dx}=\frac{\varepsilon}{x^2}$. Aus $V=\varepsilon/l$ ergeben sich auch die Dimensionen von V. —

Die Einheit des Potentials läfst sich hiernach auch definiren als das von der El.-Menge Eins im Abstande Eins bewirkte Potential. — Die Potentiale mehrerer El.-Mengen, z. B. der Teile der el. Ladung eines Körpers auf einen Punkt, summiren sich einfach; El.-Mengen $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\cdots$, die von einem Punkte die Abstände $l_1\ l_2\cdots$ haben, bewirken also zusammen in diesem Punkte das Pot. $\varepsilon_1/l_1+\varepsilon_2/l_2+\cdots$, und das Potential, welches eine auf einer Kugelfläche vom Halbmesser r gleichmäfsig ausgebreitete El.-M. ε auf den Mittelpunkt (und auf alle Punkte im Innern; vgl. 16) ausübt, ist gleich ε/r.

Das Potential hat die fernere wichtige Bedeutung, dafs $\varepsilon(V_1-V_2)$ die Arbeit angibt, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn die El.-Menge ε von einem Orte mit dem Pot. V_1 zu einem Orte mit dem Pot. V_2 übergeführt wird. Denn die Arbeit $\int k\,dx$ (vgl. 9) ist in diesem Falle, weil $k=-\varepsilon\,dV/dx$, gleich $-\varepsilon\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} dV=\varepsilon(V_1-V_2)$.

16. Elektrische Kapacität, elektrostatisch gemessen, $c=[l]$. Die Einheit der Kapacität hat ein Leiter, der durch die Einheit der El.-Menge zum Potential Eins geladen wird, z. B. eine einzeln in Luft befindliche Kugel vom Halbmesser 1 cm; [cm $=1{,}11\cdot10^{-6}$ Mikrofarad; vgl. 27].

Damit eine El.-Menge ε auf einem Leiter im Gleichgewicht sei, mufs sie sich so verteilen, dafs das Potential V im Leiter konstant ist. Wenn die Umgebung keine elektrischen Ladungen enthält (aufser den etwa von dem Körper selbst influenzirten Ladungen), so sind Potential (Spannung) und El.-Menge einander proportional; $\varepsilon=c\cdot V$. Das Verhältnis $c=\varepsilon/V$ nennt man elektrostatische Kapacität des Leiters. — Beispiele, sowie die Beziehung von c zu der Widerstandskapacität s. **132** I.

Die Kapacität der K u g e l ist gleich ihrem Halbmesser r, denn die El.-Menge ε, über die Oberfläche verteilt, bewirkt in der Kugel ein konstantes Potential, welches wir z. B. aus der Wirkung auf den Mittelpunkt $=\varepsilon/r$ finden. — Das [C.G.S]-Potential irgend eines geladenen Leiters kann man hiernach numerisch gleich setzen der El.-Menge, die in einer mit ihm durch einen sehr dünnen Draht verbundenen entfernten Kugel vom Halbmesser 1 cm bei dieser Ladung des Körpers enthalten wäre.

17. Dielektricitätskonstante $D=[l^0m^0t^0]$. Die D.-K. Eins hat der leere Raum oder nahe auch ein Gas.

Ein Kondensator, welcher mit Luft als Dielektrikum die Kapacität c besitzt, hat, wenn die Luft überall da, wo merklich Kraftlinien hindurchgehen, durch ein Dielektrikum von der D.-K. D ersetzt wird, die Kapacität $D\cdot c$. — Von den Grundeinheiten ist D unabhängig.

18. El. Stromstärke $i = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]$. Die „elektrostatisch" oder „mechanisch" gemessene Einheit der el. Stromstärke hat ein Strom, bei welchem in der Zeit Eins die El.-M. Eins (vgl. 14) durch den Querschnitt des Leiters fliefst; [$cm^{3/2} gr^{1/2}/sec^2 = 333 \cdot 10^{-12}$ A; vgl. 24].

18a. El. Widerstand $w = [l^{-1} t]$. Die el.-statisch gemessene Einheit hat ein Leiter, in dem die Potentialdifferenz (15) Eins zwischen den Enden den Strom Eins (18) hervorbringt; [$sec/cm = 900 \cdot 10^9$ Θ; vgl. 29].

1 Θ hat $1{,}111 \cdot 10^{-12}$, ein Quecksilberwürfel von 1 cm Seite bei 0° hat $1{,}0453 \cdot 10^{-16}$ el.-stat. [cm^{-1} sec] Widerstandseinheiten.

Elektrisches Leitvermögen einer Substanz ist der reciproke Widerstand eines cm-Würfels zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten.

Magnetische Einheiten.

Vgl. auch die vorigen zu den elektrostatischen Einheiten gemachten Bemerkungen, welche grofsenteils auf den Magnetismus übertragen werden können.

19. Freier Magnetismus, oder Stärke eines Magnetpoles $\mathfrak{m} = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Einheit des freien Magnetismus (oder der Stärke des Magnetpoles) ist die Menge (oder der Magnetpol), welche auf eine gleiche aus dem Abstande Eins die Krafteinheit ausübt; [$cm^{3/2} gr^{1/2}/sec$].

19a. Magnetische Flächendichte $\varrho = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Einheit ist gegeben, wenn die Flächeneinheit die Menge Eins an freiem Magnetismus besitzt.

20. Stabmagnetismus oder magnetisches Moment $M = [l^{5/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Einheit würde dargestellt werden durch einen Magnet mit zwei Einheitspolen ± 1 im gegenseitigen Abstande 1 cm; [$cm^{5/2} gr^{1/2}/sec$].

Jeder Magnet hat gleich viel positiven und negativen Magnetismus. Der einfachste Magnetstab würde aus zwei gleich starken punktförmigen Polen bestehen. Ein Magnet aus zwei Polen von der Stärke $\pm \mathfrak{m}$ im gegenseitigen Abstande $\mathfrak{l}$ hat das magnetische Moment $M = \mathfrak{l}\mathfrak{m}$.

Die [C.G.S]-Einheit ist 10000 mal gröfser als die Gaufs'sche [mm, mg, sec]-Einheit.

Mit M sind die Wirkungen in die Ferne proportional.

$+\mathfrak{m}$ $-\mathfrak{m}$ $\mathfrak{m}'$; $\mathfrak{l}$

Fernwirkung aus erster Hauptlage. Der Magnet $\mathfrak{m}\mathfrak{l}$ wirke auf den im Abstande L von seiner Mitte befindlichen Magnetpol $\mathfrak{m}'$. Die gesamte

Kraft k auf $\mathfrak{m}'$ ist die Differenz der von den beiden Polen ausgeübten Kräfte, also

$$k=\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'}{(L-\frac{1}{2}\mathfrak{l})^2}-\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'}{(L+\frac{1}{2}\mathfrak{l})^2}=2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}'\cdot\frac{L}{(L^2-\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)^2}.$$

$\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}$ ist das magnetische Moment $=M$. Also wird

$$k=2\,M\,\mathfrak{m}'\frac{L}{(L^2-\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)^2}=\frac{2\,M\,\mathfrak{m}'}{L^3}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2/L^2)^2} \qquad 1.$$

oder durch Reihenentwicklung (vgl. S. 9, Gl. 1)

$$k=2\,M\,\mathfrak{m}'/L^3\cdot(1+\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2+\tfrac{3}{16}\mathfrak{l}^4/L^4+\cdots).$$

Man sucht aus so grofsen Entfernungen zu arbeiten, dafs das dritte Glied zu vernachlässigen ist. Ist L so grofs gegen $\mathfrak{l}$, dafs man auch $\frac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2$ gegen 1 vernachlässigen kann, so wird einfach $k=2\,M\,\mathfrak{m}'/L^3$.

Zweite Hauptlage. $\mathfrak{m}'$ sei wieder im Abstande L von der Mitte des Magnets gelegen. Der ungleichartige Pol übt eine Anziehungskraft $=\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'/(L^2+\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)$, der gleichartige eine gleich grofse Abstofsungskraft aus. Beide Kräfte setzen sich nach dem Parallelogramm in eine der Stabaxe parallele Kraft

$-\mathfrak{m}$ $\mathfrak{l}$ $+\mathfrak{m}$ $\mathfrak{m}'$

$$k=\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}'/(L^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2)\cdot\mathfrak{l}/\sqrt{L^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2}=M\,\mathfrak{m}'/L^3\cdot(1+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2/L^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad 2.$$

zusammen, wofür geschrieben werden kann

$$k=M\,\mathfrak{m}'/L^3\cdot(1-\tfrac{3}{8}\mathfrak{l}^2/L^2+\tfrac{15}{128}\mathfrak{l}^4/L^4+\cdots).$$

Bei sehr grofser Entfernung L wird $k=M\,\mathfrak{m}'/L^3$.

Wird der Pol $\mathfrak{m}'$ durch eine auf der Kraftrichtung senkrechte kurze Magnetnadel von der Länge $\mathfrak{l}'$ mit den Polen $\pm\mathfrak{m}'$ ersetzt, so erfährt die Nadel ein Drehmoment $=k\,\mathfrak{l}'$. Da $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{l}'$ das magn. Moment der Nadel $=M'$, so beträgt das Drehmoment P aus grofser Entfernung L

in der 1. Hauptlage $P=2\,M\,M'/L^3$;

in der 2. Hauptlage $P=M\,M'/L^3$,

wozu wegen der Magnetlänge nötigenfalls die oben in den Klammern gegebenen Korrektionsfaktoren kommen.

Man kann also auch definiren: Die Einheit des Stabmagnetismus hat ein Magnet, welcher auf einen gleichen aus der grofsen Entfernung L in 1. Hauptlage das Drehmoment $2/L^3$, oder in 2. Hauptlage $1/L^3$ ausübt.

Ist die Nadel nicht so kurz, dafs man $\mathfrak{l}'^2$ gegen L^2 vernachlässigen kann, so kommt zu dem Ausdruck für k noch der Faktor hinzu:

in der 1. H.-L. $1-\frac{3}{4}\mathfrak{l}'^2/L^2$,

in der 2. H.-L. $1+\frac{3}{2}\mathfrak{l}'^2/L^2$.

Bildet die kurze Nadel mit der Kraftrichtung den Winkel φ, so ist obiges Drehmoment mit $\sin\varphi$ zu multipliciren.

Die Ausdrücke für ideale Magnete mit Punkt-Polen gelten nahe auch für wirkliche Magnete von gestreckter Form. Für Fernwirkungen gibt es zwei „Pole“, in denen der positive und der negative Magnetismus koncentrirt gedacht werden können. Bei den gewöhnlichen Magneten beträgt

der Polabstand (die reducirte Länge) etwa $^5/_6$ der Stablänge. Über die empirische Bestimmung s. **76b**.

Nach den nicht gekürzten Formeln 1 und 2 v. S. sind die Ausdrücke für M/H S. 324 gebildet.

Zerlegung eines Magnets in Komponenten. Einen Magnet M, welcher mit der Verbindungslinie L den Winkel α bildet, darf man für Fernwirkungen in zwei Stäbe von der Stärke $M\cos\alpha$, bez. $M\sin\alpha$ zerlegen, welche aus der 1., bez. der 2. Hauptlage wirken.

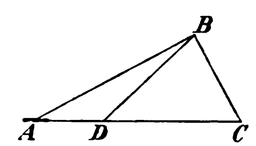
20a. Specifischer Magnetismus oder Magnetisirung $\mathfrak{J}$ $=[l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Die Einheit hat ein Magnet, dessen Moment geteilt durch sein Volumen gleich Eins ist.

Sp. Magn. oder Magnetisirung nennt man das Verhältnis des magn. Moments zum Volumen (auch wohl zur Masse) des Magnets. Gute, sehr dünne Stahlmagnete haben höchstens etwa 750 C.G.S auf 1 ccm (100 auf 1 gr). Die überhaupt (in Elektromagneten) erreichbare Grenze beträgt etwa 1500 C.G.S auf 1 ccm (200 auf 1 gr).

21. Magnetische Intensität eines Ortes oder magnetische Feldstärke $H=[l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Die Einheit der Feldstärke herrscht an einem Orte, wo auf einen zur Richtung der Feldkraft senkrechten Magnet vom Moment Eins das Drehmoment Eins oder auf einen Einheitspol die Kraft Eins ausgeübt wird; $[\mathrm{gr}^{1/2}/(\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{sec})=1$ Gaufs]. Angaben in [Mm.Mg.S] werden durch 10 geteilt in [C.G.S] verwandelt.

Der Ort eines Magnetpols übt im allgemeinen (durch Erdmagnetismus oder benachbarte Magnete oder elektrische Ströme) auf den Pol $\mathfrak{m}$ eine mit $\mathfrak{m}$ proportionale Kraft k aus, $k=\mathfrak{m}\cdot H$. Die Gröfse H, welche also die Kraft auf einen Einheitspol bedeutet, heifst Intensität der magnetischen Kraft, oder magnetische Intensität, oder Stärke des magnetischen Feldes.

Die von einem kurzen Magnet M von A aus an dem Orte B bewirkte Intensität erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC. Es sei $AD=\frac{1}{3}AC$. Dann ist BD die Richtung und $M\cdot AB^{-3}\cdot BD/AD$ die Intensität der Kraft in B (Gaufs). Beweis durch Zerlegung von M nach Nr. 20 am Schlufs.



Wirkung eines magn. Feldes auf einen Magnet. Das Drehmoment auf einen zur Kraftrichtung senkrechten Magnet mit zwei Polen $\pm\mathfrak{m}$ vom Abstande $\mathfrak{l}$, also vom magnetischen Moment $M=\mathfrak{m}\mathfrak{l}$, ist $=\mathfrak{m}H\cdot\mathfrak{l}=MH$, bez. $MH\sin\varphi$, wenn der Magnet im Winkel φ gegen die Kraftrichtung liegt. Also ist MH die Direktionskraft. Die (einfache) Schwingungsdauer t wird also, wenn K das Trägheitsmoment (vgl. Nr. 12), gegeben durch $t^2/\pi^2=K/(MH)$. Für horizontal drehbare Magnete ist H die Horizontalkomponente der Feldstärke.

Z. B. sei $H = 0{,}2\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Ein dünner Magnet wiege 20 gr und habe 10 cm Länge, also $K = 20 \cdot 10^2/12 = 167\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{gr}$. Der Magnetismus des Stabes sei $M = 400\,\mathrm{cm}^{5/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Dann ist $t = 3{,}14\sqrt{167/(400 \cdot 0{,}2)} = 4{,}5$ sec.

Ablenkung einer kurzen Nadel durch einen Magnet. Ein Magnet M befinde sich in 1. Hauptlage zu einer Nadel vom Moment M' im Abstand L. Wenn φ der Ablenkungswinkel, so müssen für diesen Winkel die Drehmomente $2MM'/L^3 \cdot (1 + \frac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2)\cos\varphi$ vom Magnet und $M'H\sin\varphi$ vom Erdmagnetismus gleich sein. Also ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{L^3}\frac{M}{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{l}^2}{L^2}\right).$$

In der 2. Hauptlage fällt der Faktor 2 weg, und anstatt $\frac{1}{2}\mathfrak{l}^2$ kommt $-\frac{3}{8}\mathfrak{l}^2$. Die S. 321 u. 322 mit η bezeichnete Gröfse hat also die Bedeutung, dafs bei kurzer Nadel in erster H.-L. $\sqrt{2\eta}$, in zweiter $\sqrt{-\frac{8}{3}\eta}$ den Polabstand des Magnets darstellt.

Magnetische Potentialdifferenz oder „magnetomotorische Kraft“ zwischen zwei Punkten. Liegen zwei Punkte in einem magnetischen Felde H nach der Feldrichtung um die Länge l auseinander, so nennt man Hl die zwischen ihnen bestehende magn. Potentialdifferenz oder magn.-mot. Kraft. Die letztere Bezeichnung stammt aus der formalen Analogie des Gesetzes der Fortleitung von Magnetismus mit dem Ohmschen Gesetz. Vgl. 22.

21a. Kraftlinie $\mathfrak{M} = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Kraft-Richtung und Stärke des magn. Feldes an irgend einem Orte werden gegeben durch Richtung und Dichte der Kraftlinien; unter Dichte deren Anzahl auf die senkrecht zu der Richtung gelegte Flächeneinheit verstanden. Die Anzahl, welche durch eine anders gerichtete Flächeneinheit geht, gibt die Feld-Komponente senkrecht zu dieser Flächenrichtung. — Von einem Magnetpol $+\mathfrak{m}$ oder $-\mathfrak{m}$ treten $4\pi\mathfrak{m}$ positive oder negative Kraftlinien in den umgebenden Raum aus. Vgl. 14c und 26a; [$\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{gr}^{1/2}/\mathrm{sec}$ = Einheitskraftlinie oder Einheit des magnetischen Flusses = 1 „Maxwell“].

Magnetisches Feld zwischen zwei Magnetpolen. Zwei gleichmäfsig entgegengesetzt magnetisirte breite, gleich grofse Pole, jeder von der Fläche f und der Gesammtstärke $\mathfrak{m}$, mögen sich in einem so kleinen Abstande gegenüberstehen, dafs die $4\pi\mathfrak{m}$ Kraftlinien von dem einen Pol ohne merkliche „Streuung“ nach aufsen geradlinig zum anderen hinüber gehen. Da diese Linien über die Fläche f ausgebreitet sind, so ist die Feldstärke zwischen den Polen $H = 4\pi\mathfrak{m}/f = 4\pi\varrho$, wenn man die Dichte $\mathfrak{m}/f$ des freien Magnetismus auf den Polflächen mit ϱ bezeichnet.

22. Magnetisirungskoefficient („Susceptibilität“) $\varkappa = [l^0 m^0 t^0]$. Die Einheit des M.-K. hat ein Körper, dem die magnetisirende Intensität Eins das magnetische Moment Eins der Volumeinheit

mitteilt. $\varkappa$ hat die Dimensionen Null, ist also eine unbenannte, von den Grundeinheiten unabhängige Zahl, kann demnach auch zu einer solchen addirt werden; vgl. 22a.

$\varkappa$ ist das Verhältnis der „Magnetisirung" $\mathfrak{J}$ (des specifischen Magnetismus pro Volumeinheit) eines Körperelementes zu der im Körper wirkenden magnetisirenden Intensität $\mathfrak{H}$; diese ist die Differenz der äufseren und der von dem Magnetismus des Körpers selbst herrührenden Kräfte. Der letztere Teil verschwindet nur in einem gegen seinen Querschnitt als unendlich lang zu betrachtenden Stabe und in einem geschlossenen, nach seiner peripherischen Axe magnetisirten Ringe, dem freie Pole fehlen; vgl. **115**. (Dem Gebrauch entsprechend ist hier Deutsch $\mathfrak{H}$ geschrieben.)

Nur für diamagnetische und schwach magnetische Körper ist $\varkappa$ merklich konstant; Tab. 36a. Über Eisen s. **115** und Tab. 37. Zugleich ist für Eisen bekanntlich $\varkappa$ bei ansteigender Magnetisirung kleiner als bei absinkender (innere magn. Reibung; „Hysterese").

22a. Permeabilität $\mu = 1 + 4\pi\varkappa = [l^0 m^0 t^0]$. Die Einheit der P. hat die Luft oder strenger das Vakuum. $1/\mu$ heifst magnetischer Widerstandskoefficient des Körpers.

Erläuterung. Ein langer Stab vom Querschnitt f, der sich in einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$, parallel den Kraftlinien gelegt, zum Betrage $\varkappa\mathfrak{H}$ per Volumeinheit magnetisirt, hat Pole von der Stärke $f \cdot \varkappa\mathfrak{H}$ und vereinigt in dieser Eigenschaft $4\pi \cdot f\varkappa\mathfrak{H}$ Kraftlinien. Hierzu die Kraftlinienzahl $f\mathfrak{H}$ wegen des Feldes selbst addirt, gibt $f\mathfrak{H}(1 + 4\pi\varkappa) = \mu f\mathfrak{H}$ als die Zahl im Innern des Stabes. Sieht man nun $\mu f\mathfrak{H}$ als einen Strom von Kraftlinien an, schreibt man ferner $\mu f\mathfrak{H} = \mathfrak{H} l \cdot \mu f / l$, wobei l die Länge zwischen zwei beliebigen Querschnitten des Stabes ist, so hat dieser Ausdruck dieselbe Form wie das Ohm'sche Gesetz für die Elektricität, indem $\mathfrak{H} l$ die magnetomotorische Kraft (S. 555) und, wenn μ als magn. Leitvermögen aufgefafst wird, $l/(\mu f)$ den magn. Widerstand vorstellt.

22b. Induktion $\mathfrak{B} = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}] = \mu\mathfrak{H} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H}$; $[gr^{1/2}/(cm^{1/2} sec) = 1$ Gaufs$]$. Vgl. noch Induktionsflufs, 26a.

$\mathfrak{B}$ ist die Dichte der Kraftlinien im magnetisirten Körper.

Chemisches Mafs der Elektricität.

23. Stromstärke, chemische Einheit. Die Einheit hat der Strom, welcher in der Zeit Eins die Einheit der chemischen Wirkung ausübt. Als El.-Menge Eins wäre die Menge zu bezeichnen, welche mit einem einwertigen Atom wandert. Solange man die absoluten Atomzahlen nicht kennt und sich auf ausgeschiedene Massen bezieht, ist das chemische Strommafs ein willkürliches Mafs, weil die durch den Strom ausgeschiedene Menge eines Elektrolytes von der Substanz abhängt. Im Anschlufs an die in der Chemie gebräuchlichen Zahlen ist für eine chemische Stromeinheit der Strom, welcher in 1 sec 1 gr-Äquivalent eines

Elektrolytes zersetzt oder 1 gr-Äqu. eines Ions (z. B. 8 gr Sauerstoff, 1,008 gr Wasserstoff oder 107,93 gr Silber; vgl. Tab. 32 u. 42) ausscheidet, am bequemsten. Diese Einheit ist gleich 9654 elektromagnetischen (24) und gleich $290 \cdot 10^{12}$ elektrostatischen [C.G.S]-Einheiten (18).

Elektromagnetische Einheiten.

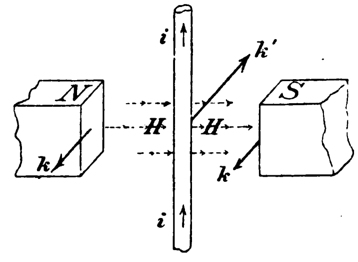
24. Stromstärke, elektromagnetisch gemessen $i = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$, Weber'sche Einheit. Die Einheit ist durch den Strom gegeben, dessen Längeneinheit aus der Entfernung Eins auf einen Magnetpol Eins die (transversale) Kraft Eins ausübt. Das wirkende Stromstück hat man sich zu einem Kreisbogen vom Halbmesser Eins gebogen zu denken; [$\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{gr}^{1/2}/\mathrm{sec} = 300 \cdot 10^8$ elektrostat. [C.G.S] = 10 A].

Ein kurzes Stück von der Länge l eines Stromes i wirkt auf einen in der Senkrechten auf l gelegenen Magnetpol $\mathfrak{m}$ aus der Entfernung L mit der (transversalen) Kraft $k = i\mathfrak{m} \cdot l/L^2$ (Biot-Savart'sches Gesetz). Daraus folgt die Dimension $[i] = [l \cdot k \cdot \mathfrak{m}^{-1}]$ oder, wenn $k = lmt^{-2}$ und $\mathfrak{m} = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$ eingesetzt wird, $= [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$.

Ein ganzer Kreisstrom i vom Halbmesser R übt also auf einen Pol $\mathfrak{m}$ im Mittelpunkt die Kraft $k = \mathfrak{m} i \cdot 2\pi R/R^2 = \mathfrak{m} i \cdot 2\pi/R$ aus.

Die [cm-gr]-Stromeinheit ist 100mal größer als die [mm-mg]-Einheit.

Die folgende Definition ist identisch mit der obigen: Ein geradliniger Strom i von der Länge l senkrecht zu den Kraftlinien in einem magn. Felde H fließend, erfährt die (transversale) Kraft: $k' = Hil$.



Die Richtung der Kraft, welche der Strom erhält, oder die er auf Magnetpole ausübt, welche das Feld H erzeugen, ist in der Figur dargestellt.

Bildet die Stromrichtung mit der Feldrichtung anstatt 90° den Winkel φ, so ist $Hil \cdot \sin\varphi$ die Kraft.

Elektrodynamische Stromeinheit. Diese ist mit der elektromagnetischen identisch, wenn man das Ampère'sche Gesetz so ausspricht: Zwei gleichgerichtete Ströme i und i' in den geradlinigen Leitern l und l' in dem (relativ großen) gegenseitigen Abstand L ziehen sich mit der Kraft $2li \cdot l'i'/L^2$ an, wenn sie zur Verbindungslinie senkrecht stehen; sie stoßen sich mit der Kraft $li \cdot l'i'/L^2$ ab, wenn sie mit der Verbindungslinie zusammenfallen. In einer anderen gegenseitigen Lage zerlegt man sie parallelepipedisch in Komponenten, welche eine der obigen Stellungen haben oder auf einander senkrecht stehen. Die letzteren Teile wirken nicht auf einander.

1. **Magnetisches Moment eines geschlossenen Stromes.** Ein ebener, geschlossener, wie oben gemessener Strom i von der umflossenen Fläche f wirkt in die Ferne wie ein senkrecht durch f gesteckter Magnet $M = fi$. Genauer gilt: Der Strom darf bezüglich seiner Wirkung nach aufsen durch zwei Blätter von der Gröfse und Richtung der Stromfläche und von dem gegenseitigen kleinen Abstande a ersetzt werden, von denen das eine mit Nordmagnetismus, das andere mit Südmagnetismus von der Flächendichte i/a bedeckt ist.

Man kann also auch sagen: Strom Eins ist der Strom, welcher die Flächeneinheit umfliefsend in die Ferne wie ein Magnet Eins wirkt.

Beweis für einen Kreisstrom vom Halbmesser r, welcher auf einen in seiner Axe im Abstande L gelegenen Magnetpol $\mathfrak{m}$ wirkt. Jedes Stückchen λ übt die Kraft aus $k = \lambda i\mathfrak{m}/(L^2 + r^2)$. Die Komponente dieser Kraft nach der Axe ist $= k \cdot r/\sqrt{L^2 + r^2} = \lambda \cdot ri\mathfrak{m}/(L^2 + r^2)^{3/2}$. Die Summe aller dieser Komponenten ist $2\pi r \cdot ri\mathfrak{m}/(L^2 + r^2)^{3/2}$ oder für ein grofses L gleich $2 \cdot \pi r^2 \cdot i \cdot \mathfrak{m}/L^3$. Die anderen Kraftkomponenten heben sich auf. Der Strom wirkt also (20) wie ein Magnet vom Moment $\pi r^2 \cdot i$; q. e. d.

2. **Drehmoment auf einen geschlossenen Strom.** Die Windungsfläche f einer vom Strome i durchflossenen drehbaren Spule in einem Magnetfelde, dessen Stärke senkrecht zur Drehaxe $= H$ ist, bilde den Winkel φ mit der Richtung von H. Dann ist das Drehmoment $= ifH\cos\varphi$. $fH\sin\varphi$ ist gleich der Anzahl magn. Kraftlinien, die durch die Stromfläche hindurchtreten.

3. **Magn. Feld einer Stromspule.** Eine gleichmäfsig mit n Windungen auf jeder Längeneinheit bewickelte cylindrische Spule mit dem Strom i wirkt nach aufsen genau wie die Belegungen der beiden Endflächen mit freiem Magnetismus von der Flächendichte ni. Im Innern einer im Verhältnis zum Durchmesser langen Spule entsteht auf einer von den Enden hinreichend abstehenden Strecke ein homogenes magnetisches Feld von der Stärke $= 4\pi ni$. Näheres s. **114**, I.

Beweis. Das erste folgt aus der Ersetzung der Ströme nach Nr. 1 durch magnetische Belegungen. Indem man nämlich a gleich dem Abstand der Windungen wählt, heben sich die Wirkungen benachbarter Windungen bis auf die beiden übrigbleibenden äufsersten Belegungen auf. a ist $= 1/n$, also die Flächendichte $= i/a = ni$, q. e. d. — Die Feldstärke im Innern folgt, wenn man die Spule in zwei, links und rechts von dem betrachteten Querschnitt gelegene Teile zerschnitten denkt. Ein Punkt des Querschnitts befindet sich dann zwischen zwei Polflächen von der Flächendichte $\varrho = \pm ni$, also ist die Feldstärke nach S. 555 gleich $4\pi\varrho$ oder $4\pi ni$.

4. **Magn. Feld um einen geradlinigen Strom.** Ein langer gerader Strom i bewirkt ein cirkulares Feld. In einem Punkte, der den Abstand r vom Drahte und einen gegen r sehr grofsen Abstand von den Drahtenden hat, ist die transversale Feldstärke $= i \cdot 2/r$.

Elektrochemisches Äquivalent (Faraday, Weber;

vgl. 23 u. 87). Der Strom 1 [C.G.S] zersetzt in 1 sec 0,000933 gr Wasser oder scheidet 0,01118 gr Silber aus. Allgemein scheidet er von einem Körper vom Äquivalentgewicht A (Sauerstoff $=\frac{16}{2}=8$) die Menge $A \cdot 0{,}0001036$ gr/sec ab.

Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Stromeinheit (Weber u. R. Kohlrausch). $300 \cdot 10^8$ statische sind gleich einer elektromagnetischen [C.G.S]. Die Dimensionen stehen im Verhältnis $v=[l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}]:[l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}]=[l/t]$. Nach der Maxwell'schen elektromagn. Theorie des Lichtes ist dieses Verhältnis v gleich der Lichtgeschwindigkeit. Vgl. 18.

„Praktische" Einheit¹). 1 Ampere $=0{,}1$ cm$^{1/2}$gr$^{1/2}$sec^{-1} $=300 \cdot 10^7$ elektrostatischen [C.G.S] oder 0,0933 mg/sec Wasser oder 1,118 mg/sec Silber.

25. Elektricitätsmenge, elektromagn. gemessen $\varepsilon=[l^{1/2}m^{1/2}]$. Als Einheit gilt die von dem Strome Eins in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt der Leitung beförderte Menge; [cm$^{1/2}$gr$^{1/2}$ = 10 Amperesek. = $300 \cdot 10^8$ elektrostatischen C.G.S].

„Praktische Einheit" ist also die Elektricitätsmenge, welche bei der Stromstärke 1 A in 1 sec durch den Querschnitt der Leitung fliefst. Sie heifst 1 Amperesekunde oder 1 Coulomb.

26. Elektromotorische Kraft oder Spannung oder Potentialunterschied, elektromagnetisch gemessen $e=[l^{3/2}m^{1/2}t^{-2}]$.

1) Wegen der Schwierigkeit einer genauen absoluten Strommessung ist der gesetzlichen Definition des Ampere die, durch die Zahl 1,118 mg/sec Silber ausgedrückte chemische Stromwirkung zu Grunde gelegt worden.

Neben der [C.G.S]-Einheit eine 10mal kleinere einzuführen war zwecklos. Bei elektromagnetischen Beziehungen führt diese Durchbrechung des Mafssystems obendrein zu grofsen Unbequemlichkeiten, so dafs man hier besser nicht nach A sondern nach der Weber'schen [C.G.S]-Einheit rechnet, ein Weg, den die wissenschaftliche Elektrotechnik meist einschlägt.

Man kann voraussehen, dafs früher oder später der Wunsch auftreten wird, die [C.G.S]-Einheit der Stromstärke überall durchzuführen. Damit würde dann, des Ohm'schen Gesetzes wegen, eine gleichzeitige Änderung entweder der Widerstands- oder der Spannungseinheit verbunden werden müssen. Die erstere zehnmal zu verkleinern wäre unbequem; die elektromotorische Kraft dagegen nach einer zehnmal gröfseren Einheit als das Volt zu rechnen, würde mehr Vorteile als Nachteile gewähren.

Die Einheiten der Kapacität und Selbstinduktion ändern sich dabei nicht.

a) Die Einheit wird aus den Erscheinungen der Induktion folgendermaſsen definirt (W. Weber). In einem magn. Felde von der Stärke Eins werde ein gerader, zur Feldrichtung senkrechter Leiter mit der Geschwindigkeit Eins senkrecht zu sich selbst und zur Feldrichtung bewegt. Die hierdurch in jeder Längeneinheit des Leiters inducirte el. Kraft ist die elektromagnetisch gemessene Einheit der el. Kraft; [$cm^{3/2} gr^{1/2}/sec^2 = 10^{-8}$ V $= 333 \cdot 10^{-13}$ el.-stat. C.G.S-Potentialeinheiten].

Das zu Grunde liegende Gesetz lautet: In einem magn. Felde H (21) erfährt ein gerader, zur Feldrichtung senkrechter Leiter von der Länge l, wenn er senkrecht zu sich selbst und zur Feldrichtung mit der Geschwindigkeit u verschoben wird, eine inducirte el. Kraft $e = lHu$.

Die el. Kraft stellt sich also hier dar als Länge $\times$ magnetische Intensität $\times$ Geschwindigkeit $= l \cdot l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \cdot l t^{-1} = l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}$.

Bewegt man z. B. an einem Orte des mittleren Deutschlands, wo die gesamte erdmagnetische Intensität $= 0{,}45$ C.G.S ist, einen senkrecht zur Inklinationsrichtung gehaltenen geraden Draht von 1 m Länge mit der Geschwindigkeit 1 m/sec senkrecht zu sich und zu H, so wird die el. Kraft $= 100 \cdot 0{,}45 \cdot 100 = 4500$ C.G.S $= 45$ Mikrovolt inducirt.

b) Statt des obigen kann man auch sagen: Die el. Kraft Eins wird inducirt in einem Leiter, der sich in einem magn. Felde so bewegt, daſs er in der Zeiteinheit eine Kraftlinie schneidet.

Für den Fall unter *a*) sieht man dies leicht. Ein magn. Feld von der Stärke Eins wird nämlich durch parallele Kraftlinien von der Dichte Eins, d. h. mit je einer Kraftlinie in der Querschnittseinheit dargestellt. Jedes cm des mit der Geschwindigkeit Eins wie oben bewegten Leiters schneidet also in 1 sec eine Kraftlinie.

c) Eine mit den vorigen identische Definition der el. Kraft läſst sich aus der Arbeitsleistung ableiten. Einheit ist nämlich die el. Kraft, welche, wenn sie den Strom Eins hervorbringt, in der Zeiteinheit die Einheit der Arbeit verrichtet, z. B. in einem Drahte (welcher alsdann nach Nr. 29 den Widerstand Eins haben muſs) die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge erzeugt. Vgl. hierüber 30.

„Praktische" Einheit[1]). 1 Volt $= 10^8$ [C.G.S].

1 el.-stat. [C.G.S]-Potentialeinheit $= 300$ V; 1 Daniell etwa $= 1{,}1$ V; 1 Bunsen etwa $= 1{,}9$ V; 1 Akkumulator $= 2{,}0$ V; 1 „legales Volt" $= 0{,}9972$ V.

Potentialdifferenz oder Spannung. Die el. Kraft einer Säule ist proportional dem Potentialunterschiede der offenen Säule an den Polen. Indem man die beiden Gröſsen identificirt,

1) Gesetzlich ist das Volt definirt als die el. Kraft, welche in einem Leiter von 1 Θ Widerstand (29) den Strom 1 A erzeugt.

erhält man also auch im elektromagnetischen Maſssystem den Begriff Potential, welcher mit dem Begriff el. Kraft gleichartig ist.

Man kann den Begriff auch so definiren. Potential innerhalb eines vom Strome durchflossenen Leiters ist die Gröſse, deren Gefälle oder negativer Differentialquotient nach einer Richtung die in dieser Richtung auf die Elektricitätsmenge Eins ausgeübte Kraft ergibt.

Gesetze der Magnetoinduktion.

Dieselbe Einheit der elektromotorischen Kraft liegt den folgenden Formen des Induktionsgesetzes zu Grunde.

I, Nach Neumann. Ein beliebig gestalteter Leitungsdraht werde in einem magnetischen Felde bewegt, welches nicht homogen zu sein braucht, also etwa von beliebigen benachbarten Magneten oder Strömen erzeugt sein kann — oder es werde ein Magnetpol oder Magnet in der Nachbarschaft eines ruhenden Leiters bewegt. Die Geschwindigkeit im einen oder anderen Falle sei $= u$.

Um die hierdurch im Leiter inducirte el. Kraft zu erhalten, denke man ihn von der Stromeinheit durchflossen. Dann würden von dem Felde auf den Strom Eins oder von dem Strome Eins auf den Magnet Kräfte ausgeübt werden, und p sei in irgend einem Augenblick deren Komponenten-Summe nach der Richtung der wirklich ausgeführten Bewegung. Die in diesem Augenblick inducirte el. Kraft beträgt dann pu.

Im Falle drehender Bewegung ist für p das Drehmoment in der Drehungsebene und für u die Winkelgeschwindigkeit zu setzen.

II, Aus den geschnittenen Kraftlinien; vgl. 21a. Für viele Fälle übersichtlich ist das Gesetz in folgender Form: Wird ein Leiter in einem magnetischen Felde bewegt (oder auch ein Magnet in der Nähe eines Leiters), so ist die el. Kraft gleich der Anzahl (Vorzeichen!) von Kraftlinien, die der Leiter in der Zeiteinheit schneidet; bei einem geschlossenen Leiter gleich der Änderung (Vorzeichen!) der ihn durchsetzenden Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit.

III, Induktion durch ruhenden veränderlichen Magnetismus. Magnetismus, der in der Nähe eines Leiters entsteht (bez. verschwindet), erzeugt denselben Integralwert el. Kraft, wie wenn er aus groſser Entfernung auf irgend einem Wege an seinen Ort bewegt würde (bez. umgekehrt). — Für einen geschlossenen Leiter ist dieser Integralwert gleich dem Zuwachs (bez. der Abnahme) der Zahl der Kraftlinien, welche die Fläche durchsetzen; vgl. oben. Bei mehrfachen Windungen sind alle Flächen zu rechnen (immer die Vorzeichen beachten!).

26a. Magnet. Induktionsfluſs $\mathfrak{M} = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Vgl. 20a bis 22b; [$cm^{3/2} gr^{1/2} sec^{-1}$ = magn. Einheitskraftlinie = 1 „Maxwell“].

$\mathfrak{M}$ ist die Gesamtzahl der Kraftlinien in einem magnetisirten Quer-

schnitt. Der magn. Induktionsflufs in einem langen oder ringförmig geschlossenen Eisenstabe vom Querschnitt f mit dem Magn.-Koefficienten $\varkappa$ oder der Permeabilität μ, welcher durch die magn. Intensität $\mathfrak{H}$ zur Magnetisirung $\mathfrak{J}$ (20a) erregt wird, beträgt $\mathfrak{M} = (\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J})f = (1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H}f = \mu\mathfrak{H}f = \mathfrak{B}f$. Denn $\mu\mathfrak{H}f$ ist die hier erregte, den Stab durchsetzende Anzahl von Kraftlinien; 22a. — $\mathfrak{M}$ gibt zugleich das, während der Entstehung oder des Verschwindens der Magnetisirung, in einer den Stab umgebenden Windung inducirte el. Kraft-Integral.

Gedrehte Spule im magn. Felde; Erdinduktor (**111**, **116**). Das Feld sei homogen. Wir denken uns die Windungen auf eine zur Feldrichtung senkrechte Ebene projicirt. Die Summe f der Flächenprojektionen ändere in irgend einem Augenblick ihre Gröfse um den kleinen Betrag df in der kleinen Zeit dt. Dann ist die in diesem Augenblick inducirte el. Kraft e gleich der Feldstärke H multiplicirt mit der Geschwindigkeit df/dt der Flächenänderung; $e = H \cdot df/dt$. Wird der Multiplikator aus einer zur Richtung von H senkrechten Anfangsstellung um 180^0 gedreht, so beträgt der Integralwert der el. Kraft dieses Induktionsstofses $\int e\,dt = 2fH$. Dafs $2fH$ die Anzahl der von den Windungen hierbei geschnittenen Kraftlinien ist, sieht man sofort. — Die Sätze gelten auch, wenn die Drehaxe nicht zur Feldrichtung senkrecht steht, falls man als H die gröfste Feldkomponente in der Drehungsebene nimmt, also für eine vertikale Axe die Horizontalkomponente des Feldes.

Die Sätze sind in dem allgemeineren Satz enthalten: Ein geschlossener ebener Leiter von der Windungsfläche f werde in einem magnetischen Felde bewegt (welches nicht homogen zu sein braucht). H_1 und H_2 seien die Komponenten der Feldstärke senkrecht zur Windungsfläche (Vorzeichen!) zu Anfang und am Schlufs der Bewegung. Dann ist der Integralwert der inzwischen inducirten el. Kraft $\int e\,dt = f(H_1 - H_2)$. — Wird also die Spule aus einer Stellung senkrecht zur Richtung eines Feldes H aus diesem herausgezogen, so ist $\int e\,dt = fH$. — Alle diese Sätze ergeben sich leicht aus dem Neumann'schen Induktionsgesetz oder aus dem Satz von den Kraftlinien, I u. II vor. S.

Über das Gesetz der Dämpfung schwingender Spulen oder Magnete siehe **108**.

Magnetinduktor (**112**). In eine gegen ihren Durchmesser lange Spule werde aus grofser Entfernung ein Magnet vom Moment M eingeschoben, so dafs er sich schliefslich der Spulenaxe parallel in der Spule hinreichend weit von ihren Enden (**114** I) befindet (bez er werde aus dieser Lage herausgezogen). Oder auch es entstehe (bez. verschwinde) innerhalb der Spule das magn. Moment M. Der Integralwert der dabei inducirten el. Kraft ist $= 4\pi n M$. n bedeutet die Windungszahl auf der Längeneinheit der Spulenaxe.

Man kann diesen Satz aus der Form I des Induktionsgesetzes S. 561 leicht beweisen, wenn man berücksichtigt, erstens, dafs der eine Pol des

Magnets vom Moment $M = \mathfrak{m}\mathfrak{l}$ in der Spule einen um $\mathfrak{l}$ längeren Weg zurücklegt als der andere, und zweitens, dafs die von einem Strome Eins im Innern der Spule auf den Pol $\mathfrak{m}$ ausgeübte Kraft $= 4\pi n \cdot \mathfrak{m}$ sein würde (S. 558).

27. Kapacität, elektromagnetisch gemessen, $c = [l^{-1} t^2]$. Die Einheit der Kapacität besitzt ein Leiter, der die El.-Menge Eins (25) enthält, wenn er zum Potential Eins oder von der el. Kraft (26) Eins geladen ist, während die Leiter der Umgebung das Potential Null haben. Vgl. auch 16 u. 17; [$sec^2/cm = 9 \cdot 10^{20}$ el.-stat. Kapac.-Einh. $= 10^9$ Farad $= 10^{15}$ Mikrofarad].

Da im statischen [C.G.S]-System die Einheit für die Elektricitätsmenge $3 \cdot 10^{10}$ mal kleiner, diejenige des Potentials $3 \cdot 10^{10}$ mal gröfser ist als im elektromagnetischen System, so ist die Einheit der Kapacität dort $9 \cdot 10^{20}$ mal kleiner. Ein Luftkondensator von 1 mm Plattenabstand, der die el.-magn. Kapacität Eins hätte, müfste also nach **132**, I 3 eine Fläche haben $f = 4\pi \cdot 0{,}1 \cdot 9 \cdot 10^{20} = 113 \cdot 10^{19}$ qcm $= 113 \cdot 10^9$ qkm, etwa 220 mal die Erdoberfläche.

Praktische Einheit. Die Kapacität eines Kondensators, welcher durch die Elektricitätsmenge 1 Amperesekunde oder 1 Coulomb zur Spannung 1 V geladen wird, ist 1 Farad.

1 Farad $= 10^{-9}$ [$cm^{-1} sec^2$] el.-magn. oder $= 9 \cdot 10^{11}$ [cm] el.-stat. C.G.S-Einh. $= 10^6$ Mikrofarad.

28. Induktions-Koefficient oder elektrodynamisches Potential, $S = [l]$. Die Einheit ist durch einen Leiter dargestellt, in dem durch die Änderungsgeschwindigkeit Eins eines Stromes die elektrom. Kraft Eins inducirt wird. S ist der Faktor, mit welchem die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit di/dt eines Stromes zu multipliciren ist, um die Gröfse der durch diese Änderung zur Zeit t inducirten el. Kraft e zu erhalten; [cm $= 10^{-9}$ Quadrant].

Selbstinduktions-Koefficient oder Selbst-Potential eines Leiters. (Vgl. **117**.) Die durch Anwachsen eines Stromes inducirte el. Kraft ist, der Stromrichtung stets entgegengerichtet, $e = -S \cdot di/dt$. Für eine gestreckte Spule mit N Windungen von dem gegen die Länge l kleinen Halbmesser r gilt nahe $S = 4\pi^2 N^2 (\sqrt{l^2 + r^2} - r) \cdot r^2/l^2$, also, wenn r sehr klein gegen l ist, $S = 4\pi^2 N^2 r^2/l$, oder, wenn q den Querschnitt und n die Anzahl der Windungen auf der Längeneinheit bedeutet, $S = 4\pi n N q$.

Wird eine el. Kraft E durch einen Leiter vom Widerstande w und vom Selbstpotential S zur Zeit Null geschlossen, so ist zur Zeit t die Stromstärke $i = E/w \cdot (1 - e^{-w/S \cdot t})$ (Helmholtz). S/w heifst Verzögerungskonstante oder Relaxationszeit.

Über **Wechselströme mit Selbstinduktion,** Phasenverschiebung und scheinbaren Widerstand sowie über die Bezeichnungen „effektive" Stromstärke oder el. Kraft s. **120** I u. II. — Die Beziehungen zwischen el. Kraft, Stromstärke und Zeit (S. 490) lassen sich in verschiedener Weise geometrisch veranschaulichen. Fruchtbar ist z. B. die Darstellung der Periodendauer als eines Winkels von 360° und der elektrischen Gröfsen als Radien, die also in der Periodendauer einmal umlaufen. Ein Zeitunterschied, z. B. eine Phasenverschiebung zwischen el. Kraft und Stromstärke tritt dann als Winkel zwischen Radien auf, der „effektive Widerstand" $\sqrt{w^2+a^2S^2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von den Katheten w und aS und der Phasenverschiebung als dem an w anliegenden Winkel. Auf zusammenwirkende el. Kräfte lassen sich dabei parallelogrammatische Konstruktionen anwenden. Näheres über diese vielfach gebrauchte Darstellung s. in den elektrotechnischen Lehrbüchern (vgl. S. 489, 491 u. 500), besonders in Bedell u. Crehore.

Bei **sehr grofser Wechselzahl** wird auch für einen geradlinigen guten Leiter der scheinbare Widerstand gröfser als der Ohm'sche, nämlich im Verhältnis $\left(1+\frac{\pi^2}{12}\frac{\nu^2}{\gamma^2}-\frac{\pi^4}{180}\frac{\nu^4}{\gamma^4}\cdots\right):1$, wenn ν die Wechselzahl/sec und γ den Widerstand von 1 cm in [C.G.S] bedeutet (Nr. 29). Falls das Leitmaterial magnetisch ist, hat man μ/γ statt $1/\gamma$ einzuführen, wo μ die Permeabilität ist; vgl. 22a (Rayleigh, Phil. Mag. 21, 387. 1886).

In dicken Leitern bewirkt die Selbstinduktion eines Wechselstromes zugleich, dafs die inneren Stromfäden gegen die äufseren abgeschwächt und verzögert werden.

Entladung eines Kondensators durch einen Weg mit Selbstinduktion; elektrische Schwingungen. Wird ein mit der El.-Menge Q_0 geladener Kondensator von der Kapacität c zur Zeit $t=0$ durch einen Weg vom Widerstande w und dem Selbst-Ind.-K. S geschlossen, so beträgt, wenn $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{w^2}{S^2}-\frac{1}{cS}}=\alpha$ und $\frac{1}{2}\frac{w}{S}=\beta$ bezeichnet wird, zur Zeit t seine Ladung

$$Q_t=Q_0e^{-\beta t}\frac{1}{2\alpha}\left[(\alpha+\beta)e^{\alpha t}+(\alpha-\beta)e^{-\alpha t}\right].$$

Dieser Ausdruck gilt, wenn $S<\frac{1}{4}cw^2$ ist. Für $S>\frac{1}{4}cw^2$ wird α imaginär; dann erfolgt die Entladung in der Gestalt von gedämpften Oscillationen. Wird nämlich nun $\sqrt{\frac{1}{cS}-\frac{1}{4}\frac{w^2}{S^2}}=\delta$ bezeichnet, so ist

$$Q_t=Q_0e^{-\beta t}\left(\cos\delta t+\frac{\beta}{\delta}\sin\delta t\right);$$

$\tau=\frac{2\pi}{\delta}=2\pi\Big/\sqrt{\frac{1}{cS}-\frac{1}{4}\frac{w^2}{S^2}}$ ist also die Schwingungsdauer der Oscillationen. Wenn $\frac{1}{4}cw^2$ gegen S klein ist, so wird $\tau=2\pi\sqrt{cS}$.

Die Stärke der zeitlichen Dämpfung der Oscillationen ist durch $\beta=\frac{1}{2}w/S$ ausgedrückt. $\beta\tau=2\pi\beta/\delta$ ist das nat. log. Dekrement aufeinanderfolgender Schwingungen.

Die Vorgänge leiten sich aus der Differentialgleichung des entladenden Stromes i ab: $iw + S\,di/dt = e$, wo $i = -dQ/dt$ und, nach **27**, die el. Kraft $e = Q/c$ einzusetzen ist.

Gegenseitiger Induktions-Koefficient oder elektrodynamisches Potential eines Leiters auf einen anderen. Die Gröfse kann definirt werden als das el. Kraft-Integral $\int e\,dt$, welches in dem einen Leiter auftritt, während im anderen der Strom Eins entsteht oder verschwindet.

Gegenseit. Ind.-K. einer langen und einer koaxialen kurzen Spule. — 1) Über eine im Verhältnis zu ihrem Halbmesser r lange oder eine ringförmig geschlossene Spule von je n Windungen auf der Längeneinheit sei eine kurze und enge Spule von der Gesamtwindungszahl N geschoben. In einer der Spulen entstehe oder verschwinde der Strom i. Dabei entsteht in der anderen $\int e\,dt = 4\pi^2 nNr^2 \cdot i$. Also $S = 4\pi^2 nNr^2$.

Ist die lange Spule die primäre, so ist $4\pi ni$ das in ihr entstehende magn. Feld $\mathfrak{H}$ (vgl. 24), also $\int e\,dt = r^2\pi\mathfrak{H} \cdot N$. Wird vom Strome zugleich ein durch beide Spulen gehender, langer Eisenstab magnetisirt, bedeutet hierbei m das entstehende magnetische Moment der Längeneinheit in der Nähe der kleinen Spule, so kommt zu dem obigen $\int e\,dt$ hinzu $4\pi m \cdot N$. Hierfür kann man schreiben $4\pi q\varkappa\mathfrak{H} \cdot N$, wenn q der Querschnitt, $\varkappa$ der Magnetisirungskoefficient des Eisens ist. Füllt der Stab die Spule ganz aus, so ist $r^2\pi = q$, also das gesamte Integral der el. Kraft $= qN(1 + 4\pi\varkappa) \cdot \mathfrak{H} = qN\mathfrak{B}$, wenn $(1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ geschrieben wird. $\mathfrak{B}$ ist die „Induktion“ im Eisen; vgl. **115** und 22b.

2) Liegt die kurze Spule innerhalb der langen, so ist $\int e\,dt = 4\pi ni \cdot f$, wo f die gesamte Windungsfläche der kurzen Spule bedeutet. fi entspricht dem M in Nr. 26 bei „Magnetinduktor“.

Für zwei beliebige geschlossene Leiter ist der gegenseitige Ind.-Koefficient gleich $\int\int \frac{1}{r} \cos(dl_1, dl_2) \cdot dl_1 \cdot dl_2$, wenn dl_1 und dl_2 die in einer bestimmten Richtung herum gezählten Längenelemente der Leiter bedeuten und r den gegenseitigen Abstand von dl_1 und dl_2 (Neumann).

In der Sprache der Kraftlinien kann man S gleich der Summe der magnetischen Kraftlinien setzen, welche bei der Entstehung der Stromeinheit in der inducirenden Leitung durch die sämtlichen Windungen der inducirten Spule neu hindurchtreten (Vorzeichen!).

Die dem Ohm-Ampere-Volt-System entsprechende Einheit ist der Quadrant oder das Henry $= 10^9$ [cm].

29. Leitungswiderstand, elektromagn. gemessen, $w = [lt^{-1}]$. Der Widerstand des Leiters ist Eins, in welchem die elektromotorische Kraft Eins den Strom Eins erzeugt; [cm/sec $= 111 \cdot 10^{-23}$ el.-stat. C.G.S $= 10^{-9}\,\Theta$].

Widerstand = El. Kraft/Strom = $[l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]/[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] = [l/t]$, q. e. d. Der Widerstand erscheint also gleichbedeutend mit einer **Geschwindigkeit** und läfst sich in der That durch eine solche darstellen. Z. B. ist der Widerstand eines geradlinigen Drahtes von der Längeneinheit gegeben durch die Geschwindigkeit, mit der man ihn in einem magnetischen Felde Eins unter den S. 560 beschriebenen Verhältnissen bewegen mufs, damit in ihm der Strom Eins entstände, wenn die Enden durch einen widerstandslosen Leiter (auf welchen natürlich keine Induktion stattfinden dürfte) mit einander verbunden wären.

1 cm³-**Quecksilber-Würfel** von 0° hat den Widerstand 94070 cm/sec; 1 el.-stat. Widerstandseinheit sec/cm = $900 \cdot 10^{18}$ cm/sec el. magn.

Praktische Einheit. 1 Ohm = 10^9 cm/sec = 1 V/A = 1,063 Siem.-E. oder = 1,063 m/mm² Hg 0° = $\frac{1}{900} \cdot 10^{-9}$ elektrostat. [C. G. S]-Widerstands-Einheiten[1]).

Das frühere „**legale**" **Ohm** ist = 1,060 m/mm² Hg 0° = 0,9972 richtige Ohm.

Specifischer Widerstand $[l^2 t^{-1}]$. Den spec. Widerstand Eins hat ein Leiter, welcher als Säule von der Länge und dem Querschnitte Eins den Widerstand Eins ergibt.

Im el.-magn. [C. G. S]-System ist also der spec. Widerstand des Quecksilbers bei 0° = 94070 cm²/sec. — Rechnet man den Widerstand in Ohm, die Länge in m, den Querschnitt in mm², so ist der spec. Widerstand Hg 0° gleich 0,9407 zu setzen. — Der reciproke spec. Widerstand heifst **Leitvermögen** des Körpers.

30. Stromleistung, $\mathfrak{L} = [l^2 m t^{-3}]$. Die Einheit wird geleistet durch den Strom Eins im Widerstande Eins, oder auch durch die el. Kraft Eins, wenn sie den Strom Eins erzeugt; [cm² gr sec⁻³ = 1 Erg/sec = 10^{-7} Watt = $1,020 \cdot 10^{-8}$ Kilogrammgewichtmeter/sec = $136 \cdot 10^{-12}$ Pferdestärke = $2,39 \cdot 10^{-8}$ gr-Kal/sec].

Die Leistung ist also allgemein $\mathfrak{L} = ei$; sie ist $= i^2 w$, sobald sie ausschliefslich in der Überwindung des Leitungswiderstandes besteht, also z. B. keine Elektrolyse, elektromagnetische Arbeit oder Induktion auf einen anderen Leiter vorliegt.

Die **Stromarbeit** in der Zeit t ist $Q = eit$, oder mit obiger Einschränkung $= i^2 wt$. Dieser Satz gilt sowohl für das elektrostatische wie das elektromagnetische System. Dafs das Produkt el. Kraft (Potential) mal Stromstärke mal Zeit in beiden Fällen die Dimension $l^2 m t^{-2}$, d. h. die einer Arbeit hat, ist S. 544 gezeigt worden. — Nennt man die Wärmemenge Eins, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist, so ist Q auch die entwickelte Stromwärme (Clausius, W. Thomson).

---

1) Gesetzlich sind die Definitionen der praktischen Einheiten: Ω = 1,063 m/mm² Hg 0°; A = 1,118 mg Silber/sec; V = Ω × A.

Ableitung. Der obige Satz bedarf für das elektrostatische System keines Beweises. Für das elektromagnetische folgt er z. B. aus den Gesetzen der Induktion in einem bewegten metallischen Leiter (S. 561) und der Erhaltung der Energie. Denn in einem geschlossenen Leiter, der unter dem Einflufs eines Magnetes bewegt wird, wird ein Strom inducirt, auf welchen nun durch den Magnet eine mechanische („ponderomotorische") Kraft ausgeübt wird, welche stets der wirklich ausgeführten Bewegung entgegenwirkt. Man verrichtet also durch diese Bewegung eine Arbeit, und deren Gröfse wird durch das Produkt aus dem Weg in die widerstehende Kraft gemessen. Der Weg ist = Geschwindigkeit × Bewegungsdauer $= u \cdot t$; die Kraft ist jedenfalls der Stärke i des inducirten Stromes proportional. Wir können also die Kraft $= p \cdot i$ setzen und die verrichtete mechanische Arbeit $= p \cdot iut$.

Der Faktor p bedeutet offenbar die Kraft, welche unter den gegebenen Verhältnissen von dem Magnet auf einen Strom Eins im Leiter ausgeübt werden würde. Dann aber sagt das Induktionsgesetz (S. 561), dafs pu die inducirte el. Kraft e nach absolutem Mafse darstellt; wir haben also die verrichtete Arbeit $piut = eit$. Dies heifst: wenn wir einen Leiter so bewegen, dafs durch Magnet-Induktion in ihm die el. Kraft e und der Strom i entsteht, so verrichten wir während der Zeit t die mechanische Arbeit eit oder i^2wt.

Da nun nach ausgeführter Bewegung als Wirkung dieser Arbeit in einem metallischen Leiter nur die durch den Strom in dem Leiter entwickelte Wärmemenge vorhanden ist, so folgt aus dem Gesetze der Gleichheit von Wärme und Arbeit, dafs eit (oder i^2wt) eben diese Wärmemenge darstellt, in welche die mechanische Arbeit durch Vermittelung des Stromes umgesetzt worden ist; natürlich die Wärmemenge als Einheit angenommen, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist.

Unmittelbar aber ist die in dem Leiter entwickelte Wärme doch nur eine innere Wirkung des Stromes, und so haben wir in i^2wt oder eit die Wärmemenge gegeben, welche ein Strom i entwickelt, wenn er einen Leiter vom Widerstande w durchfliefst, oder wenn er von der el. Kraft e hervorgebracht wird; mit anderen Worten i^2wt ist die von dem Strome verrichtete innere Arbeit.

Praktische Einheit der Stromleistung. 1 Watt $= 1$ V × A $= 10^7$ C.G.S.

Stromerzeugung durch chemische Processe; galvanische Elemente. Der Verbrauch von 1 gr-Äqu. im Element gibt (vgl. Nr. 23) die Strommenge $it = 9654$ [C.G.S], also bei der el. Kraft e die el. Arbeit (einschliefslich etwaiger Stromwärme im Element) $9654 \cdot e$ Erg, entsprechend $9654 \cdot e/41900000 = e/4340$ gr-Kal. Würde die Wärmeentwickelung Q, welche dem chemischen Procefs im Element pro gr-Äquivalent entspricht, ganz in elektrische Energie umgesetzt, so würde demnach die elektromotorische Kraft $e = 4340 \cdot Q$ [C.G.S] $= 0{,}0000434 \cdot Q$ V sein müssen, Q in gr-Kal. gemessen.

Einflufs der Temperatur auf die el. Kraft eines Elements. Anwendung des zweiten thermodynamischen Hauptsatzes (Helmholtz). Gegeben sei ein in beiden Richtungen unpolarisirbares Element (bei dem die Stromumkehr den chemischen Vorgang umkehrt, z. B. Cu-Zn mit $CuSO_4$ und $ZnSO_4$; Hg-Zn bez. Hg-Cd mit Hg_2SO_4 und $ZnSO_4$ bez. $CdSO_4$). Die el. Kraft sei e bei der Temperatur T, und e' bei der etwas verschiedenen Temperatur T'. Man konstruirt den folgenden Kreisprocefs.

Das Element werde bei T geschlossen und liefere, bis 1 gr-Äq. verbraucht ist, Strom, also die el. Arbeit ae, wo $a = 9654$; vgl. oben. Wenn Q die in Arbeitsmafs ausgedrückte Wärmetönung ist, welche der Summe der chemischen Processe dieses Vorganges entspricht, so mufs, um das Element auf T zu erhalten, ihm die Wärmemenge $ae - Q$ zugeführt (bez. $Q - ae$ entzogen) werden. — Der chemische Procefs werde zweitens bei der Temp. T' durch einen Gegenstrom rückgängig gemacht. Die hierauf von aufsen zu verwendende Arbeit (z. B. durch eine Dynamomaschine) beträgt ae'. Die gesamte, während des Kreisprocesses vom Element nach aufsen geleistete Arbeit ist also $a(e-e')$.

Nach dem 2. Hauptsatz (s. Nr. 9a) gilt also $a(e-e'):(ae-Q) = (T-T'):T$, woraus der Temp.-Koefficient der el. Kraft folgt:

$$\frac{e-e'}{T-T'} = \frac{1}{T}\left(e - \frac{Q}{a}\right) = \frac{1}{T}\left(e - \frac{Q}{9654}\right).$$

Die Temperatur ist mithin ohne Einflufs, wenn die el. Kraft der chemischen Wärmetönung genau entspricht, so dafs die chemische Energie Q sich durch den Strom gerade in elektrische ae umsetzt, was z. B. bei dem Daniell-Element nahe der Fall ist. Die el. Kraft ist nämlich hier $e = 1{,}1$ V $= 1{,}1 \cdot 10^8$ C.G.S, die bei dem Verbrauch von 1 gr-Äqu. geleistete Arbeit beträgt also $1{,}1 \cdot 10^8 \cdot 9654 = 106 \cdot 10^{10}$ Erg. Andrerseits gibt die gleichzeitige Auflösung von 1 gr-Äqu. Zn zu $ZnSO_4$ und Abscheidung von Cu aus $CuSO_4$ nach J. Thomsen die Wärmetönung $Q = 25060$ gr-Kal. oder $25060 \cdot 41900000 = 105 \cdot 10^{10}$ Erg., d. h. merklich denselben Wert. Ähnliches gilt vom Cadmium-Element.

Bei den meisten Elementen, z. B. bei dem Clark-Element, ist aber die el. Kraft kleiner, als die aus der Wärmetönung berechnete, also nimmt sie mit wachsender Temperatur ab.

Stromwärme. Der Strom 1 $cm^{1/2} gr^{1/2} sec^{-1}$ im Widerstande 1 Θ $= 10^9$ $cm\,sec^{-1}$ verrichtet in der Sekunde die Arbeit $10^9\,cm^2\,gr\,sec^{-2}$. Da nun der Wasser-gr-Kalorie (vgl. Nr. 9a) 41900000 solcher Arbeitseinheiten entsprechen, so beträgt die vom Strome 1 [C.G.S] in 1 Θ entwickelte Wärmemenge $10^9/41900000 = 23{,}9$ gr-Kal. Nach dem Ausdruck $Q = i^2wt$, und da 1 A $= 0{,}1$ [C.G.S] ist, entwickelt also der Strom i A in w Θ während t sec die Wärmemenge $0{,}239 \cdot i^2wt$ gr-Kal.

Zu gleichem Ergebnis führt die folgende Rechnung: Die el. Kraft 1 V $= 10^8\,cm^{3/2} gr^{1/2} sec^{-2}$ bringe den Strom 1 A $= 0{,}1\,cm^{1/2} gr^{1/2} sec^{-1}$ hervor, erzeuge also in 1 sec die Arbeit $10^7\,cm^2\,gr\,sec^{-2} = 10^7$ Erg.

$= 10^7 \cdot 1020 \cdot 10^{-8} = 102$ m×gr-Gew. (vgl. 9). Da 1 m×gr-Gew. = 1/427 gr-Kal., so beträgt die Wärmeentwicklung 102/427 = 0,239 gr-Kal.

Es ist also 1 Wattsekunde = 0,239 gr-Kal; 1 Wattstunde = 860 gr-Kal. Eine 16kerzige Glühlampe verbraucht etwa 50 Watt, entwickelt also $50 \cdot 0{,}239 = 12$ gr-Kal/sec.

Die verschiedenen Umrechnungszahlen zusammengestellt sind:
1 Watt = 10^7 Erg/sec = 0,102 Kilogrammgewichtmeter/sec = 0,00136 Pferdestärke = 0,239 gr-Kal/sec.

Die Weber'schen Einheiten des elektrischen Stromes lassen sich nach dem vorigen auf zwei Wegen ableiten. Die ursprünglichen Definitionen benutzen die Gesetze der elektromagnetischen Kraftwirkung und der Magnetoinduktion und bestimmen 1) als Stromeinheit den Strom, welcher unter normalen Verhältnissen elektromagnetisch die Einheit der Kraft ausübt oder erleidet; 2) als elektromotorische Kraft Eins die el. Kraft, welche in einem Stromleiter durch die Einheit magnetoelektrischer Beeinflussung inducirt wird; 3) als Widerstandseinheit den Widerstand eines Leiters, in dem die el. Kraft Eins die Stromeinheit erzeugt.

Von den beiden ersten, auf die Wechselbeziehungen zwischen Elektricität und Magnetismus gegründeten Definitionen kann aber die eine durch die Einführung der Stromleistung ersetzt werden; und zwar kann man etwa die Stromeinheit in der obigen Weise festlegen, demnächst jedoch entweder die Einheit der elektromotorischen Kraft definiren als die el. Kraft, welche, wenn sie den Strom Eins erzeugt, die Einheit der Leistung verrichtet, oder aber die Widerstandseinheit als den Widerstand eines Leiters, in dem der Strom Eins die Leistung Eins hervorbringt.

Andrerseits kann man von der, oben auf die Magnetoinduktion gegründeten Einheit der elektromotorischen Kraft ausgehen und daran als zweite Einheit entweder den Strom anschliefsen, durch dessen Erzeugung, oder auch den Widerstand, durch dessen Überwindung die elektromotorische Kraft Eins die Einheit der Arbeitsleistung verrichtet.

Den Abschlufs bildet jedesmal die Zurückführung der dritten Einheit auf das Ohm'sche Gesetz. Das entstehende Mafssystem ist in jedem Falle das gleiche.

Tabellen.

1. Reduktion einer mit Messinggewichten ausgeführten Wägung auf den leeren Raum.

s	k	s	k	s	k
0,7	+ 1,57	2,0	+ 0,457	8	+ 0,007
0,8	1,36	2,5	0,337	9	— 0,010
0,9	1,19	3,0	0,257	10	— 0,023
1,0	1,06	3,5	0,200	11	— 0,034
1,1	0,95	4,0	0,157	12	— 0,043
1,2	0,86	4,5	0,124	13	— 0,051
1,3	0,78	5,0	0,097	14	— 0,057
1,4	0,71	5,5	0,075	15	— 0,063
1,5	0,66	6,0	0,057	16	— 0,068
1,6	0,61	6,5	0,042	17	— 0,072
1,7	0,56	7,0	0,029	18	— 0,076
1,8	0,52	7,5	0,017	19	— 0,080
1,9	0,49	8,0	+ 0,007	20	— 0,083
2,0	+ 0,46			21	— 0,086

$$k = 1{,}20\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{8{,}4}\right).$$

Wiegt ein Körper von der Dichtigkeit s in der Luft m Gramm, so sind mk Milligramm hinzuzufügen, um die Wägung auf den leeren Raum zu reduciren. Vgl. **13**.

2. Dichtigkeit fester und flüssiger Körper.

Aluminium	2,7	Nickel	8,8	Flüssigkeiten bei 18°.	
Blei	11,3	Platin	21,4		
Braunstein	5,0	Quarz	2,65	CO_2 0,8; NH_3 0,6; SO_2	1,4
Bronce	8,7	Schwefel	2,0	Äther $C_4H_{10}O$	0,717
Eisen, Schmiede-	7,8	Silber	10,5	Äthylacetat $C_4H_8O_2$	0,90
Gufs-	7,1—7,7	Wachs	0,96	Alkohol C_2H_6O	0,7911
Draht	7,7	Wismut	9,8	Ameisensäure CH_2O_2	1,22
Gufsstahl	7,8	Zink	7,1	Amylacetat (i) $C_7H_{14}O_2$	0,88
Elfenbein	1,9	Zinn	7,3	Amylalkohol $C_5H_{12}O$	0,81
Glas (vgl. 8, 5)	2,4—2,6	Eis	0,9167	Anilin C_6H_7N	1,02
Flintglas	3,0—5,9	KCl	1,98	Benzol C_6H_6	0,881
Gold	19,2	KNO_3	2,09	Bromoform $CHBr_3$	2,86
Gyps	2,32	K_2SO_4	2,65	Chloroform $CHCl_3$	1,493
Hartkautschuk	1,2	KOH	2,0	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1,053
Holz, Eben-	1,2	NaCl	2,15	Glycerin $C_3H_8O_3$	1,24
Buchen-	0,7	$NaNO_3$	2,24	Jodmethylen CH_2J_2	3,3
Eichen-	0,7	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$	1,46	Methylacetat $C_3H_6O_2$	0,93
Tannen-	0,5	$Na_2CO_3 + 10\,H_2O$	1,46	Methylalkohol CH_4O	0,80
Kalium	0,87	$BaCl_2$	3,85	Nitrobenzol $C_6H_5O_2N$	1,21
Kalkspat	2,71	$SrCl_2$	3,05	Olivenöl	0,91
Konstantan	8,8	NH_4Cl	1,52	Petroleum	0,8
Kork	0,2	AgCl	5,55	Phenol C_6H_6O	1,08
Kupfer	8,5—8,9	$MgSO_4 + 7\,H_2O$	1,68	Schwefelkohlenst. CS_2	1,265
Magnesium	1,7	$ZnSO_4 + 7\,H_2O$	2,01	Terpentinöl	0,87
Manganin	8,4	$CuSO_4 + 5\,H_2O$	2,27	Toluol C_7H_8	0,89
Messing	8,1—8,6	Naphtalin $C_{10}H_8$	1,14	Xylol C_8H_{10}	0,87
Natrium	0,98	Weinsäure $C_4H_6O_6$	1,76	Quecksilber 18°	13,552
Neusilber	8,5	Zucker $C_{12}H_{22}O_{11}$	1,59	„ 0°	13,596

2a. Dichtigkeit von Gasen.

Nach Regnault, Jolly, Leduc, Rayleigh zusammengestellt von Rayleigh u. Ramsay	Wasser = 1 bei 0° u. 760 mm unter 45° Breite	Luft = 1	Sauerstoff = 16
		bei gleicher Temperatur und gleichem Druck	
Luft	0,0012932	1,0000	14,475
Sauerstoff	0,0014294	1,1053	16,000
Stickstoff	0,0012508	0,9672	14,001
Atmosphärischer „Stickstoff"	0,0012571	0,9721	14,071
Argon	0,001783	1,379	19,96
Helium	0,000177	0,137	1,98
Wasserstoff	0,00009005	0,06964	1,008
Kohlensäure	0,001965	1,519	22,00
Knallgas	0,0005363	0,4147	6,00
Wasserdampf	0,000804	0,622	9,00

3. Specifisches Gewicht wässriger Lösungen bei 18°, bezogen auf Wasser von 4°.

Gröfstenteils nach Gerlach (ZS. f. anal. Chem. 8, 279. 1869) und Kohlrausch (Pogg. Ann. 159, 257. 1876; Wied. Ann. 6, 38. 1879); auch Carius, Lunge, Mendeléeff, Schiff, Normal-Aichungskommission.

Der Procentgehalt bedeutet überall die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthaltenen Gewichtsteile der überschriebenen wasserfreien Verbindung.

%	KOH	KCl	KBr	KJ	KNO_3	K_2SO_4	K_2CO_3	$K_2Cr_2O_7$	%
0	0,999	0,9986	0,9986	0,9986	0,9986	0,9986	0,9986	0,999	0
5	1,045	1,0308	1,0350	1,0363	1,0305	1,0395	1,0442	1,035	5
10	1,092	1,0638	1,0732	1,0762	1,0632	1,0813	1,0910	1,072	10
15	1,140	1,0978	1,114	1,120	1,097		1,140	1,109	15
20	1,190	1,1335	1,157	1,1679	1,133		1,191		20
25	1,240		1,204	1,218			1,244		25
30	1,293		1,254	1,273			1,299		30
35	1,347		1,307	1,332			1,356		35
40	1,405		1,365	1,397			1,415		40
45	1,464		1,429	1,468			1,477		45
50	1,53			1,545			1,541		50
55	1,59			1,630					55
60	1,66			1,731					60

%	NH_3	NH_4Cl	NaOH	NaCl	$NaNO_3$	NaAc	Na_2CO_3	LiCl	%
0	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0,9986	0,999	0,999	0,9986	0
5	0,978	1,0142	1,056	1,0345	1,0327	1,025	1,051	1,0274	5
10	0,958	1,0289	1,112	1,0711	1,0681	1,051	1,104	1,0563	10
15	0,940	1,0430	1,169	1,1090	1,105	1,078	1,159	1,085	15
20	0,923	1,0571	1,225	1,1485	1,144	1,105		1,115	20
25	0,908	1,0710	1,281	1,1897	1,185	1,132		1,147	25
30	0,893		1,336		1,227	1,160		1,181	30
35	0,881		1,389		1,270			1,217	35
40			1,440		1,314			1,255	40
45			1,49		1,365				45
50			1,54		1,42				50

%	$BaCl_2$	$SrCl_2$	$CaCl_2$	$MgCl_2$	$MgSO_4$	$ZnSO_4$	$CdSO_4$	$CuSO_4$	%
0	0,999	0,9986	0,999	0,999	0,999	0,999	0,9986	0,999	0
5	1,044	1,0443	1,041	1,042	1,050	1,051	1,0486	1,051	5
10	1,093	1,0932	1,085	1,086	1,104	1,107	1,1026	1,107	10
15	1,147	1,1456	1,131	1,130	1,160	1,167	1,1607	1,167	15
20	1,204	1,2023	1,179	1,176	1,220	1,232	1,2245	1,23*	20
25	1,268	1,256	1,230	1,225	1,283	1,305	1,2950		25
30		1,320	1,284	1,278		1,379	1,3725		30
35			1,342	1,332			1,4575		35
40			1,400						40

%	$AgNO_3$	$PbAc_2$	HCl	HNO_3	H_2SO_4	H_3PO_4	Alkohol	Zucker	%
0	0,9986	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0,9986	0
5	1,0422	1,036	1,0236	1,027	1,0324	1,027	0,9898	1,0183	5
10	1,0893	1,075	1,0482	1,056	1,0673	1,054	0,9824	1,0386	10
15	1,1404	1,118	1,0734	1,086	1,1036	1,083	0,9760	1,0597	15
20	1,1958	1,163	1,0989	1,118	1,1414	1,114	0,9696	1,0815	20
25	1,2555	1,212	1,1248	1,151	1,181	1,145	0,9628	1,1042	25
30	1,3213	1,265	1,1508	1,184	1,221	1,179	0,9551	1,1277	30
35	1,3945	1,322	1,1757	1,217	1,262	1,214	0,9463	1,1520	35
40	1,4773	1,386	1,199	1,250	1,306	1,251	0,9367	1,1773	40
45	1,5705			1,283	1,351	1,290	0,9264	1,2034	45
50	1,6745			1,314	1,398	1,330	0,9155	1,2304	50
55	1,7895			1,344	1,449	1,373	0,9043	1,2584	55
60	1,9158			1,372	1,502	1,418	0,8928	1,2874	60
65				1,397	1,558	1,464	0,8811	1,3173	65
70				1,418	1,615	1,512	0,8693	1,3482*	70
75				1,438	1,673	1,562	0,8574	1,380*	75
80				1,457	1,732	1,615	0,8452	* über-	80
85				1,473	1,783	1,672	0,8327	sättigt	85
90				1,489	1,817		0,8197		90
95				1,50	1,837		0,8060		95
100				1,52	1,835		0,7911		100

3a. Wässrige Normallösungen bei 18°; Gehalt, Dichtigkeit, elektrisches Leitvermögen und Wanderung der Ionen.

1 Grammäquivalent im Liter.

A	Äquivalentgewicht (O = 16,00) oder Koncentration in gr/liter.
p	Procentgehalt, in 100 Gewichtsteilen der Lösung.
$s_{18/4}$	Specifisches Gewicht der Lösung.
Δs_{18}	Abnahme von s auf $+1°$ um 18° (Gerlach, Forch).
$\varkappa_{18}$	Elektrisches Leitvermögen bei 18° in $Ohm^{-1}cm^{-1}$.
$\Delta\varkappa/\varkappa_{18}$	Relatives Wachstum von k auf $+1°$ in der Nähe von 18°.
n	Elektrische Überführungszahl des Anions, meist nach Hittorf.

s, $\varkappa$ und $\Delta\varkappa$ meist nach F. K.; vgl. Kohlr. u. Holborn, Elektrolyte, Tab. 2. 1898.

	A	p	$s_{18/4}$	Δs_{18}	$10^3 \cdot \varkappa_{18}$	$\Delta\varkappa/\varkappa_{18}$	n
KOH	56,16	5,359	1,0479	0,00030	184	0,0186	0,74
KCl	74,60	7,139	0449	28	98,3	193	0,51
KBr	119,11	11,01	0814	29	103	190	0,51
KJ	166,00	14,841	1185	33	103,4	190	0,51
KNO_3	101,19	9,544	0602	33	80,5	200	0,49
$KC_2H_3O_2$ ..	98,17	9,378	0468		63,4	215	0,33
$\frac{1}{2}K_2SO_4$	87,18	8,178	0660	29	71,8	205	0,50
$\frac{1}{2}K_2CO_3$	69,15	6,538	0577	27	70,7	215	0,43
NH_4Cl	53,52	5,271	0153	24	97,0	194	0,51
NaOH	40,06	3,844	0420	31	160	197	0,83
NaCl	58,50	5,629	0392	28	74,3	212	0,64
$NaNO_3$	85,09	8,070	0544	35	65,9	215	0,61
$NaC_2H_3O_2$ ..	82,05	7,897	040	22	41,2	250	0,42
$\frac{1}{2}Na_2SO_4$	71,08	6,708	0604	31	50,8	236	0,64
$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	53,07	5,044	0515	29	45,5	246	0,55
LiCl	42,48	4,157	0226	22	63,4	220	0,74
$\frac{1}{2}Li_2SO_4$	55,06	5,271	0446	25	41,4	231	(0,7)
$\frac{1}{2}BaCl_2$	104,15	9,563	0890	31	70,3	202	0,64
$\frac{1}{2}SrCl_2$	79,26	7,426	0674	28	68,5	207	0,65
$\frac{1}{2}CaCl_2$	55,45	5,313	0436	25	67,8	207	0,69
$\frac{1}{2}MgCl_2$	47,63	4,589	0379	23	61,5	217	0,71
$\frac{1}{2}MgSO_4$	60,21	5,692	0572	27	28,9	225	0,74
$\frac{1}{2}ZnCl_2$	68,15	6,442	0578		55	22	(0,7)
$\frac{1}{2}ZnSO_4$	80,73	7,483	0789	27	26,6	22	0,68
$\frac{1}{2}CuSO_4$	79,83	7,408	0776	28	25,8	22	0,70
$AgNO_3$	169,97	14,91	140		67,8	210	0,50
$\frac{1}{2}Pb(NO_3)_2$ ..	165,5	14,51	1402		42,0	250	
HCl	36,46	3,587	0165		300	159	0,17
HNO_3	63,05	6,107	0325	31	299	150	0,17
$\frac{1}{2}H_2SO_4$	49,04	4,758	0307	30	197	120	0,17
$C_2H_4O_2$	60,03	5,959	0074				
Zucker	342,2	30,30	1,1294	34			

4. Dichtigkeit des Wassers

für die Temperatur t des Wasserstoff-Thermometers (Thiesen, Scheel u. Diesselhorst, Wiss. Abh. der P. T. Reichsanst. 3, S. 68, 1900)

und

Volumen V eines Glasgefässes bei 18°,

welches bei t^0 mit Messinggewichten in Luft von der Dichtigkeit 0,00120 gewogen, scheinbar 1 gr Wasser faſst, in ccm. Ausd.-Koeff. des Glases $= \frac{1}{40000}$ gesetzt.

t	Dichtigkeit	Differenz	Glas-Volumen V	Differenz
0°	0,999 868		1,001 64	
		+ 59		− 8
1	0,999 927		1,001 56	
		+ 41		− 7
2	0,999 968		1,001 49	
		+ 24		− 5
3	0,999 992		1,001 44	
		+ 08		− 3
4	1,000 000		1,001 41	
		− 08		− 2
5	0,999 992		1,001 39	
		− 24		
6	0,999 968		1,001 39	
		− 39		+ 1
7	0,999 929		1,001 40	
		− 53		+ 3
8	0,999 876		1,001 43	
		− 68		+ 4
9	0,999 808		1,001 47	
		− 81		+ 6
10	0,999 727		1,001 53	
		− 95		+ 7
11	0,999 632		1,001 60	
		−107		+ 8
12	0,999 525		1,001 68	
		−121		+10
13	0,999 404		1,001 78	
		−133		+11
14	0,999 271		1,001 89	
		−145		+12
15	0,999 126		1,002 01	
		−156		+13
16	0,998 970		1,002 14	
		−169		+15
17	0,998 801		1,002 29	
		−179		+15
18	0,998 622		1,002 44	
		−190		+17
19	0,998 432		1,002 61	
		−202		+17
20	0,998 230		1,002 78	
		−211		+19
21	0,998 019		1,002 97	
		−222		+20
22	0,997 797		1,003 17	
		−232		+21
23	0,997 565		1,003 38	
		−242		+22
24	0,997 323		1,003 60	
		−252		+23
25	0,997 071		1,003 83	
		−261		+23
26	0,996 810		1,004 06	
		−271		+25
27	0,996 539		1,004 31	
		−280		+26
28	0,996 259		1,004 57	
		−288		+27
29	0,995 971		1,004 84	
		−298		+27
30	0,995 673		1,005 11	

5. Specifisches Volumen des Wassers, d. h. Volumen eines Grammes Wasser in Kubikcentimetern, zwischen 0 und 100°.

Temp.	Volumen	Zunahme auf 1°
0°	1,000 13	
4	1,000 00	
10	1,000 27	
		0,000 12
15	1,000 87	
		0,000 18
20	1,001 77	
		0,000 23
25	1,002 94	
		0,000 28
30	1,004 35	
		0,000 33
35	1,005 98	
		0,000 37
40	1,007 82	
		0,000 39
45	1,009 74	
		0,000 44
50	1,012 01	
		0,000 48
55	1,014 42	
		0,000 51
60	1,016 97	
		0,000 55
65	1,019 71	
		0,000 58
70	1,022 60	
		0,000 62
75	1,025 69	
		0,000 64
80	1,028 90	
		0,000 67
85	1,032 24	
		0,000 70
90	1,035 74	
		0,000 73
95	1,039 38	
		0,000 77
99	1,042 47	
		0,000 80
100	1,043 27	

6. Specifisches Gewicht der trockenen atmosphärischen Luft,

bezogen auf Wasser von 4⁰,

bei der Temperatur t und dem Drucke H mm Quecksilber von 0⁰ für 45⁰ Breite berechnet als (**18**)

$$\frac{0{,}0012932}{1+0{,}00367\,t}\,\frac{H}{760}.$$

t	Druck $H = 700$	710	720	730	740	750	760	770
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0⁰	1191	1208	1225	1242	1259	1276	1293	1310
1	1187	1204	1221	1238	1255	1272	1288	1305
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1301
3	1178	1195	1212	1229	1245	1262	1279	1296
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1287
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	1265	1282
7	1161	1178	1194	1211	1228	1244	1261	1277
8	1157	1174	1190	1207	1223	1240	1256	1273
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268
10	1149	1165	1182	1198	1215	1231	1247	1264
11	1145	1161	1178	1194	1210	1227	1243	1259
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1239	1255
13	1137	1153	1169	1186	1202	1218	1234	1251
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246
15	1129	1145	1161	1177	1193	1210	1226	1242
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1238
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	1233
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225
20	1110	1126	1141	1157	1173	1189	1205	1221
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1201	1216
22	1102	1118	1134	1149	1165	1181	1197	1212
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1193	1208
24	1095	1110	1126	1142	1157	1173	1189	1204
25	1091	1107	1122	1138	1153	1169	1185	1200
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1181	1196
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1177	1192
28	1080	1096	1111	1126	1142	1157	1173	1188
29	1077	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184
30	1073	1088	1104	1119	1134	1150	1165	1180

P. P.

mm	17	16	15
1	2	2	1
2	3	3	3
3	5	5	4
4	7	6	6
5	8	8	7
6	10	10	9
7	12	11	10
8	14	13	12
9	15	14	13

7. Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm.

Volumen v und Dichtigkeit s eines Gases, bei der Temperatur t und dem Drucke H gemessen, werden für 0° und 760 mm, wenn $\alpha = 0{,}00367$ ist,

$$v_0 = \frac{v}{1+\alpha t} \cdot \frac{H}{760} \quad \text{und} \quad s_0 = s(1+\alpha t)\frac{760}{H}.$$

t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$
0°	1,0000	40°	1,1468	80°	1,2936
1	1,0037	41	1,1505	81	1,2973
2	1,0073	42	1,1541	82	1,3009
3	1,0110	43	1,1578	83	1,3046
4	1,0147	44	1,1615	84	1,3083
5	1,0183	45	1,1651	85	1,3119
6	1,0220	46	1,1688	86	1,3156
7	1,0257	47	1,1725	87	1,3193
8	1,0294	48	1,1762	88	1,3230
9	1,0330	49	1,1798	89	1,3266
10	1,0367	50	1,1835	90	1,3303
11	1,0404	51	1,1872	91	1,3340
12	1,0440	52	1,1908	92	1,3376
13	1,0477	53	1,1945	93	1,3413
14	1,0514	54	1,1982	94	1,3450
15	1,0550	55	1,2018	95	1,3486
16	1,0587	56	1,2055	96	1,3523
17	1,0624	57	1,2092	97	1,3560
18	1,0661	58	1,2129	98	1,3597
19	1,0697	59	1,2165	99	1,3633
20	1,0734	60	1,2202	100	1,3670
21	1,0771	61	1,2239	101	1,3707
22	1,0807	62	1,2275	102	1,3743
23	1,0844	63	1,2312	103	1,3780
24	1,0881	64	1,2349	104	1,3817
25	1,0917	65	1,2385	105	1,3853
26	1,0954	66	1,2422	106	1,3890
27	1,0991	67	1,2459	107	1,3927
28	1,1028	68	1,2496	108	1,3964
29	1,1064	69	1,2532	109	1,4000
30	1,1101	70	1,2569	110	1,4037
31	1,1138	71	1,2606	111	1,4074
32	1,1174	72	1,2642	112	1,4110
33	1,1211	73	1,2679	113	1,4147
34	1,1248	74	1,2716	114	1,4184
35	1,1284	75	1,2752	115	1,4220
36	1,1321	76	1,2789	116	1,4257
37	1,1358	77	1,2826	117	1,4294
38	1,1395	78	1,2863	118	1,4331
39	1,1431	79	1,2899	119	1,4367
40	1,1468	80	1,2936	120	1,4404

H	$H/760$	H	$H/760$
mm		mm	
700	0,9211	740	0,9737
701	0,9224	741	0,9750
702	0,9237	742	0,9763
703	0,9250	743	0,9776
704	0,9263	744	0,9789
705	0,9276	745	0,9803
706	0,9289	746	0,9816
707	0,9303	747	0,9829
708	0,9316	748	0,9842
709	0,9329	749	0,9855
710	0,9342	750	0,9868
711	0,9355	751	0,9882
712	0,9368	752	0,9895
713	0,9382	753	0,9908
714	0,9395	754	0,9921
715	0,9408	755	0,9934
716	0,9421	756	0,9947
717	0,9434	757	0,9961
718	0,9447	758	0,9974
719	0,9461	759	0,9987
720	0,9474	760	1,0000
721	0,9487	761	1,0013
722	0,9500	762	1,0026
723	0,9513	763	1,0039
724	0,9526	764	1,0053
725	0,9539	765	1,0066
726	0,9553	766	1,0079
727	0,9566	767	1,0092
728	0,9579	768	1,0105
729	0,9592	769	1,0118
730	0,9605	770	1,0132
731	0,9618	771	1,0145
732	0,9632	772	1,0158
733	0,9645	773	1,0171
734	0,9658	774	1,0184
735	0,9671	775	1,0197
736	0,9684	776	1,0211
737	0,9697	777	1,0224
738	0,9711	778	1,0237
739	0,9724	779	1,0250
740	0,9737	780	1,0263

8. Reduktion der Barometerablesung auf 0°.

Von einem Barometerstande h, der bei t^0 an einem bei 0^0 richtigen Maſsstabe abgelesen wird, ist $(0{,}000181-\beta)ht$ abzuziehen. Der Ausdehnungskoefficient β des Maſsstabes ist in der Tabelle (für Messing) $=0{,}000019$ angenommen.

Für einen Glas-Maſsstab sind die Zahlen der Tabelle um $0{,}008\cdot t$ zu vergröſsern. S. die letzte Spalte.

	Abgelesener Stand in mm										0,008 t
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	
t	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1°	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,02
4	0,44	0,45	0,45	0,46	0,47	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62	0,04
6	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,05
7	0,77	0,78	0,79	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,06
8	0,88	0,89	0,91	0,92	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,06
9	0,99	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	0,07
10	1,10	1,12	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	0,08
11	1,21	1,23	1,25	1,27	1,28	1,30	1,32	1,34	1,35	1,37	0,09
12	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	0,10
13	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	0,10
14	1,54	1,56	1,59	1,61	1,63	1,66	1,68	1,70	1,72	1,75	0,11
15	1,65	1,68	1,70	1,73	1,75	1,77	1,80	1,82	1,85	1,87	0,12
16	1,76	1,79	1,81	1,84	1,87	1,89	1,92	1,94	1,97	2,00	0,13
17	1,87	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,04	2,07	2,09	2,12	0,14
18	1,98	2,01	2,04	2,07	2,10	2,13	2,16	2,19	2,22	2,25	0,14
19	2,09	2,12	2,15	2,19	2,22	2,25	2,28	2,31	2,34	2,37	0,15
20	2,20	2,24	2,27	2,30	2,33	2,37	2,40	2,43	2,46	2,49	0,16
21	2,31	2,35	2,38	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55	2,59	2,62	0,17
22	2,42	2,46	2,49	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	2,71	2,74	0,18
23	2,53	2,57	2,61	2,65	2,68	2,72	2,76	2,79	2,83	2,87	0,18
24	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80	2,84	2,88	2,92	2,95	2,99	0,19
25	2,75	2,79	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00	3,04	3,08	3,12	0,20
26	2,86	2,91	2,95	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	3,20	3,24	0,21
27	2,97	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,24	3,28	3,32	3,37	0,22
28	3,08	3,13	3,18	3,22	3,27	3,31	3,36	3,40	3,45	3,49	0,22
29	3,19	3,24	3,29	3,34	3,38	3,43	3,48	3,52	3,57	3,62	0,23
30	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,69	3,74	0,24

9. Mittlerer Barometerstand b in der Höhe H Meter über dem Meeresspiegel.

Unter Annahme der Lufttemperatur 10°. Vgl. 38.

$H=$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000 m
$b=$	760	751	742	733	724	716	707	699	690	682	674 mm
$H=$	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000 m
$b=$	674	666	658	650	642	635	627	620	612	605	598 mm

10. Kapillardepression des Quecksilbers.

Interpolirt nach Mendeléeff und Gutkowsky. Vgl. aber S. 220.

Durchmesser	Höhe des Meniscus in mm							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

10a. Ausdehnungskoefficient wässriger Lösungen um 18°.

Grofsenteils nach Gerlach, Forch, Plato. — Die Zahlen geben $10^5 \cdot \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}$.

	0%	5%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
KCl	19		29	40								
NaCl ...	19	25	30	40								
LiCl	19	20	22	25	27	30						
KNO_3 ..	19	26	32									
$NaNO_3$.	19	30	36									
$LiNO_3$ ..	19	26	32									
K_2SO_4 ..	19	25	27									
Na_2SO_4 .	19	26	30									
$MgSO_4$.	19	23	27	29								
Alkohol.	19	18	23	42	64	79	86	92	98	103	107	104
Zucker..	19	20	21	25	29	32	35	37	39			

11. Feste Körper. Ausdehnungskoefficient, specifische Wärme, Wärmeleitvermögen in gr-Kal/(cm·Grad·sec) um 18°, Schmelzpunkt und Schmelzwärme.

Verunreinigungen erniedrigen das Leitvermögen meistens erheblich.

	Ausdehnungs-koefficient	Specifische Wärme	Wärme-leitvermögen	Schmelzpunkt (*, unscharf)	Schmelz-wärme
					Kalor.
Aluminium	0,0000 23	0,22	0,48	*657°	
Antimon	12	0,050	0,04	630	
Blei	29	0,031	0,08	327	6
Cadmium	31	0,056	0,22	321	14
Eisen	12	0,11	0,14 bis 0,17	1200 bis 1400	etwa 30
Stahl	11	0,12	0,06 bis 0,12	1300 bis 1400	
Gold	15	0,031	0,70	1064	
Kobalt	12	0,11		etwa 1600	
Konstantan	15	0,10	0,054		
Kupfer	17	0,093	0,93	1084 1065 mit Luft	
Magnesium	27	0,25	0,38	630	
Messing	19	0,093	0,15 bis 0,30	etwa 900	
Neusilber	18	0,095	0,07 bis 0,09	etwa 1000	
Nickel	13	0,11	0,14	1470	
Palladium	12	0,059	0,17	1550	36
Platin	09	0,032	0,17	1800	27
Platiniridium (10% Ir)	09				
Schwefel	70	0,16 bis 0,24		114	9
Silber	19	0,056	1,00	961 *955 mit Luft	21
Wismut	14	0,030	0,019	269	13
Zink	29	0,094	0,26	419	28
Zinn	23	0,054	0,15	232	13
Rose's Metall		0,04	0,04	95	7
Wood's Metall		0,04	0,03	65 bis 70	8
Berliner Porzellan	03				
Glas, Jenaer 16	078	0,19	0,001 bis 0,002	800 bis 1400	
„ „ 59	058				
Quarz, senkr. zur Axe	137	0,190	0,0001	etwa 2000	
„ parall. „ „	074				
Holzfaser	03 bis 09	—	0,0003	—	
Hartgummi	80				
	Kub.-A.-K.				
Kalkspat	0,000 014	0,21			
KNO_3		0,23		340	48
$NaNO_3$		0,27		etwa 310	63
$KNO_3 + NaNO_3$				225	44
KCl		0,17		760	
NaCl		0,21		790	
K_2SO_4		0,19		1060	

12. Flüssigkeiten. Ausdehnungskoefficient, specifische Wärme, Schmelzpunkt t_0, Siedepunkt t_1,

ihre Erniedrigung $-\Delta t_0$, bezw. Erhöhung $+\Delta t_1$ durch Auflösung von 1 Gramm-Molekül in 100 gr des Lösungsmittels (Δt_1 grofsenteils nach Beckmann).

Schmelzwärme ϱ und Verdampfungswärme σ

bei dem atmosphärischen Siedepunkt.

	Ausdehn.-koefficient (um 18°)	Specifische Wärme	Schmelzp. t_0	$-\Delta t_0$	ϱ	Siedep. t_1	$+\Delta t_1$	σ
					Kalor.			Kalor.
Äther	0,00163	0,54	—118°			34,9°	2,1°	90
Äthylacetat						73	2,7	90
Äthylbenzoat						213		
Äthylbromid	0,00137	0,21				38	2,8	59
Äthyljodid	0,00116	0,16				73	5,2	47,5
Alkohol	0,00110	0,58	—110(?)			78,3	1,16	210
Ameisensäure	0,00099	0,53	+8,6	2,8	58	101		120
Amylacetat						140		
Amylalkohol	0,00093	0,55				130	3,2	121
Amylbenzoat						260		
Anilin	0,00085	0,49	—8			184	2,4	113
Benzol	0,00124	0,40	+5,0	5,1	30	80,3	2,7	94,4
Chloroform	0,00126	0,23	—70			61,2	3,6	58
Essigsäure	0,00107	0,50	+17	3,8	45	118		97
Glycerin	0,00050	0,58	—20			290		
Kohlensäure			—57			—78,2		
Methylacetat						57	2,1	97
Methylalkohol	0,00122	0,60				66		262
Methylbenzoat						199		
Methyljodid	0,00121		5			43	4,3	46
Nitrobenzol	0,00085	0,34	+3	7,1	22	210		
Petroleum	0,00092	0,51						
Schwefelkohlenstoff	0,00121	0,24	—113			46	2,4	90
Stearinsäure			70			370		
Terpentinöl	0,00094	0,42						70
Toluol	0,00109	0,40	—102			110		85
Wasser	0,00018	1	0	1,84	80,1	100	0,52	539
Xylol	0,00101	0,40	+15		39	140		
Quecksilber	0,000181	0,0332	—38,8		2,8	357		62
Naphtalin			+79		36	218		
Phenol	lin. Ausd.		+40		25	183	3,0	
Schwefel	0,00007	0,16 bis 0,24	114			445		362
Zink	0,000029	0,094	419		28	915		

13. Gesättigter Wasserdampf.

Spannkraft *e* in mm Quecksilber (unterhalb 0° über Eis),
—10 bis +31° nach Thiesen u. Scheel,
31 bis 75° nach Regnault-Broch, 76 bis 90° nach Wiebe;
Masse *f* eines Kubikmeters in Grammen.

t	e	f	t	e	f	t	e	t	e	t	e
	mm	gr/cbm		mm	gr/cbm		mm		mm		
—10°	1,9	2,1	10°	9,2	9,4	30°	31,8	50°	92,0	70°	233,3
— 9	2,1	2,3	11	9,8	10,0	31	33,5	51	96,7	71	243,6
— 8	2,3	2,5	12	10,5	10,7	32	35,3	52	101,6	72	254,3
— 7	2,5	2,7	13	11,2	11,4	33	37,4	53	106,7	73	265,4
— 6	2,8	3,0	14	12,0	12,1	34	39,5	54	112,0	74	276,9
— 5	3,0	3,3	15	12,8	12,8	35	41,8	55	117,5	75	288,8
— 4	3,3	3,6	16	13,6	13,7	36	44,2	56	123,3	76	301,6
— 3	3,6	3,9	17	14,5	14,5	37	46,6	57	129,3	77	314,4
— 2	3,9	4,2	18	15,5	15,4	38	49,3	58	135,6	78	327,6
— 1	4,2	4,5	19	16,5	16,3	39	52,0	59	142,1	79	341,3
0	4,6	4,9	20	17,5	17,3	40	54,9	60	148,9	80	355,4
+1	4,9	5,2	21	18,6	18,3	41	57,9	61	155,9	81	370,0
2	5,3	5,6	22	19,8	19,4	42	61,0	62	163,3	82	385,2
3	5,7	6,0	23	21,1	20,6	43	64,3	63	170,9	83	400,8
4	6,1	6,4	24	22,4	21,8	44	67,8	64	178,8	84	417,0
5	6,5	6,8	25	23,8	23,1	45	71,4	65	187,1	85	433,7
6	7,0	7,3	26	25,3	24,5	46	75,1	66	195,7	86	451,0
7	7,5	7,8	27	26,8	25,8	47	79,1	67	204,6	87	468,8
8	8,0	8,2	28	28,4	27,3	48	83,2	68	213,8	88	487,3
9	8,6	8,8	29	30,1	28,8	49	87,5	69	223,4	89	506,3
10	9,2	9,4	30	31,8	30,4	50	92,0	70	233,3	90	525,9

14. Spannkraft des Wasserdampfes

in mm Quecksilber von 0° zwischen 90° und 100° (Tabelle von Wiebe).

	90°	91°	92°	93°	94°	95°	96°	97°	98°	99°	100°
,0	525,9	546,2	567,1	588,7	611,0	634,0	657,7	682,1	707,3	733,2	760,0
,1	27,9	48,3	69,3	90,9	13,3	36,3	60,1	84,6	09,8	35,9	62,7
,2	29,9	50,3	71,4	93,1	15,5	38,6	62,5	87,1	12,4	38,5	65,4
,3	32,0	52,4	73,5	95,3	17,8	41,0	64,9	89,6	15,0	41,2	68,2
,4	34,0	54,5	75,7	97,6	20,1	43,4	67,3	92,1	17,6	43,8	70,9
,5	36,0	56,6	77,8	599,8	22,4	45,7	69,8	94,6	20,2	46,5	73,7
,6	38,0	58,7	80,0	602,0	24,7	48,1	72,2	97,1	22,8	49,2	76,4
,7	40,1	60,8	82,2	04,2	27,0	50,5	74,7	699,6	25,4	51,9	79,2
,8	42,1	62,9	84,4	06,5	29,3	52,9	77,1	702,2	28,0	54,6	82,0
,9	544,2	565,0	586,5	608,7	631,6	655,3	679,6	704,7	730,6	757,3	784,8

14a. Siedetemperatur des Wassers *t* bei dem Barometerstand *b*

(Tabelle von Wiebe, Braunschweig 1894).

b	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*
mm	0	mm	0	mm	0	mm	0	mm	0	mm	0
680	96,92	700	97,71	720	98,49	740	99,26	760	100,00	780	100,73
81	96,96	01	,75	21	,53	41	,29	61	,04	81	,76
82	97,00	02	,79	22	,57	42	,33	62	,07	82	,80
83	,04	03	,83	23	,61	43	,37	63	,11	83	,84
84	,08	04	,87	24	,65	44	,41	64	,15	84	,87
85	,12	05	,91	25	,69	45	,44	65	,18	85	,91
86	,16	06	,95	26	,72	46	,48	66	,22	86	,94
87	,20	07	97,99	27	,76	47	,52	67	,26	87	100,98
88	,24	08	98,03	28	,80	48	,55	68	,29	88	101,01
89	,28	09	,07	29	,84	49	,59	69	,33	89	,05
690	,32	710	,11	730	,88	750	,63	770	,37	790	,09
91	,36	11	,15	31	,92	51	,67	71	,40	91	,12
92	,40	12	,18	32	,95	52	,70	72	,44	92	,16
93	,44	13	,22	33	98,99	53	,74	73	,48	93	,19
94	,48	14	,26	34	99,03	54	,78	74	,51	94	,23
95	,52	15	,30	35	,07	55	,82	75	,55	95	,26
96	,56	16	,34	36	,10	56	,85	76	,58	96	,30
97	,60	17	,38	37	,14	57	,89	77	,62	97	,33
98	,64	18	,42	38	,18	58	,93	78	,66	98	,37
699	,67	19	,46	39	,22	59	99,96	79	,69	799	,41
700	97,71	720	98,49	740	99,26	760	100,00	780	100,73	800	101,44

15. Gesättigte wässrige Lösungen.

Als Bodenkörper gilt die bei der Temperatur stabile Krystallform. In 100 Gewichtsteilen Wasser sind im Sättigungszustande gelöst Gewichtsteile wasserfreien Salzes:

Bei der Temp.:	0°	18°	100°	Bei der Temp.:	0°	18°	100°
KCl	28	34	57	$SrCl_2$	44	52	102
KJ	128	142	209	$CaCl_2$	50	71	155
$KClO_3$	3	6,9	56	$CaSO_4$	0,19	0,21	0,17
KNO_3	13	29	250	$MgCl_2$	52	56	—
K_2SO_4	8	10,5	26	$MgSO_4$	27	35	74
$K_2Cr_2O_7$	5	11	94	$ZnCl_2$	210	360	610
K_2CO_3	89	111	156	$ZnSO_4$	43	51	95
NH_4Cl	28	36	73	$CdSO_4$	75	76	61
NaCl	35,5	36,0	39,6	$CuSO_4$	18	23	75
$NaNO_3$	73	86	180	$NiSO_4$	29	39	—
$NaClO_3$	82	98	204	$AgNO_3$	122	220	900
Na_2CO_3	7	20	45	$Pb(NO_3)_2$	38	51	130
LiCl	64	79	130	AgCl	$0{,}0_3 07$	$0{,}0_3 15$	—
Li_2CO_3	1,5	1,3	0,8	H_3BO_3	2,0	3,7	34
$BaCl_2$	31	35	59	Oxalsäure	3,6	9	—
BaO_2H_2	1,3	3,2	91	Weinsäure	115	136	340
$BaSO_4$	$0{,}0_3 17$	$0{,}0_3 22$	—	Rohrzucker	179	201	490

16. Korrektion eines Thermometers auf das Gasthermometer.

Unter 100°: Korrektion des Luft- und der Quecksilber-Thermometer aus Jenaer Glas XVI u. 59 sowie aus verre dur auf die Wasserstoffskale; über 100°: Korrektion auf das Luftthermometer.

Die Zahlen korrigiren die Ablesungen an einem in sich richtigen Thermometer. Vgl. S. 145.

Ables.	Luft auf Wasserstoff	Auf Wasserstoff.			Ables.	Auf Luft.		Ables.	Auf Luft.
		XVI	59	v. dur		XVI	59		XVI
0°	±	±	±	±	100°	±	±	200°	—,04
5	—,004	—,03	—,01	—,03	105	+,01	—,00	205	—,07
10	—,007	—,06	—,02	—,05	110	+,03	—,00	210	—,11
15	—,009	—,08	—,03	—,07	115	+,04	—,01	215	—,16
20	—,010	—,09	—,04	—,08	120	+,05	—,02	220	—,21
25	—,010	—,10	—,04	—,10	125	+,06	—,03	225	—,26
30	—,010	—,11	—,04	—,10	130	+,07	—,04	230	—,33
35	—,010	—,12	—,04	—,11	135	+,08	—,06	235	—,39
40	—,010	—,12	—,03	—,11	140	+,09	—,08	240	—,46
45	—,009	—,12	—,03	—,11	145	+,10	—,10	245	—,55
50	—,009	—,12	—,03	—,10	150	+,10	—,13	250	—,63
55	—,007	—,11	—,02	—,10	155	+,10	—,16	255	—,73
60	—,007	—,10	—,02	—,09	160	+,10	—,19	260	—,83
65	—,006	—,09	—,01	—,08	165	+,09	—,23	265	—,93
70	—,005	—,08	—,01	—,07	170	+,08	—,28	270	—1,05
75	—,004	—,07	—,00	—,06	175	+,07	—,33	275	—1,17
80	—,005	—,06	—,00	—,05	180	+,06	—,39	280	—1,30
85	—,004	—,04	—,00	—,04	185	+,04	—,45	285	—1,44
90	—,002	—,03	—,00	—,03	190	+,02	—,52	290	—1,59
95	—,002	—,02	—,00	—,01	195	—,01	—,59	295	—1,74
100°	±	±	±	±	200°	—,04	—,67	300°	—1,91

Unterhalb 0° (extrapolirt).

Ables.	XVI	59	v. dur	Ables.	XVI	59	v. dur
0°	±	±	±	—20°	+,19	+,10	+,17
— 5	+,04	+,02	+,03	—25	+,25	+,14	+,23
—10	+,08	+,04	+,07	—30	+,32	+,18	+,30
—15	+,13	+,07	+,12	—35°	+,40	+,23	+,38
—20°	+,19	+,10	+,17				

17. Absorption von Gasen in Wasser

bei 1 Atm. Druck (grofsenteils nach Bunsen).
1 Liter Wasser enthält gesättigt:

	bei 0°	bei 20°		bei 0°	bei 20°
	gr	gr		gr	gr
Luft	0,032	0,022	Kohlensäure	3,5	1,8
Sauerstoff	0,059	0,041	Schwefelwasserstoff	6,6	4,4
Stickstoff	0,026	0,018	Schweflige Säure	228	113
Wassersoff	0,002	0,002	Ammoniak	800	500
Chlor	—	6,8			

18. Sättigungsdruck einiger Gase und Dämpfe

in Atmosphären oder mm Quecksilber (Hertz, Ramsay, Young u. Regnault)

und kritische Daten.

	CO_2	NH_3	SO_2	Äthyl-Äther	Schwef.-Kohlenst.	Chloroform	Methyl-Alkoh.	Äthyl-Alkoh.	Benzol	Wasser	Quecksilber
	Atm.	Atm.	Atm.	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
— 80°	1,0										
— 60	3,9										
— 40	10,2										
— 20	19,1	1,8	0,6	66	47		6,3	3,3	6	1,02	
0°	35,5	4,2	1,5	185	128		28	12,5	26	4,58	
+ 20	58	8,4	3,3	440	298	160	91	44,1	75	17,5	0,001
+ 40	(90)	15,3	6,2	910	618	369	250	133,6	182	54,9	0,01
60		26	10,9	1730	1160	755	600	351	389	148,9	0,03
80		41	18,1	3000	2030	1408	1240	812	753	355,4	0,09
100		61	28	4900	3320	2430	2400	1690	1342	760	0,28
120			42	7600	5150	3930	4300	3220	2240	1490	0,75
140			60	11100	7600	6000	7300	5670	3520	2720	1,8
160				15800		8700		9400	5280	4650	4,2
180				21800				14800	7620	7550	8,9
200								22200	10660	11700	17,6
220								32100	14530	17400	33,4
240								45500	19400		57
260									25400		97
280									32800		156
300											244
320											371
340											548
360											791
Siedepunkt	—78,2°	—35	—10	34,9	46,0	61,2	66	78,3	80	100	358°
Krit.:											
Temp.	32°	130	157	192	275	260		240	291	365°	
Druck	75 At.	114	80	37	76	55		64	52	196 At.	
Dichte	0,5		0,50	0,25				0,29	0,35	0,43	

19. Elasticitätsmodul E in kg-Gew./mm², Schallgeschwindigkeit u in m/sec, Tragfähigkeit p in kg-Gew./mm² von gezogenen Metallen.

Nur als Annäherungen zu benutzen.

	E	Dichte	u	p
Aluminium	6500	2,7	5000	
Blei......	1700	11,3	1300	2
Cadmium .	7000	8,6	2800	
Eisen	19000	7,8	5000	25 bis 60
Stahl.....	21000	7,8	5100	70
Glas	6500	2,5	5000	
Gold	8000	19,2	2100	25
Holzfaser .	500 bis 1200		3000 bis 4000	1,5 bis 5
Kupfer ...	12000	8,7	3700	40
Magnesium	4000	1,7	4800	
Messing ..	9000	8,3	3200	60
Neusilber .	12000	8,5	3700	
Nickel....	20000	8,8	4700	
Platin	17000	21,4	2800	30
Silber	7300	10,5	2700	29
Zink	9000	7,1	3600	13
Zinn	4500	7,3	2500	2

20. Zusammendrückbarkeit ζ durch 1 Atm. u. innerer Reibungskoefficient $[\eta]$ bei 18° in [C.G.S]-Einheiten

und Änderung dieser Gröfsen auf 1° Temperaturzunahme um 18°.

	ζ	$10^6\frac{d\zeta}{dt}$	$[\eta]$	$10^4\frac{d\eta}{dt}$
Äther.......	0,000186	+2	0,0026	—0,25
Alkohol.....	0,000110	+0,7	0,0130	—2,5
Amylalkohol.	0,000091	+0,6	0,05	—10
Benzol......	0,000090	+0,8	0,0066	—1,1
Methylalkoh.	0,000120	+0,9	0,0064	—0,9
Quecksilber .	0,0000039		0,0159	—0,5
Schw.-Kohlst.	0,000089	+0,7	0,0038	—0,25
Wasser	0,000046	—0,2	0,0106	—2,7

20a. Reibungskoefficient des Wassers bei der Temperatur t.

η in gr-Gew. sec/cm²; $[\eta]$ in cm^{-1} gr sec^{-1}. Vgl. **59**.

η_{20} nach Beobachtungen von Gartenmeister, Heydweiller, Noack, Pacher, Poiseuille, Slotte, Sprung, Thorpe u. Rodger; Temperaturgang auch nach Grotrian, O. E. Meyer, Wagner. Berechnet von Heydweiller.

t	$10^8\eta$	auf 1°	$10^5[\eta]$	auf 1°	t	$10^8\eta$	auf 1°	$10^5[\eta]$	auf 1°
0°	1832	—57	1797	—56	19°	1049	—26	1029	—25
5	1547	—43	1518	—42	20	1023	—24	1004	—24
10	1332	—34	1307	—33	21	999	—23	980	—23
15	1162	—31	1140	—30	22	976	—22	957	—21
16	1131	—28	1110	—28	23	954	—21	936	—21
17	1103	—28	1082	—27	24	933	—21	915	—20
18	1075	—26	1055	—26	25	912	—19	895	—18
19°	1049		1029		30°	818		803	

21. Tonhöhe und Schwingungszahl in 1 Sekunde.

(Für gleichschwebende Stimmung: $a_1 = 435$. Vgl. **57.**)

	C_{-2}	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
C......	16,17	32,33	64,66	129,3	258,7	517,3	1035	2069
Cis	17,13	34,25	68,51	137,0	274,0	548,1	1096	2192
D......	18,15	36,29	72,58	145,2	290,3	580,7	1161	2323
Dis	19,22	38,45	76,90	153,8	307,6	615,2	1230	2461
E......	20,37	40,74	81,47	162,9	325,9	651,8	1304	2607
F......	21,58	43,16	86,31	172,6	345,3	690,5	1381	2762
Fis	22,86	45,72	91,45	182,9	365,8	731,6	1463	2926
G......	24,22	48,44	96,89	193,8	387,5	775,1	1550	3100
Gis	25,66	51,32	102,65	205,3	410,6	821,2	1642	3285
A......	27,19	54,37	108,75	217,5	**435,0**	870,0	1740	3480
Ais	28,80	57,61	115,22	230,4	460,9	921,7	1843	3687
H......	30,52	61,03	122,07	244,1	488,3	976,5	1953	3906

22. Spektrallinien im Flammenspektrum.

Skale von Bunsen-Kirchhoff; Natriumlinie auf 50; Spaltbreite = 1 Sk.-T.

Obere Zahl = Mittellage, untere Zahl = Breite der Linie, wenn diese von 1 Sk.-T. abweicht. Römische Zahl = Helligkeit bei dauerndem Spektrum. *S* bedeutet ganz scharf begrenzt, *s* mäfsig scharf. Die übrigen Linien sind mehr oder weniger verwaschene Banden.

Die für die Analyse wichtigsten Linien sind fett gedruckt.

Das Spektrum erscheint (ungefähr): rot bis 48, gelb bis 52, grün bis 80, blau bis 120, violett von 120 an.

Sonne	A 18,5	a 24	B 29	C(*H*) 35	D(*Na*) 50,0	E 71,3	b 75	F(*H*) 90	f(*H*) 125	G 128	H 162
K	**17,5** II *S*	Schwaches Spektrum von 55 bis 120.									153,0 IV *S*
Li	**32,0** I *S*	45,2 IV *s*									
Ca	33,1 IV 2	36,7 IV	**41,7** I 1,5	46,8 III 2	49,0 III	52,8 IV	54,9 IV	**60,8** I 1,5	68,0 IV 2		**135,0** IV *S*
Sr	29,8 III	**32,1** II	**34,8** II	36,3 II	39,0 III	41,8 III	**45,8** I *S*				**105,0** III *S*
Ba	35,2 IV 2	41,5 III 3	45,6 III 1,5	52,1 IV	56,0 III 2	**60,8** II *s*	66,5 III 3	**71.4** III 3	**76,8** III 2	82,7 IV 4	**89,3** III 2
Tl	53,5 I *S*										

23. Lichtwellenlängen λ in Luft von 20° und 760 mm Quecksilberdruck, gemessen in $\mu = 0{,}001$ mm,

nach Beobachtungen von Rowland, Kayser u. Runge, Ames, Cornu, Hartley u. Adeney, Liveing u. Dewar, Mascart, Müller u. Kempf u. A., gemäfs den Messungen der *Cd*-Linien von A. Michelson (65 IV) reducirt auf $D_1 = 0{,}58960\,\mu$, meist Auszug aus den Zusammenstellungen von Dufet in Recueil de Données numériques, publ. par la Société Française de Physique; Optique T. I.

Die Buchstaben geben die gebräuchlichen Namen der Linien im Fraunhofer'schen, im ultraroten und im ultravioletten Sonnenspektrum, oder (kursiv) die chemischen Elemente, in deren Dämpfen sie auftreten.

Das sichtbare Spektrum reicht etwa von 0,77 bis 0,39 μ; zur geometrischen Orientirung können die Zeichnungen von G. Müller (Publ. 6 des Astrophys. Observ. zu Potsdam) dienen.

Bei der Temperatur t und dem Drucke p mm Hg gilt für eine bestimmte Farbe nahe $\lambda\left(1 + 0{,}00000039\,\frac{p}{1+\alpha t}\right) = \text{Const.}$ In der Atmosphäre wächst λ ungefähr auf $+1°$ um $0{,}95 \cdot 10^{-6}\,\lambda$ und auf -1 mm um $0{,}36 \cdot 10^{-6}\,\lambda$.

Y		,899		*Cd 3*	,53381		*Al*	,39616	*Zn*	,30358
X_4		,8805	E	*Fe, Ca*	,52704		*Al*	,39440	*Cd 14*	,29807
X_3		,866	E	*Fe*	,52696	K	*Ca*	,39337	*Cd 15*	,28808
X_2		,854		*Ag*	,52091		*Mg*	,38383	*Cd 16*	,28369
X_1		,849	b_1	*Mg*	,51837	L	*Fe*	,38259	*Zn*	,28008
Z		,822	b_2	*Mg*	,51727	L	*Fe*	,38205	*Zn*	,27708
	K	,7699	b_3	*Fe*	,51690	L	*Fe*	,38159	*Cd 17*	,27484
	K	,7665	b_4	*Mg, Fe*	,51674	M	*Fe*	,37349	*Zn*	,27125
A		,7628		*Cd 4*	,50859	M	*Fe*	,37200	*Zn*	,26842
A		,7621	(c)	*Fe*	,49576		*Cd 9*	,3611	*Al*	,25751
A		,7594	F	*H*	,48614	N	*Fe*	,35812	*Cd 18*	,25730
a		,7185		*Cd 5*	,47999		*Cd 10*	,3467	*Al*	,25680
B	*O*	,6870		*Cd 6*	,46782	O	*Fe*	,3441	*Al*	,23731
	Li	,67079	(d)	*Fe*	,4668		*Cd 11*	,3404	*Al*	,23671
C	*H*	,65629		*Sr*	,46074	P		,3360	*Cd 22*	,23293
	Cd 1	,64385		*Cd 7*	,44130		*Zn*	,33450	*Cd 23*	,23129
α	*O*	,62781	(e)	*Fe*	,43836		*Zn*	,3303	*Al*	,22691
	Hg	,61521		*Hg*	,43585	Q		,3287	*Cd 24*	,2265
	Li	,61036	(f)	*H*	,43405		*Zn*	,3282	*Cd 25*	,21946
D_1	*Na*	,58960	(G′)	*Fe*	,43258		*Cd 12*	,3261	*Cd 26*	,21444
D_2	*Na*	,58900	G	*Fe, Ca*	,43079		*Cd 12*	,3250	*Zn 27*	,2099
D_3	*He*	,58758	(g)	*Ca*	,42268	R	*Ca*	,3180	*Zn 28*	,2062
	Hg	,57904	(h)	*H*	,41018	r		,3145	*Zn 29*	,2025
	Hg	,57693		*Hg*	,40780	S	*Fe, Ni*	,3101	*Al 30*	,1990
	Ag	,54654		*Hg*	,4047		*Al*	,30928	*Al 31*	,1935
	Hg	,54608		*K, Fe*	,4046		*Al*	,30822	*Al 32*	,1862
	Cd 2	,53790		*Cd 8*	,3982		*Zn*	,3074	*Al 32*	,1854
	Tl	,53505	H	*H, Ca*	,3968	s	*Fe*	,30476		

24. Lichtbrechungsverhältnis einiger Körper bei 18° und Drehvermögen des Quarzes bei 1 mm Dicke.

Das B.-V. nimmt auf $+1^\circ$ ab: in mittlerer Temperatur für Schwefelkohlenstoff um 0,0008 für *D*, um 0,0009 für *H*; für Alkohol um 0,0004; für Wasser bei 5° um 0,00003, bei 10° um 0,00005, bei 15° um 0,00007, bei 20° um 0,00009, bei 25° um 0,00010.

Bei den zweiaxigen Krystallen gelten die Zahlen, wenn nicht anderes bemerkt ist, für den mittleren Strahl.

Wellenlänge in μ	A 0,760	B ,687	C(*H*) ,6563	D(*Na*) ,5893	E ,5270	F(*H*) ,4861	f(*H*) ,4341	G ,4308	H ,3968
Wasser	1,3293	,3309	,3317	,3335	,3358	,3377	,3410	,3412	,3441
Alkohol	1,3586	,3599	,3606	,3624	,3647	,3667	,3703	,3705	,3736
Schw.kohlenstoff	1,6103	,6166	,6198	,6293	,6421	,6541	,6771	,6786	,7016
Cassiaöl	1,586	,592	,596	,605	,619	,634	,663	,665	,701
Kronglas leicht	1,5099	,5118	,5127	,5153	,5186	,5214	,5264	,5267	,5312
Kronglas schwer	1,6097	,6117	,6126	,6152	,6185	,6213	,6262	,6265	,6308
Flintglas leicht	1,5986	,6020	,6038	,6085	,6145	,6200	,6302	,6308	,6404
Flintglas schwer	1,7351	,7406	,7434	,7515	,7623	,7723	,7910	,7922	,811
Kalkspat ord.	1,6500	,6530	,6545	,6585	,6635	,6679	,6755	,6762	,6833
Kalkspat extr.	1,4827	,4840	,4846	,4864	,4887	,4908	,4943	,4946	,4978
Quarz ord.	1,5391	,5409	,5418	,5442	,5471	,5496	,5539	,5543	,5581
Quarz extr.	1,5481	,5500	,5509	,5533	,5563	,5589	,5634	,5637	,5677
Gyps, mitt.	1,517	,519	,520	,523	,525	,528	,532	,532	
Arragonit, mitt.	1,672	,676	,678	,682	,686	,691	,698	,698	,705
Topas(sibir.)mitt.	1,608	,610	,611	,614	,617	,619	,624	,624	,627
Drehung in Quarz bei 18°	12,7°	15,7°	17,3°	21,71°	27,5°	32,7°	42,0°	42,6°	51,2°

Aceton	1,36	Glimmer	1,56 bis 1,60
Äther	1,36	Methylenjodid	1,74
Arsenbromür	1,78	Monobromnaphtalin	1,66
Benzol	1,503	Phosphor in CS_2	1,97
Beryll	1,57	Rüböl	1,47
Canadabalsam	1,54	Terpentinöl	1,48
Chloroform	1,45	Turmalin	1,64
Eis	1,31	KNO_3	1,50
Feldspat	1,52	$NaNO_3$, für *Na*, extr. 1,335; ord.	1,584
Flintglas, schwerstes	1,9	Zucker	1,56

Luft 0°, $1,0002879 + 0,0_5132/\lambda^2 + 0,0_732/\lambda^4$; Kayser und Runge, Wied. Ann. 50, 312. (λ in μ gemessen.)

Die drei Hauptbrechungsverhältnisse des Natronlichtes betragen für

Gyps	1,530	1,523	1,520
Ostindischen Glimmer	1,600	1,594	1,561
Arragonit	1,686	1,682	1,530
Baryt	1,648	1,637	1,636

24a. Brechungsverhältnisse *n* von Quarz, Flufsspat, Steinsalz und Sylvin bei 18°.

Im ultravioletten Spektrum nach Sarasin (Quarz; Flufsspat) und Martens (Steinsalz; Sylvin). Im Ultrarot nach Langley (Steinsalz), Paschen (Flufsspat), Rubens, teilweise mit Nichols u. Trowbridge (Quarz; Sylvin; Steinsalz von 6 μ an).

Der Temperaturkoefficient dn/dt beträgt nach Fizeau, Stefan, Pulfrich, Dufet u. a. für Natrium-Licht in Luft von konstanter Temperatur: Quarz ord. $-0{,}0_4062$, Flufsspat $-0{,}0_4142$, Steinsalz $-0{,}0_437$, Sylvin $-0{,}0_436$; in gleich temperirter Luft ist diesen Koefficienten $-0{,}0_4011$ zuzufügen.

Die Wellenlängen λ (in μ gemessen) sind einheitlich auf $D_1 = 0{,}58960$ zurückgeführt.

Die Zahlen unter d bedeuten $-100\,dn/d\lambda$, d. h. $-\Delta n$ in Einheiten der 4. Decimale auf $\Delta\lambda = +0{,}01\,\mu$.

Quarz (ord. Strahl)

	λ	n	d
Al	0,1857	1,6750	183
Al	0,1990	1,6507	132
Cd	0,2144	1,6304	97
Cd	0,2313	1,6140	69
Cd	0,2573	1,5962	49,7
Cd	0,2748	1,5875	30,6
Cd	0,3404	1,5674	16,5
H	0,3968	1,5581	11,3
f	0,4341	1,5539	8,21
F	0,4861	1,54963	5,24
D	0,5893	1,54422	3,57
C	0,6563	1,54183	2,53
K	0,7682	1,5390	1,56
	1,160	1,5329	1,25
	1,617	1,5272	1,59
	1,969	1,5216	1,68
	2,327	1,5156	2,09
	2,59	1,5101	2,48
	2,84	1,5039	2,74
	3,03	1,4987	2,87
	3,18	1,4944	2,95
	3,40	1,4879	3,48
	3,63	1,4799	3,47
	3,80	1,4740	3,81
	3,96	1,4679	4,54
	4,09	1,4620	4,64
	4,20	1,4569	

Flufsspat

	λ	n	d
Al	0,1857	1,5094	98,5
Al	0,1990	1,4963	76,0
Cd	0,2144	1,4866	55,6
Cd	0,2313	1,4752	40,0
Cd	0,2573	1,4648	29,7
Cd	0,2748	1,4596	18,0
Cd	0,3404	1,4478	10,0
H	0,3968	1,44214	7,10
f	0,4341	1,4395	4,71
F	0,4861	1,43705	3,05
D	0,5893	1,43390	2,03
C	0,6563	1,43254	1,47
K	0,7682	1,4309	0,736
2*Na*	1,179	1,4279	0,492
3*Na*	1,768	1,4250	0,509
4*Na*	2,357	1,4220	0,627
5*Na*	2,947	1,4183	0,76
6*Na*	3,536	1,4138	0,90
7*Na*	4,125	1,4085	1,05
8*Na*	4,714	1,4023	1,20
9*Na*	5,304	1,3952	1,37
10*Na*	5,893	1,3871	1,51
11*Na*	6,482	1,3782	1,73
12*Na*	7,072	1,3680	1,90
13*Na*	7,661	1,3568	2,11
14*Na*	8,250	1,3444	2,31
15*Na*	8,840	1,3308	2,49
16*Na*	9,429	1,3161	

Steinsalz

	λ	n	d
Al	0,1854	1,8933	717
Al	0,1990	1,7958	413
Cd	0,2144	1,7322	259
Cd	0,2313	1,6884	163
Cd	0,2573	1,6460	109
Cd	0,2748	1,6269	62,3
Cd	0,3404	1,5860	31,7
Al	0,3944	1,5689	20,7
f	0,4341	1,5607	14,6
F	0,4861	1,5531	8,72
D	0,5893	1,5441	5,52
C	0,6563	1,5404	3,57
K	0,7682	1,5364	1,53
2*Na*	1,179	1,5301	0,492
3*Na*	1,768	1,5272	0,305
4*Na*	2,357	1,5254	0,187
5*Na*	2,947	1,5243	0,272
6*Na*	3,536	1,5227	0,204
7*Na*	4,125	1,5215	0,238
8*Na*	4,714	1,5201	0,255
9*Na*	5,304	1,5186	0,440
	6,78	1,5121	0,444
	7,59	1,5085	0,568
	9,95	1,4951	0,756
	11,88	1,4805	0,856
	13,96	1,4627	1,13
	15,89	1,4410	1,28
	17,93	1,4148	1,56
	20,57	1,3735	1,92
	22,3	1,3403	

Sylvin

	λ	n	d
Al	0,1854	1,8270	755
Al	0,1990	1,7243	406
Cd	0,2144	1,6618	245
Cd	0,2313	1,6204	151
Cd	0,2573	1,5812	99,4
Cd	0,2748	1,5638	55,8
Cd	0,3404	1,5272	28,0
Al	0,3944	1,5121	17,9
f	0,4341	1,5050	13,3
F	0,4861	1,4981	7,85
D	0,5893	1,4900	4,78
C	0,6563	1,4868	2,77
K	0,7682	1,4837	1,86
	0,940	1,4805	0,683
	1,584	1 4761	0,248
	2,230	1,4745	0,186
	3,200	1,4727	0,129
	4,05	1,4716	0,145
	4,81	1,4705	0,200
	5,31	1,4695	0,203
	5,95	1,4682	0,26
	7,08	1,4653	(0,28)
	8,92	1,4600	(0,44)
	10,19	1,4544	(0,24)
	11,20	1,4516	(0,53)
	14,14	1,4362	0,50
	18,10	1,4162	(1,12)
	20,60	1,3882	1,00
	22,5	1,3692	

25. Absorptionsvermögen für Strahlen des ultraroten Spektrums.

1. Merritt; 2. Rubens u. Trowbridge; 3. Aschkinass; 4. Paschen; Rubens u. Aschkinass.

1. Kalkspat — Schichtdicke = 0,1 cm

λ	o	e
μ	%	%
1,02	0	0
1,45	0	0
2,07	1,0	0
2,30	17,3	0
2,44	25,7	0
2,53	17,3	1,0
2,60	11,2	0,5
2,65	15,7	0
2,74	21,0	0
2,83	12,4	0,5
2,90	6,6	1,0
2,95	16,2	2,0
3,04	37,4	5,0
3,30	90	12
3,47	86	11
3,62	61	17
3,80	84	16
3,98	100	9
4,35	48	1
4,52	76	3
4,66	68	15
4,83	45	17
4,95	42	13
5,25	55	29
5,50		73

Quarz — Schichtdicke = 0,1 cm

λ	o	e
μ	%	%
1	0	0
1,5	0	0
2	0	0
2,5	0	0
2,72	1,6	0
2,83	4,3	0
2,95	5,4	2,2
3,07	3,0	2,5
3,17	1,6	1,0
3,38	1,3	3,5
3,67	11,5	16
3,82	14,6	12
3,96	18,3	10
4,12	29	20
4,36	—	55
4,50	48	

2. Schichtd. = 1 cm

λ	Steinsalz	Sylvin	Flußspat
μ	%	%	%
7	0	—	1,0
8	0	—	15,6
9	0,5	0	45,7
10	0,5	1,2	83,6
11	0,5	1,0	99,0
12	0,7	0,5	100
13	2,4	0,5	
14	6,9	2,5	
15	15,4	4,6	
16	33,9	6,4	
17	48,4	7,8	
18	72,5	13,8	
19	90,4	24,2	
20,7	99,4	41,5	
23,7	100	84,5	

3. Wasser

Dicke	λ	%
1 m	0,77	91
1 cm	1,00	35
0,005 cm	1,25	71
	1,50	18
	1,71	5
	1,94	46
	2,2	14
	2,7	88
0,001 cm	1,8	2
	3,1	94
	3,8	19
	4,7	42
	5,3	27
	6,1	92
	7,1	56
	8,4	50

4. Absorptionsbanden: Kohlensäure

	Von λ	bis λ	Max. λ
Schwach	2,36	3,02	2,71
Stark	4,01	4,80	4,27
Stark*	13,5	16	14,7

* Breite variirt stark mit Schichtdicke.

Wasserdampf

	Von λ	bis λ	Max. λ
Schwach	1,14	1,73	1,46
Schwach	1,73	2,24	1,92
Stärker	2,24	3,27	2,66
Stark	4,8	6,25	
Maxima:	5,25	5,90	6,07
Stark	6,25	8,54	

stärkstes Max. bei 6,53
Absorpt-Gebiet v. 11 μ an: Max. bei 11,6 12,4 13,4 14,3 15,7 u. 17,5 μ.

25a. Reflexionsvermögen von Metallen

in Procenten, bei nahe senkrechtem Einfall.

λ	Ag	Pt	Ni	Stahl	Au	Cu	Spiegelmetalle R	S	Br	M	Hg an Glas
0,45	90,6	55,8	58,5	56,3	36,8	48,8	62,9	62,4	49,1	83,4	72,8
0,50	91,8	58,4	60,8	55,2	47,3	53,3	63,2	62,5	49,3	83,3	70,9
0,55	92,5	61,1	62,6	55,1	74,7	59,5	64,0	63,4	48,3	82,7	71,2
0,60	93,0	64,2	64,9	56,0	85,6	83,5	64,3	64,2	47,5	83,0	69,9
0,65	93,6	66,3	65,9	56,9	88,2	89,0	65,6	65,1	49,5	82,1	71,5
0,70	94,6	70,1	69,8	59,3	92,3	90,7	67,3	68,0	54,9	83,3	72,8
0,80	95,2		70,4	63,6	92,4	—					
0,90	95,8		73,1	64,7	95,2	—					
1,00	96,5		77,4	69,0	96,8	—	73,7				
1,15	97,0		80,4	72,3	97,3	—					
1,40	97,4		81,7	74,3	97,0	91,3					
1,65	97,7		83,9	78,4	97,0	93,0					
2,00	97,3		84,5	80,5	95,4	93,9	82,3				
2,50	97,0		88,0	86,6	94,3	95,0					
3,00	98,3		91,7	89,6	94,3	96,4	87,7				
4,0	100		93,6	91,8	98,0	97,6	91,9				
5,0	—		96,5	94,0	97,6	98,0	93,8				
6,0	99,8		96,7	96,0	98,2	100	91,5				
7,0	99,6		97,4	96,1	97,6	100	92,2				
8,0	99,0		98,7	97,8	98,7	99,1	93,1				
9,0	100		94,3	92,8	97,7	99,4	91,6				
10,0	—		95,6	96,6	97,8	100	92,6				
12,0	—		95,9	98,4	99,2	98,6	93,4				
15,0	—		100	97,2	—	—	95,5				
23,7	—		100	99,5	99,8	100	100				

Spiegelmetalle: R: Rosse, 68,2 Cu, 31,8 Sn; S: Schröder, 66 Cu, 22 Sn, 12 Zn; Br: Brandes u. Schünemann, 41 Cu, 26 Ni, 24 Sn, 8 Fe, 1 Sb; M: Mach, 2 Al, 1 Mg.

Bis λ = 0,70 Hagen und Rubens; dann bis 3,0 Rubens; weiterhin Trowbridge und Nichols (Ag); λ = 23,7 Rubens und Nichols.

26. Farben Newton'scher Ringe,

welche im reflektirten und durchgehenden weifsen Lichte für senkrecht auffallende Strahlen eine Luftschicht von der Dicke *d* zeigt.

d	Reflektirt	Durchgehend
mm 10⁶	**1. Ordnung.**	
0	Schwarz	Weifs
20	Eisengrau	Weifs
48	Lavendelgrau	Gelblich Weifs
79	Graublau	Bräunl. Weifs
109	Klareres Grau	Gelbbraun
117	Grünl. Weifs	Braun
129	Fast Weifs	Klares Rot
133	Gelblich Weifs	Karminrot
137	Blafs Strohgelb	Dunkel Rotbraun
140	Strohgelb	Dunkel Violett
153	Klares Gelb	Indigo
166	Lebhaft. Gelb	Blau
215	Braungelb	Graublau
252	Rötlich Orange	Bläulich Grün
268	Warmes Rot	Blafs Grün
275	Tieferes Rot	Gelblich Grün
	2. Ordnung.	
282	Purpur	Helleres Grün
287	Violett	Grünlich Gelb
294	Indigo	Goldgelb
232	Himmelblau	Orange
364	Grünlichblau	Bräunl. Orange
374	Grün	Hell Karminrot
413	Helleres Grün	Purpur
421	Gelblich Grün	Violett-Purpur
433	Grünlich Gelb	Violett
455	Reines Gelb	Indigo
474	Orange	Dunkel Blau
499	Lebhaft rötlich Orange	Grünlich Blau
550	Dunkel Violettrot	Grün
mm 10⁶	**3. Ordnung.**	
564	Hell bläulich Violett	Gelblich Grün
575	Indigo	Unrein Gelb
629	Blau (grünl.)	Fleischfarben
667	Meergrün	Braunrot
688	Glänzend Grün	Violett
713	Grünlich Gelb	Graublau
747	Fleischfarbe	Meergrün
767	Karminrot	Schön Grün
810	Matt Purpur	Matt Meergrün
826	Violett Grau	Gelblich Grün
	4. Ordnung.	
841	Graublau	Grünlich Gelb
855	Matt Meergrün	Gelbgrau
872	Bläulich Grün	Malv. Graurot
905	Schön Hellgrün	Karminrot
963	Hell Graugrün	Graurot
1003	Grau, fast Weifs	Graublau
1024	Fleischrot	Grün
	5. Ordnung.	
1169	Matt Blaugrün	Matt Fleischrot
1334	Matt Fleischrot	Matt Blaugrün

Zu Tab. 25. Die dort genannten Körper zeigen in einigen ultraroten Spektralbezirken metallische Reflexion, verbunden mit Undurchlässigkeit in sehr dünnen Schichten. Die Maxima liegen

für Quarz bei $\lambda = 8{,}5$, $9{,}0$ u. $20{,}7\,\mu$ (jenseit $50\,\mu$ ist Quarz wieder durchlässig);

für Flufsspat bei 24,0 u. 31,6; für Kalkspat bei 6,7, 11,4 und 29,4;

für Steinsalz bei 51,2; für Sylvin bei $61{,}1\,\mu$. Sylvin zeigt, wahrscheinlich von $MgCl_2$-Gehalt herrührend, auch bei 3,2 u. $7{,}1\,\mu$ Absorptionsstreifen.

27. Zur Reduktion einer Schwingungsdauer auf unendlich kleine Schwingungen.

Von der bei einem ganzen Schwingungsbogen α beobachteten Schwingungsdauer t eines Magnets oder Pendels ist abzuziehen kt (28).

α	k		α	k		α	k		α	k	
0°	0,00000	0	10°	0,00048	10	20°	0,00190	20	30°	0,00428	29
1	000	2	11	058	11	21	210	20	31	457	30
2	002	2	12	069	11	22	230	21	32	487	31
3	004	4	13	080	13	23	251	23	33	518	32
4	008	4	14	093	14	24	274	23	34	550	33
5	012	5	15	107	15	25	297	25	35	583	33
6	017	6	16	122	16	26	322	25	36	616	35
7	023	7	17	138	16	27	347	26	37	651	35
8	030	9	18	154	18	28	373	27	38	686	37
9	039	9	19	172	18	29	400	28	39	723	38
10	0,00048		20	0,00190		30	0,00428		40	0,00761	

28. Reduktion des an einer Skale beobachteten Ausschlages e, wenn der Abstand vom Spiegel A Skalenteile beträgt (25).

Durch Subtraktion der Zahlen wird der beobachtete Skalenausschlag e dem Ablenkungswinkel proportional. Die Korrektionen auf die Tangente betragen $^3/_4$, auf den Sinus $^9/_8$ der Zahlen.

A	$e=50$	100	150	200	250	300	350	400	450	500
1000	0,04	0,33	1,11	2,60	5,02	8,54	13,33	19,5	27,1	36,3
1200	0,03	0,23	0,77	1,82	3,53	6,03	9,45	13,9	19,5	26,2
1400	0,02	0,17	0,57	1,34	2,61	4,47	7,03	10,4	14,6	19,7
1600	0,02	0,13	0,44	1,03	2,00	3,44	5,43	8,0	11,3	15,4
1800	0,01	0,10	0,35	0,82	1,59	2,73	4,30	6,4	9,0	12,3
2000	0,01	0,08	0,28	0,66	1,29	2,22	3,51	5,21	7,37	10,05
2200	0,01	0,07	0,23	0,55	1,07	1,83	2,91	4,32	6,12	8,35
2400	0,01	0,06	0,19	0,46	0,90	1,54	2,45	3,64	5,16	7,05
2600	0,01	0,05	0,16	0,39	0,77	1,32	2,09	3,11	4,42	6,03
2800	0,01	0,04	0,14	0,34	0,66	1,14	1,81	2,69	3,82	5,21
3000	0,00	0,04	0,12	0,29	0,58	0,99	1,58	2,35	3,33	4,55
3200	0,00	0,03	0,11	0,26	0,51	0,87	1,38	2,07	2,93	4,01
3400	0,00	0,03	0,10	0,23	0,45	0,77	1,23	1,83	2,60	3,56
3600	0,00	0,03	0,09	0,21	0,40	0,69	1,10	1,64	2,32	3,18
3800	0,00	0,02	0,08	0,18	0,36	0,62	0,98	1,47	2,09	2,86
4000	0,00	0,02	0,07	0,17	0,32	0,56	0,89	1,33	1,88	2,58

29. Zur Rechnung an gedämpften Schwingungen. (Vgl. 27 u. 108.)

T und α_1 = Schwingungsdauer u. Ausschlag bei dem Dämpfungsverhältnis k,
τ und α = entsprechende Schwingungsdauer u. Ausschlag ohne Dämpfung.

$$T/\tau = \sqrt{1+\Lambda^2/\pi^2}; \qquad \alpha/\alpha_1 = k^{1/\pi \cdot \text{arc tg}\, \pi/\Lambda}.$$

$\lambda =$ log k	$\Lambda =$ lg nat k	k	$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}$	$k^{\frac{1}{\pi}\text{arc tg}\frac{\pi}{\Lambda}}$	$\lambda =$ log k	$\Lambda =$ lg nat k	k	$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}$	$k^{\frac{1}{\pi}\text{arc tg}\frac{\pi}{\Lambda}}$
0.00	0.0000	1,000	1,0000	1,0000	0.44	1.0131	2,754	1,0507	1,5008
.01	.0230	1,023	,0000	,0115	.46	.0592	2,884	,0553	,5219
.02	.0461	1,047	,0001	,0231	.48	.1052	3,020	,0601	,5428
.03	.0691	1,072	,0002	,0347	.50	.1513	3,162	,0650	,5635
.04	.0921	1,096	,0004	,0463	.52	.1973	3,311	,0702	,5839
.05	.1151	1,122	,0007	,0578	.54	.2434	3,467	,0755	,6041
.06	.1382	1,148	,0010	,0694	.56	.2894	3,631	,0810	,6240
.07	.1612	1,175	,0013	,0811	.58	.3355	3,802	,0866	,6437
.08	.1842	1,202	,0017	,0927	.60	.3816	3,981	,0924	,6630
.09	.2072	1,230	,0022	,1044	.62	.4276	4,169	,0984	,6820
.10	.2303	1,259	,0027	,1160	.64	.4737	4,365	,1046	,7008
.11	.2533	1,288	,0032	,1277	.66	.5197	4,571	,1109	,7193
.12	.2763	1,318	,0039	,1393	.68	.5658	4,786	,1173	,7375
.13	.2993	1,349	,0045	,1510	.70	.6118	5,012	,1239	,7554
.14	.3224	1,380	,0052	,1626	.72	.6579	5,248	,1307	,7730
.15	.3454	1,413	,0060	,1743	.74	.7039	5,495	,1376	,7904
.16	.3684	1,445	,0069	,1859	.76	.7500	5,754	,1447	,8074
.17	.3914	1,479	,0077	,1975	.78	.7960	6,026	,1519	,8241
.18	.4145	1,514	,0087	,2091	.80	.8421	6,310	,1592	,8406
.19	.4375	1,549	,0097	,2208	.82	.8881	6,607	,1667	,8567
.20	.4605	1,585	,0107	,2324	.84	.9342	6,918	,1743	,8726
.21	.4835	1,622	,0118	,2440	.86	1.9802	7,244	,1821	,8882
.22	.5066	1,660	,0130	,2555	.88	2.0263	7,586	,1900	,9035
.23	.5296	1,698	,0142	,2670	.90	.0723	7,943	,1980	,9185
.24	.5526	1,738	,0155	,2785	.92	.1184	8,318	,2061	,9332
.25	.5756	1,778	,0167	,2900	.94	.1644	8,710	,2144	,9476
.26	.5987	1,820	,0180	,3014	.96	.2105	9,120	,2228	,9617
.27	.6217	1,862	,0194	,3128	.98	.2565	9,550	,2312	,9756
.28	.6447	1,905	,0208	,3242	1.00	2.3026	10,00	1,2396	1,9892
.29	.6677	1,950	,0223	,3356					
.30	.6908	1,995	,0239	,3469					
.31	.7138	2,042	,0255	,3582					
.32	.7368	2,089	,0271	,3694					
.33	.7599	2,138	,0288	,3806					
.34	.7829	2,188	,0306	,3918					
.35	.8059	2,239	,0324	,4029					
.36	.8289	2,291	,0342	,4140					
.37	.8520	2,344	,0361	,4250					
.38	.8750	2,399	,0381	,4360					
.39	.8980	2,455	,0401	,4469					
.40	.9210	2,512	,0421	,4578					
.41	.9441	2,570	,0442	,4686					
.42	.9671	2,630	,0463	,4794					
.43	0.9901	2,692	,0485	,4901					
.44	1.0131	2,754	1,0507	1,5008					

30. Specifischer elektrischer Widerstand σ einiger Metalle bei 18°.

σ ist der Widerstand eines cm-Würfels, $10000\sigma = \sigma'$ der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt in Ohm.

Die Zahlen gelten im allgemeinen für weiche reine Metalle. Härte und besonders Verunreinigungen erhöhen den Widerstand.

Der Temp.-Koeff. α bedeutet die relative Zunahme von σ auf +1°.

	$10^4\sigma$	$10^3\alpha$		$10^4\sigma$	$10^3\alpha$
Silber	0,016	+3,7	Antimon	0,45	+4,1
Kupfer	0,017	4,0	Wismut	1,2	4,2
Gold	0,023	3,5	Quecksilber	0,958	+0,92
Aluminium	0,032	3,6	Konstantan	0,49	—,03 bis +,05
Zink	0,061	3,7	Manganin	0,42	bis +0,03
Cadmium	0,076	4,0	Neusilber	0,16	+0,6
Palladium	0,107	3,5		bis 0,40	bis 0,23
Platin, rein	0,108	3,6	Nickelin	0,42	0,23
„ käuflich	0,14	2 bis 3	Patentnickel	0,33	0,2
Nickel	0,08—,11	bis 6	20% Pt-Silber	0,20	0,33
Eisen	0,09—,15	bis 6	10% Rh-Platin	0,20	1,7
Stahl	0,15—0,5		Messing	0,07—,09	
Blei	0,21	4,0	Gaskohle etwa	50	—,02 bis —,8

31. Elektrisches Leitvermögen wässriger Lösungen bei 18°.

Die Procente bedeuten Gewichtsteile des gelösten Körpers in 100 Gewichtsteilen der Lösung. Die Salze sind wasserfrei gerechnet.

$\varkappa$ ist das Leitvermögen bei 18° in $Ohm^{-1}\,cm^{-1}$.

$\Delta\varkappa$ bedeutet die Zunahme von $\varkappa$ auf +1° in Procenten von $\varkappa_{18}$.

Lösung	KCl		NH_4Cl		$NaCl$		K_2SO_4		$MgSO_4$		$ZnSO_4$		$CdSO_4$	
	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$
5%	69	2,0	92	2,0	67	2,2	46	2,2	26	2,3	19	2,2	15	2,1
10	136	1,9	178	1,9	121	2,1	86	2,0	41	2,4	32	2,2	25	2,1
15	202	1,8	259	1,7	164	2,1			48	2,5	42	2,3	33	2,1
20	268	1,7	337	1,6	196	2,2			48	2,7	47	2,4	39	2,1
25			403	1,5	214	2,3			42	2,9	48	2,6	43	2,2
30											44	2,7	44	2,4
35													42	2,5
Max. =									49,2		48,1		44	
bei									17,4%		23,5%		28%	

Lösung	$CuSO_4$ $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	KJ $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	$AgNO_3$ $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	KOH $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	HCl $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	HNO_3 $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$	H_2SO_4 $10^3\varkappa$	$\Delta\varkappa$
5%	19	2,2	34	2,1	26	2,2	172	1,9	395	1,58	258	1,50	209	1,21
10	32	2,2	68	2,0	48	2,2	315	1,9	630	1,56	461	1,45	392	1,28
15	42	2,3	105	1,9	68	2,2	425	1,9	745	1,55	613	1,40	543	1,36
20			146	1,8	87	2,1	499	2,0	762	1,54	711	1,38	653	1,45
25			188	1,8	106	2,1	540	2,1	723	1,53	770	1,38	717	1,54
30			230	1,7	124	2,1	542	2,3	662	1,52	785	1,39	740	1,62
35			273	1,6	141	2,1	509	2,4	591	1,51	769	1,43	724	1,70
40			317	1,5	157	2,1	450	2,7	515	—	733	1,49	680	1,78
50			392	1,4	186	2,1					631	1,6	541	1,93
60					210	2,1					513	1,6	373	2,13
70											396	1,5	216	2,56
80											267	1,3	111	3,49
Max. =							544		767		785		740	
bei							28%		18,3%		29,7%		30,0%	

32. Elektrochemische Äquivalente.

Der Strom 1 A = 0,1 [C.G.S] = 10 [Mm-Mg-S] zersetzt oder scheidet aus

	mg Silber	mg Kupfer	mg-Äquivalente	mg Wasser	ccm Knallgas v. 0° u. 760 mm
in 1 sec	1,118	0,3294	0,01036	0,0933	0,1740
in 1 min	67,08	19,76	0,6215	5,60	10,44
in 1 h	4025	1186	37,29	335,9	626

33. Äquivalentleitvermögen $\Lambda = \varkappa/\eta$ wässriger Lösungen bei 18° (F. K.).

η in gr-Äqu./ccm. Vgl. **96** II.
Klein Gedrucktes ist unsicher.

$1000\,\eta$	KCl	NaCl	LiCl	KNO_3	$\frac{1}{2}\{MgSO_4\}$	HCl	$\frac{1}{2}\{H_2SO_4\}$
0	130,1	109,0	98,8	126,5	117	383	388
0,0001	129,1	108,1	98,1	125,5	111		
0,0002	128,8	107,8	97,8	125,2	109		
0,0005	128,1	107,2	97,2	124,4	105		368
0,001	127,3	106,5	96,5	123,6	100	377	361
0,002	126,3	105,6	95,6	122,6	94	376	351
0,005	124,4	103,8	93,9	120,5	85	373	330
0,01	122,4	102,0	92,1	118,2	77	370	308
0,02	120,0	99,6	89,9	115,2	68	367	286
0,05	115,8	95,7	86,1	109,9	57	360	253
0,1	112,0	92,0	82,4	104,8	50	351	225
0,2	108,0	87,7	77,9	98,7	44	342	214
0,5	102,4	80,9	70,7	89,2	35	327	205
1	98,3	74,3	63,4	80,5	29	301	198

34. Jonen-Beweglichkeiten.

Grenzwerte in sehr verdünnter Lösung bei 18°.

Vgl. S. 417.

Kationen		Anionen	
K	64,7	Cl	65,4
Na	43,6	Br	66
Li	33,4	J	66
NH_4	64	NO_3	61,8
Ag	56	ClO_3	56
½Ba	57	ClO_4	64
½Sr	54	JO_3	33,9
½Ca	53	JO_4	48
½Mg	47	CHO_2	46
½Zn	47	$C_2H_3O_2$	34
½Cu	48	½SO_4	70
H	318	OH	174

35. Schlagweite s in cm und Spannung P in el.-stat. [C.G.S] zwischen Kugeln vom Halbmesser r cm

in Luft von 18° u. 745 mm Hg, meist nach Heydweiller und Paschen. Zusammenstellung von Heydweiller, Wied. Ann. 48, 235. 1893.

Auf je —3° oder +8 mm Druck wachsen die Zahlen um 1 Procent.

1 el.-stat. [C.G.S] = 300 V.

s	r = 0,25	0,5	1,0	2,5 cm
cm				
0,1	P = 16,1	16,0	15,7	
0,2	27,9	27,9	27,0	
0,3	37,8	37,9	37,9	
0,4	46	48	48	
0,5	52	58	58	61
0,6	57	66	68	72
0,7	61	73	77	82
0,8	63	80	87	91
0,9	65	85	96	100
1,0	67	90	104	109
1,1	69		111	119
1,2	70		118	128
1,3	72		124	137
1,4	73		129	146
1,5	74		134	154
1,6			138	162

36a. Magnetisirungs-Koefficienten $\varkappa \cdot 10^6$ in C.G.S.,

bei 18°, bezogen auf Vakuum = 0.

Wismut	—14
Gold	—2,8
Quecksilber	—2
Silber	—1,7
Kupfer	—1,0
Zink	—0,8
Wasser	—0,755
Luft, 1 Atm.	+0,027
Sauerstoff, 1 Atm.	+0,12
Platin	+25
Palladium	+55

36. Dielektricitätskonstante

bei 18° (vgl. 133),

u. a. nach Arons, Boltzmann, Cohn, Curie, Drude, Franke, Heerwagen, Nernst, Tereschin, Thwing, Turner.

Vgl. Drude, ZS. f. physik. Ch. 23, 298 u. 308. 1897; Turner, ib. 35. 410. 1900.

—ΔD bedeutet die Abnahme auf +1° in Procenten.

	D	$-\Delta D$
Aceton	21	0,6
Äthyläther	4,35	0,46
Äthylalkohol	25	
Äthylenchlorid	10,8	0,5
Ameisensäure	60	
Anilin	7,2	0,35
Benzol	2,27	0,07
Bromoform	4,6	
Chloroform	5,2	
Methylalkohol	33	
Nitrobenzol	36	0,5
o-Nitrotoluol	27,8	0,55
Petroleum	2,2	
Ricinusöl	4,7	
Schwef.-Kohlenst.	2,5	
Terpentinöl	2,2	
Toluol	2,3	
Wasser	81	0,45
Xylol, Ortho-	2,6	
„ Meta-	2,37	0,05
„ Para-	2,2	
Glas, gewöhnl.	4 bis 7	
Optische Gläser	bis 10	
Glimmer	4 bis 8	
Guttapercha	2,5	
Hartkautschuk	2 bis 3	
Kautschuk	2,2bis2,7	
Kalkspat	‖8; ⊥8,5	
Paraffin	1,7bis2,3	
Porzellan	4,4	
Quarz	4,5	
Schellack	2,8bis3,7	
Schwefel	2 bis 4	
Luft, bezogen auf d. Vakuum	1,0006	

37. Magnetisirbarkeit einiger Eisensorten

nach Beobachtungen in der P.-T. Reichsanstalt von Gumlich u. E. Schmidt.

Magnetische Permeabilität μ, bez. magn. Induktion $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ des Materials für die innere magnetisirende Feldstärke $\mathfrak{H}$ Gaufs.

$\mathfrak{B}$ ist die Dichte der von $\mathfrak{H}$ durch das Material getriebenen Kraftlinien.

Die Magnetisirung ist $\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi}$, der Magn.-koefficient $\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}} = \frac{\mu - 1}{4\pi}$.

$\mathfrak{H}_0$ = Koercitivkraft, d. h. Feldstärke, die zur Beseitigung einer starken Magnetisirung nötig ist.

$\mathfrak{B}_0$ = Remanenz der Induktion, d. h. Dichte der nach Aufhören der magnetisirenden Kraft im geschlossenen Eisen bleibenden Kraftlinien, also $\mathfrak{B}_0/4\pi$ = remanentes magn. Moment der Volumeinheit.

Q_e = Arbeit („Energievergeudung") in Erg/cm³ bei einem magnetisirenden Kreisprocefs zwischen den Grenzen $\pm \mathfrak{H}_e$, denen die Induktionen $\pm \mathfrak{B}_e$ entsprechen.

Alle Gröfsen in [C.G.S]-Einheiten. Vgl. **115** und Anh. 21 bis 22b und 26a.

$\mathfrak{H}$	Magnetisch weiches Eisen				Magnetisch hartes Eisen		
	Schwed. Schmiedeeisen	Stahlgufs 5mal geglüht	Stahlgufs geglüht	Stahlgufs ungeglüht	Gufseisen	Wolfram-Magnetstahl	Magnetstahl gehärtet
0,5	μ = 2500	1450	—	490			
0,75	3120	2390	—	710			
1,0	3710	3500	820	970			
1,25	3680	3680	1220	1270			
1,5	3560	3570	1840	1600			
2	3300	3280	2500	2060			
2,5	3020	2990	2630	2080			
3	2760	2750	2520	2010			
4	2350	2380	2260	1850			
5	2060	2100	2020	1700	81		
7,5	1600	1630	1580	1360	110		
10	1300	1320	1290	1140	141	80	
15	942	953	945	850	181	94	68
20	736	747	740	680	182	119	78
25	603	615	610	567	173	159	91
30	513	524	520	485	163	203	108
40	396	405	403	380	145	233	155
50	323	331	330	315	129	222	194
60	274	280	280	270	117	204	193
80	210	216	216	210	99	170	164
100	172	177	177	173	85	144	138
150	120	123	123	122	65	105	100
50	$\mathfrak{B}$ = 16140	16540	16500	15740	6450	11100	9700
60	16440	16790	16790	16190	7000	12220	11570
80	16800	17270	17270	16800	7880	13600	13090
100	17200	17700	17700	17300	8500	14400	13800
150	17950	18490	18500	18230	9800	15750	15000
$\mathfrak{H}_e$ =	200	151	165	156	155	505	234
$\mathfrak{B}_e$ =	18650	18500	18660	18320	9900	18720	16220
Q_e =	6700	11700	13300	20400	34300	116000	211000
$\mathfrak{H}_0$ =	0,8	0,97	1,63	2,08	11,9	27,5	52,6
$\mathfrak{B}_0$ =	4000	7100	8500	9000	4230	9880	11700

Erdmagnetismus im mittleren Europa für 1902,0.

Nach einer neuen Aufstellung der Deutschen Seewarte.

Mittlere jährliche Änderung:
Horizontal-Intensität +0,00016 bis 0,00025 [C.G.S];
Deklination im Mittel für das Gebiet —0,09°; Inklination —0,03°.

38. Horizontal-Intensität in [C.G.S]-Einheiten oder Gaufs.

Nördl. Breite	Länge östlich Greenwich 2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°
45°	0,214	0,215	0,216	0,218	0,219	0,221	0,222	0,224	0,225	0,226	0,228
46	,209	,211	,212	,214	,215	,216	,218	,219	,220	,221	,222
47	,205	,207	,208	,209	,210	,212	,213	,214	,215	,216	,217
48	,201	,202	,204	,205	,206	,207	,208	,209	,210	,212	,213
49	,196	,198	,199	,200	,201	,202	,204	,205	,206	,207	,208
50	,192	,194	,195	,196	,197	,198	,200	,201	,202	,203	,204
51	,188	,190	,191	,192	,193	,194	,195	,196	,197	,198	,200
52	,184	,185	,187	,188	,189	,190	,191	,192	,193	,194	,195
53	,180	,181	,182	,183	,184	,186	,187	,188	,189	,190	,191
54	,176	,177	,178	,179	,180	,181	,182	,183	,184	,185	,186
55	,172	,173	,175	,176	,177	,178	,179	,179	,180	,181	,182

39. Westliche Deklination.

N. Br.	Länge östlich Greenwich 0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
45°	15°,2	14,7	14,3	13,8	13,4	13,0	12,5	12,1	11,7	11,2	10,8	10,4	10,0
50	16,0	15,6	15,1	14,6	14,1	13,6	13,1	12,6	12,1	11,6	11,1	10,7	10,2
55	17,0	16,5	15,9	15,4	14,8	14,3	13,8	13,2	12,6	12,0	11,4	10,8	10,3
	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°
45°	9°,6	9,2	8,8	8,4	8,0	7,6	7,2	6,8	6,4	5,9	5,5	5,0	4,5
50	9,8	9,3	8,8	8,3	7,8	7,3	6,8	6,4	5,8	5,3	4,8	4,3	3,8
55	9,7	9,2	8,6	8,0	7,4	6,8	6,2	5,8	5,2	4,7	4,1	3,6	3,1

40. Inklination.

Nördl. Breite	Länge östlich Greenwich 5°	10	15	20
45°	61,6°	61,0°	60,5°	59,8°
46	2,4	1,8	1,2	60,7
47	3,1	2,7	2,1	1,6
48	3,9	3,5	3,0	2,5
49	4,7	4,2	3,8	3,3
50	5,5	4,9	4,5	4,1
51	6,3	5,7	5,2	4,8
52	7,0	6,5	6,0	5,6
53	7,6	7,2	6,8	6,4
54	8,3	7,8	7,5	7,2
55	8,9	8,5	8,1	7,8

41. Einheiten des absoluten Maſssystems.

Grundgröſsen: Länge l, Masse m, Zeit t. Die übrigen Gröſsen drücken sich hierdurch in der Form aus:

$$l^{\lambda} \cdot m^{\mu} \cdot t^{\tau}.$$

λ, μ, τ sind die Dimensionen der Gröſsenart bezüglich Länge, Masse u. Zeit.

Zeiteinheit = 1 sec.

Zusammengehörige Einheiten für Länge und Masse sind:

dm, kg; cm, gr; mm, mg.

Die Zahlen der letzten Spalte geben an, in welchem Verhältnis N eine Einheit wächst, wenn man von mm, mg zu cm, gr oder von cm, gr zu dm, kg übergeht.

Angaben im mm, mg-System sind also durch N zu dividiren, um sie auf cm, gr zu reduciren.

Die vorletzte Spalte enthält Namen gebräuchlicher Einheiten und gibt an, wie viele von diesen auf die [C.G.S]-Einheit gehen.

Das Gröſsenverhältnis: $\frac{\text{elektromagn. Einh.}}{\text{elektrostat. Einh.}}$ ist =

v für El.-Menge od. Strom,
$1/v$ „ elektr. Potential,
v^2 „ elektr. Kapacität,
$1/v^2$ „ elektr. Widerstand,
wo im (C.G.S)-System $v = 300 \cdot 10^8$.

	λ	μ	τ	1 [C.G.S]-Einh. ist gleich	N
Winkel	0	0	0		1
Länge	1	0	0	1 Centim.	10
Lin. Krümmung	−1	0	0		$\frac{1}{10}$
Fläche	2	0	0		10^2
Volumen	3	0	0		10^3
Masse	0	1	0	1 Gramm	10^3
Dichtigkeit	−3	1	0		1
Zeit, Schwingdauer	0	0	1	1 Sekunde	1
Geschwindigkeit	1	0	−1		10
Wink.-Geschwind.	0	0	−1		1
Beschleunigung	1	0	−2		10
Winkelbeschleunig.	0	0	−2		1
Kraft	1	1	−2	1 Dyne	10^4
Drehmoment, Direktionskraft	2	1	−2		10^5
Druck	−1	1	−2		10^2
Elasticitätsmodul	−1	1	−2		10^2
Kapillarkonstante	0	1	−2		10^3
Inn. Reibungskoeff.	−1	1	−1		10^2
Trägheitsmoment	2	1	0		10^5
Arbeit, Energie, Leb. Kraft, Wärmemenge	2	1	−2	1 Erg	10^5
Leistung	2	1	−3	10^{-7} Watt	10^5
Schwingungszahl, Tonhöhe	0	0	−1		1
Lichtbrech.-Verh.	0	0	0		1
Lichtdreh.-Konst.	−1	0	0		$\frac{1}{10}$
Elektrostat. System:					
Elektr.-Menge	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{3} 10^{-9}$ Coul.	10^3
Potential	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	300 V	10^2
Kapacität	1	0	0	$\frac{1}{9} 10^{-11}$ Far.	10
Dielektr.-Konst.	0	0	0		1
Elektr. Strom	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	$\frac{1}{3} 10^{-9}$ A	10^3
Widerstand	−1	0	1	$9 \cdot 10^{11}$ Θ	$\frac{1}{10}$
Elektromagn. System:					
Magnetpol, Induktionsfluſs	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1 Maxwell	10^3
Magn. Potential	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1		10^2
Magn. Moment	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1		10^4
Magn. Feldstärke, Magn. Induktion, Spec. Magn. (Vol.)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1 Gauſs	10
Magnetisir.-Koeff., Mag. Permeabilität	0	0	0		1
Elektr. Strom	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	10 A	10^2
Stromdichte	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1		1
Elektr.-Menge	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	10 Coul.	10^2
Elm. Kraft, Potential	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	10^{-8} V	10^3
Kapacität	−1	0	2	10^9 Farad	$\frac{1}{10}$
Widerstand	1	0	−1	10^{-9} Θ	10
Spec. Widerstand	2	0	−1		10^2
Stromleistung	2	1	−3	10^{-7} Watt	10^5
El.-dyn. Potential, Selbstind. Koeff.	1	0	0	10^{-9} Quadr. / Henry	10

42. Atomgewichte (O = 16,00).

A	40	F	19,0	Pb	206,9
Ag	107,93	Fe	56,0	Pd	106
Al	27,1	H	1,01	Pt	194,8
As	75	He	4	Rb	85,4
Au	197,2	Hg	200,3	Rh	103
B	11,0	J	126,85	S	32,06
Ba	137,4	Ir	193	Sb	120
Bi	208,5	K	39,15	Se	79,1
Br	79,96	Li	7,03	Si	28,4
C	12,00	Mg	24,36	Sn	118,5
Ca	40,0	Mn	55,0	Sr	87,6
Cd	112,0	N	14,04	Te	127
Cl	35,45	Na	23,05	Tl	204,1
Co	59	Ni	58,7	U	239,5
Cr	52,1	O	16,00	W	184
Cs	133	Os	191	Zn	65,4
Cu	63,6	P	31,0	Zr	90,6

43. Schwere g und Länge des Sekundenpendels l unter der geogr. Br. φ (35)

$g_{45} = 980{,}62$ cm/sec².

φ	g	$\frac{g}{g_{45}}$	l
0	cm/sec²		cm
0	978,1	0,9974	99,10
10	978,2	0,9976	99,12
20	978,7	0,9980	99,15
30	979,3	0,9987	99,23
40	980,2	0,9995	99,31
50	981,1	1,0005	99,40
60	981,9	1,0013	99,49
70	982,6	1,0020	99,56
80	983,0	1,0024	99,60
90	983,2	1,0026	99,62

44. Geographische Lage und Höhe einiger Orte.

Die östl. geogr. Länge ab Ferro ist um 17°,66 gröfser.

	Östl. Greenw.	Nördl. Breite	Über Meer		Östl. Greenw.	Nördl. Breite	Über Meer
	0	0	m		0	0	m
Aachen[1]	6,1	50,78	180	Jena	11,6	50,94	160
Amsterdam	4,9	52,37		Innsbruck	11,4	47,27	570
Basel	7,6	47,56	260	Karlsruhe	8,4	49,01	120
Berlin	13,4	52,50	40	Kiel	10,2	54,34	
Bern	7,4	46,95	550	Köln	7,0	50,94	40
Bonn	7,1	50,73	50	Königsberg	20,5	54,71	
Braunschweig	10,5	52,27	100	Kopenhagen	12,6	55,69	
Bremen	8,8	53,08		Leipzig	12,4	51,34	100
Breslau	17,0	51,11	130	Madrid	— 3,7	40,41	660
Brüssel	4,4	50,85	90	Mailand	9,2	45,47	130
Cassel	9,5	51,32	160	Marburg[2]	8,8	50,81	210
Danzig	18,7	54,35		München	11,6	48,15	530
Darmstadt	8,7	49,87	140	Münster	7,6	51,97	60
Dorpat	26,7	58,38	50	Paris	2,3	48,83	60
Dresden	13,7	51,04	100	Pest	19,1	47,50	70
Erlangen	11,0	49,60	320	Petersburg	30,3	59,94	
Frankfurt a. M.	8,7	50,11	90	Prag	14,4	50,09	200
Freiburg i. B.	7,8	48,00	280	Rom	12,4	41,90	30
Giefsen	8,6	50,59	140	Rostock	12,1	54,09	
Göttingen	9,9	51,53	130	Stockholm	18,1	59,34	
Graz	15,4	47,08	360	Strafsburg	7,8	48,58	150
Greenwich	0,0	51,48		Stuttgart	9,2	48,78	270
Greifswald	13,4	54,10		Tübingen[3]	9,1	48,52	350
Halle	12,0	51,49	100	Washington	—77,0	38,89	
Hamburg	10,0	53,55		Wien	16,4	48,23	180
Hannover	9,7	52,38	70	Würzburg	9,9	49,79	170
Heidelberg	8,7	49,41	100	Zürich[4]	8,6	47,38	460

1) 160 bis 200 m. 2) 180 bis 240 m. 3) 320 bis 380 m. 4) 420 bis 500 m.

45. Deklination der Sonne, Zeitgleichung und Sternzeit für den mittleren Mittag des 15. Meridians östl. von Greenwich (mitteleuropäische Einheits-Zeit). S. noch Tab. 46.

Die Sternzeit um Mittag wächst in einem Tage um 3min 56,6sec = 236,6sec.

Mittlere Ortszeit = Sonnenzeit + Zeitgleichung.

* Die eingeklammerten Daten gelten für Schaltjahre.

*	Deklination der Sonne	Diff. für 1 t	Zeitgleichung	Sternzeit am Mittag		Deklination der Sonne	Diff. für 1 t	Zeitgleichung	Sternzeit am Mittag
	0	0	m s	h m s		0	0	m s	h m s
Jan. 0 (1)	—23,10	,092	+ 3 15	18 38 42	Juli 4	+22,92	,068	+ 4 0	6 48 4
5 (6)	—22,64	,130	5 34	58 24	9	22,41	,102	4 49	7 7 47
10 (11)	—21,99	,166	7 42	19 18 7	14	21,73	,136	5 29	27 30
15 (16)	—21,16	,200	9 36	37 50	19	20,91	,164	5 58	47 13
20 (21)	—20,16	,230	11 13	57 33	24	19,94	,194	6 13	8 6 56
25 (26)	—19,01	,260	12 33	20 17 16	29	18,83	,222	6 13	26 38
30 (31)	—17,71	,288	13 32	36 58	Aug. 3	17,59	,248	5 57	46 21
Febr. 4 (5)	—16,27	,308	14 10	56 41	8	16,23	,272	5 27	9 6 4
9 (10)	—14,73	,330	14 27	21 16 24	13	14,76	,294	4 42	25 47
14 (15)	—13,08	,348	14 25	36 7	18	13,19	,314	3 44	45 29
19 (20)	—11,34	,364	14 5	55 49	23	11,54	,330	2 33	10 5 12
24 (25)	— 9,52	,374	13 28	22 15 32	28	9,81	,346	+ 1 11	24 55
März 1	— 7,65	,384	12 36	35 15	Sept. 2	8,01	,360	— 0 20	44 38
6	— 5,73	,390	11 31	54 58	7	6,16	,370	— 1 59	11 4 21
11	— 3,78	,394	10 15	23 14 41	12	4,27	,378	— 3 41	24 3
16	— 1,81	,394	8 52	34 23	17	2,35	,384	— 5 26	43 46
21	+ 0,16	,394	7 23	54 6	22	+ 0,40	,390	— 7 12	12 3 29
26	2,13	,390	5 52	0 13 49	27	— 1,55	,390	— 8 55	23 12
31	4,08	,384	4 19	33 32	Oct. 2	— 3,49	,388	—10 34	42 54
April 5	6,00	,374	2 49	53 14	7	— 5,42	,386	—12 4	13 2 37
10	7,87	,364	1 23	1 12 57	12	— 7,32	,380	—13 24	22 20
15	9,69	,352	+ 0 4	32 40	17	— 9,19	,374	—14 31	42 3
20	11,45	,334	— 1 5	52 23	22	—10,99	,360	—15 23	14 1 45
25	13,12	,318	— 2 4	2 12 5	27	—12,73	,348	—16 0	21 28
30	14,71	,296	— 2 52	31 48	Nov. 1	—14,38	,330	—16 18	41 11
Mai 5	16,19	,276	— 3 27	51 31	6	—15,94	,312	—16 16	15 0 54
10	17,57	,250	— 3 48	3 11 14	11	—17,38	,288	—15 52	20 37
15	18,82	,224	— 3 53	30 57	16	—18,71	,266	—15 7	40 19
20	19,94	,196	— 3 45	50 39	21	—19,89	,236	—14 2	16 0 2
25	20,92	,164	— 3 23	4 10 22	26	—20,92	,206	—12 36	19 45
30	21,74	,136	— 2 49	30 5	Dec. 1	—21,79	,174	—10 53	39 28
Juni 4	22,42	,100	— 2 4	49 48	6	—22,49	,140	— 8 54	59 10
9	22,92	,068	— 1 11	5 9 30	11	—23,00	,102	— 6 40	17 18 53
14	23,26	,034	— 0 10	29 13	16	—23,32	,064	— 4 17	38 36
19	23,43	,000	+ 0 55	48 56	21	—23,45	,026	— 1 49	58 19
24	23,43	,034	+ 2 0	6 8 39	26	—23,39	,012	+ 0 41	18 18 2
29	+23,26	,068	+ 3 2	6 28 22	31	—23,12	,054	+ 3 8	18 37 44

46. Korrektionstafel für den Anfang des Jahres.

Jahr	Korrektion
	Tage
1899	+0,214
1900	—0,028
1901	—0,270
1902	—0,512
1903	—0,755
1904	+0,003
1905	—0,239
1906	—0,481
1907	—0,724
1908	+0,034
1909	—0,208
1910	—0,450

47. Halbmesser der Sonne.

Datum	Halbmesser
	0
Januar 1.	0,272
Februar 1.	0,271
März 1.	0,269
April 1.	0,267
Mai 1.	0,265
Juni 1.	0,263
Juli 1.	0,263
August 1.	0,263
Septbr. 1.	0,265
Oktbr. 1.	0,267
Novbr. 1.	0,269
Decbr. 1.	0,271

48. Mittlere Refraktion eines Gestirns.

Höhe	Refraktion
0	0
5	0,16
7	0,12
10	0,09
15	0,06
20	0,044
30	0,028
40	0,019
50	0,013
60	0,009
70	0,006
80	0,003
90	0,000

49. Mittlere Örter einiger Hauptsterne für 1900,0.

	Rektascension			Jährl. Zuwachs	Deklination			Jährl. Zuwachs
	h	min	sec	sec	0	′	″	″
α Cassiopeiae	0	34	49,7	+ 3,38	55	59	20	+19,8
α Arietis	2	1	32,0	+ 3,37	22	59	23	+17,2
α Persei	3	17	10,8	+ 4,26	49	30	19	+13,0
α Tauri (Aldebaran)	4	30	10,9	+ 3,44	16	18	30	+ 7,5
α Aurigae (Capella)	5	9	18,0	+ 4,43	45	53	47	+ 4,0
α Orionis	5	49	45,4	+ 3,25	7	23	19	+ 0,9
α Can. maj. (Sirius)	6	40	44,6	+ 2,64	—16	34	44	— 4,7
α Gemin. (Castor)	7	28	13,0	+ 3,84	32	6	29	— 7,6
α Can. min. (Procyon)	7	34	4,1	+ 3,14	5	28	53	— 9,0
α Hydrae	9	22	40,4	+ 2,95	— 8	13	30	—15,5
α Leonis (Regulus)	10	3	2,8	+ 3,20	12	27	22	—17,5
α Ursae maj.	10	57	33,6	+ 3,74	62	17	27	—19,4
β Leonis	11	43	57,5	+ 3,06	15	7	52	—20,1
α Virginis (Spica)	13	19	55,4	+ 3,15	—10	38	22	—18,9
α Bootis (Arcturus)	14	11	6,0	+ 2,73	19	42	11	—18,8
α Coronae (Gemma)	15	30	27,2	+ 2,54	27	3	4	—12,3
α Scorpii (Antares)	16	23	16,4	+ 3,67	—26	12	38	— 8,2
α Ophiuchi	17	30	17,5	+ 2,78	12	37	58	— 2,8
α Lyrae (Wega)	18	33	33,2	+ 2,03	38	41	26	+ 3,2
α Aquilae (Atair)	19	45	54,2	+ 2,93	8	36	14	+ 9,3
α Cygni	20	38	1,4	+ 2,04	44	55	22	+12,8
α Piscium (Fomalhaut)	22	52	7,5	+ 3,32	—30	9	9	+19,0
α Pegasi	22	59	46,7	+ 2,98	14	40	2	+19,3
α Urs. min. (Polaris)	1	22	33,4	+25,2	88	46	27	+18,8
δ Ursae minoris	18	4	32,8	—19,5	86	36	48	+ 0,4

50. Verschiedene Zahlen.

$\pi = 3{,}1416$ ($^{22}/_7$); $\pi^2 = 9{,}8696$; $1/\pi = 0{,}31831$; $\log \pi = \cdot 49715$.
$4\pi = 12{,}566$ ($^{100}/_8$); $1/4\pi = 0{,}079577$; $\lg 4\pi = 1 \cdot 09921$.
Basis der natürlichen Logarithmen $e = 2{,}7183$; $\log e = \cdot 43429$.
Modul der nat. Logarithmen $M = 1/\log e = 2{,}3026$; $\log M = \cdot 36222$.
Der Winkel, für welchen der Bogen dem Halbmesser gleich ist:
$= 57{,}2958^0 = 3437{,}75' = 206265''$.
log $= 1 \cdot 758123$ $3 \cdot 536274$ $5 \cdot 314425$.
1 Pariser Fufs $= 0{,}32484$ m; 1 m $= 3{,}0784$ Pariser Fufs.
1 Rhein. Fufs $= 0{,}31385$ m; 1 m $= 3{,}1862$ Rhein. Fufs.
1 Engl. Fufs $= 0{,}30479$ m; 1 m $= 3{,}2809$ Engl. Fufs.
1 Geogr. Meile $= 7{,}4204$ km; 1 km $= 0{,}13476$ Geogr. Meile.
Die halbe grofse Axe der Erde $= 6378{,}2$ km,
die halbe kleine Axe „ „ $= 6356{,}5$ km,
der mittlere Halbmesser „ „ $= 6367{,}4$ km.
Mittlere Länge des bürgerlichen Jahres = 365 t 5 h 48,8 min.
Sterntag = mittlerer Tag — 3 min 55,9 sec = 0,99727 mittl. Tag.
Schallgeschwindigkeit bei 0^0 in trockener Luft = 331 m/sec.
Ausdehnungskoefficient der Gase $= 0{,}00367 = {}^1/_{273}$.
Ausd.-Koefficient des Wassers um $18^0 = 0{,}000185 = 1/5400$.
1 gr-Gew. unter 45^0 Breite = 980,6 cm gr sec^{-2} = 980,6 Dyne.
1 Atm. Druck = 1033 gr-Gew./cm^2 = 1013200 cm^{-1} gr sec^{-2}.
1 Wasser-gr-Kal. (15^0) = 427 gr-Gew.·m = 41900000 cm^2 gr sec^{-2}.
Schmelzwärme des Wassers = 80,1; Dampfwärme = 539.
Specifische Wärme der Luft bei konstantem Druck = 0,237.
Verhältnis der sp. Wärmen für zweiatom. vollkommene Gase = 1,40.
Kapillarkonstante d. Wassers 7,7; Alkohol 2,3; Quecksilber 50 mg/mm.
Verhältnis des Molekulargewichtes zur Dampfdichte = 28,95.
Brechungsverhältnis des Lichtes in Luft = 1,00029.
Wellenlänge des Natriumlichtes (D Fraunhofer) = 0,0005893 mm.
Quarz von 1 mm Dicke dreht bei 18^0 das Natriumlicht um $21{,}71^0$.
Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume $v = 300 \cdot 10^8$ cm/sec.
1 A = 0,1 elektromagnetische [C.G.S] = $300 \cdot 10^7$ el.-stat. [C.G.S]
= 1,118 mg Silber/sec.
1 Θ = 10^9 elektromagnetische [C.G.S] = $1/9 \cdot 10^{-11}$ el.-stat. [C.G.S]
= 1,063 m/mm^2 Hg 0^0 = 1,014 B.A.E.
1 leg. Ohm = 0,9972 Θ.
1 V = 10^8 el.-magn. [C.G.S] = 1/300 el.-stat. [C.G.S].
1 leg. Volt = 0,9972 V.
Akkumulator = 2,0; Daniell = 1,1 bis 1,2 V; Clark bei 18^0 = 1,4292 V.
Quecksilber-Cadmium-Element, bei 4^0 gesättigt = 1,0190 V;
dasselbe, mit stets gesättigter Lösung, bei 15 bis 19^0 = 1,0187 V.
1 VA oder Watt = 0,102 kg-G · m/sec = 0,239 Wasser-gr-Kal./sec.

51. Quadrate. Quadrat- und Kubikwurzeln. Verwandlung von Bogengraden in absolutes Winkelmafs.

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n\frac{\pi}{180}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n\frac{\pi}{180}$
					50	2500	7,071	3,684	0,873
1	1	1,000	1,000	0,0175	51	2601	7,141	3,708	0,890
2	4	1,414	1,260	0,0349	52	2704	7,211	3,733	0,908
3	9	1,732	1,442	0,0524	53	2809	7,280	3,756	0,925
4	16	2,000	1,587	0,0698	54	2916	7,348	3,780	0,942
5	25	2,236	1,710	0,0873	55	3025	7,416	3,803	0,960
6	36	2,449	1,817	0,1047	56	3136	7,483	3,826	0,977
7	49	2,646	1,913	0,1222	57	3249	7,550	3,849	0,995
8	64	2,828	2,000	0,1396	58	3364	7,616	3,871	1,012
9	81	3,000	2,080	0,1571	59	3481	7,681	3,893	1,030
10	100	3,162	2,154	0,1745	60	3600	7,746	3,915	1,047
11	121	3,317	2,224	0,1920	61	3721	7,810	3,936	1,065
12	144	3,464	2,289	0,2094	62	3844	7,874	3,958	1,082
13	169	3,606	2,351	0,2269	63	3969	7,937	3,979	1,100
14	196	3,742	2,410	0,2443	64	4096	8,000	4,000	1,117
15	225	3,873	2,466	0,2618	65	4225	8,062	4,021	1,134
16	256	4,000	2,520	0,2793	66	4356	8,124	4,041	1,152
17	289	4,123	2,571	0,2967	67	4489	8,185	4,062	1,169
18	324	4,243	2,621	0,3142	68	4624	8,246	4,082	1,187
19	361	4,359	2,668	0,3316	69	4761	8,307	4,102	1,204
20	400	4,472	2,714	0,3491	70	4900	8,367	4,121	1,222
21	441	4,583	2,759	0,3665	71	5041	8,426	4,141	1,239
22	484	4,690	2,802	0,3840	72	5184	8,485	4,160	1,257
23	529	4,796	2,844	0,4014	73	5329	8,544	4,179	1,274
24	576	4,899	2,884	0,4189	74	5476	8,602	4,198	1,292
25	625	5,000	2,924	0,4363	75	5625	8,660	4,217	1,309
26	676	5,099	2,962	0,4538	76	5776	8,718	4,236	1,326
27	729	5,196	3,000	0,4712	77	5929	8,775	4,254	1,344
28	784	5,292	3,037	0,4887	78	6084	8,832	4,273	1,361
29	841	5,385	3,072	0,5061	79	6241	8,888	4,291	1,379
30	900	5,477	3,107	0,5236	80	6400	8,944	4,309	1,396
31	961	5,568	3,141	0,5411	81	6561	9,000	4,327	1,414
32	1024	5,657	3,175	0,5585	82	6724	9,055	4,344	1,431
33	1089	5,745	3,208	0,5760	83	6889	9,110	4,362	1,449
34	1156	5,831	3,240	0,5934	84	7056	9,165	4,380	1,466
35	1225	5,916	3,271	0,6109	85	7225	9,220	4,397	1,484
36	1296	6,000	3,302	0,6283	86	7396	9,274	4,414	1,501
37	1369	6,083	3,332	0,6458	87	7569	9,327	4,431	1,518
38	1444	6,164	3,362	0,6632	88	7744	9,381	4,448	1,536
39	1521	6,245	3,391	0,6807	89	7921	9,434	4,465	1,553
40	1600	6,325	3,420	0,6981	90	8100	9,487	4,481	1,571
41	1681	6,403	3,448	0,7156	91	8281	9,539	4,498	1,588
42	1764	6,481	3,476	0,7330	92	8464	9,592	4,514	1,606
43	1849	6,557	3,503	0,7505	93	8649	9,644	4,531	1,623
44	1936	6,633	3,530	0,7679	94	8836	9,695	4,547	1,641
45	2025	6,708	3,557	0,7854	95	9025	9,747	4,563	1,658
46	2116	6,782	3,583	0,8029	96	9216	9,798	4,579	1,676
47	2209	6,856	3,609	0,8203	97	9409	9,849	4,595	1,693
48	2304	6,928	3,634	0,8378	98	9604	9,899	4,610	1,710
49	2401	7,000	3,659	0,8552	99	9801	9,950	4,626	1,728
50	2500	7,071	3,684	0,8727	100	10000	10,000	4,642	1,745

52. Zur Wheatstone-Kirchhoff'schen

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,0000	0,1111	0,2500	0,4286	0,6667	1,0000	1,500	2,333	4,000	9,00
1	,0010	,1123	,2516	,4306	,6694	1,0040	1,506	2,344	4,025	9,10
2	,0020	,1136	,2531	,4327	,6722	1,0080	1,513	2,356	4,051	9,20
3	,0030	,1148	,2547	,4347	,6750	1,0121	1,519	2,367	4,076	9,31
4	,0040	,1161	,2563	,4368	,6779	1,0161	1,525	2,378	4,102	9,42
5	,0050	,1173	,2579	,4388	,6807	1,0202	1,532	2,390	4,128	9,53
6	,0060	,1186	,2594	,4409	,6835	1,0243	1,538	2,401	4,155	9,64
7	,0070	,1198	,2610	,4430	,6863	1,0284	1,545	2,413	4,181	9,75
8	,0081	,1211	,2626	,4451	,6892	1,0325	1,551	2,425	4,208	9,87
9	,0091	,1223	,2642	,4472	,6921	1,0367	1,558	2,436	4,236	9,99
10	,0101	,1236	,2658	,4493	,6949	1,0408	1,564	2,448	4,263	10,11
11	,0111	,1249	,2674	,4514	,6978	1,0450	1,571	2,460	4,291	10,24
12	,0121	,1261	,2690	,4535	,7007	1,0492	1,577	2,472	4,319	10,36
13	,0132	,1274	,2706	,4556	,7036	1,0534	1,584	2,484	4,348	10,49
14	,0142	,1287	,2723	,4577	,7065	1,0576	1,591	2,497	4,376	10,63
15	,0152	,1299	,2739	,4599	,7094	1,0619	1,597	2,509	4,405	10,76
16	,0163	,1312	,2755	,4620	,7123	1,0661	1,604	2,521	4,435	10,90
17	,0173	,1325	,2771	,4641	,7153	1,0704	1,611	2,534	4,464	11,05
18	,0183	,1338	,2788	,4663	,7182	1,0747	1,618	2,546	4,495	11,20
19	,0194	,1351	,2804	,4684	,7212	1,0790	1,625	2,559	4,525	11,35
20	,0204	,1364	,2820	,4706	,7241	1,0833	1,632	2,571	4,556	11,50
21	,0215	,1377	,2837	,4728	,7271	1,0877	1,639	2,584	4,587	11,66
22	,0225	,1390	,2853	,4749	,7301	1,0921	1,646	2,597	4,618	11,82
23	,0235	,1403	,2870	,4771	,7331	1,0964	1,653	2,610	4,650	11,99
24	,0246	,1416	,2887	,4793	,7361	1,1008	1,660	2,623	4,682	12,16
25	,0256	,1429	,2903	,4815	,7391	1,1053	1,667	2,636	4,714	12,33
26	,0267	,1442	,2920	,4837	,7422	1,1097	1,674	2,650	4,747	12,51
27	,0277	,1455	,2937	,4859	,7452	1,1142	1,681	2,663	4,780	12,70
28	,0288	,1468	,2953	,4881	,7483	1,1186	1,688	2,676	4,814	12,89
29	,0299	,1481	,2970	,4903	,7513	1,1231	1,695	2,690	4,848	13,08
30	,0309	,1494	,2987	,4925	,7544	1,1277	1,703	2,704	4,882	13,29
31	,0320	,1507	,3004	,4948	,7575	1,1322	1,710	2,717	4,917	13,49
32	,0331	,1521	,3021	,4970	,7606	1,1368	1,717	2,731	4,952	13,71
33	,0341	,1534	,3038	,4993	,7637	1,1413	1,725	2,745	4,988	13,93
34	,0352	,1547	,3055	,5015	,7668	1,1459	1,732	2,759	5,024	14,15
35	,0363	,1561	,3072	,5038	,7699	1,1505	1,740	2,774	5,061	14,38
36	,0373	,1574	,3089	,5060	,7731	1,1552	1,747	2,788	5,098	14,63
37	,0384	,1587	,3106	,5083	,7762	1,1598	1,755	2,802	5,135	14,87
38	,0395	,1601	,3123	,5106	,7794	1,1645	1,762	2,817	5,173	15,13
39	,0406	,1614	,3141	,5129	,7825	1,1692	1,770	2,831	5,211	15,39
40	,0417	,1628	,3158	,5152	,7857	1,1739	1,778	2,846	5,250	15,67
41	,0428	,1641	,3175	,5175	,7889	1,1786	1,786	2,861	5,289	15,95
42	,0438	,1655	,3193	,5198	,7921	1,1834	1,793	2,876	5,329	16,24
43	,0449	,1669	,3210	,5221	,7953	1,1882	1,801	2,891	5,369	16,54
44	,0460	,1682	,3228	,5244	,7986	1,1930	1,809	2,906	5,410	16,86
45	,0471	,1696	,3245	,5267	,8018	1,1978	1,817	2,922	5,452	17,18
46	,0482	,1710	,3263	,5291	,8051	1,2026	1,825	2,937	5,494	17,52
47	,0493	,1723	,3280	,5314	,8083	1,2075	1,833	2,953	5,536	17,87
48	,0504	,1737	,3298	,5337	,8116	1,2124	1,841	2,968	5,579	18,23
49	,0515	,1751	,3316	,5361	,8149	1,2173	1,849	2,984	5,623	18,61
50	0,0526	0,1765	0,3333	0,5385	0,8182	1,2222	1,857	3,000	5,667	19,00

Drahtbrücke. Zahlenwerte für a/b, wenn $a+b=1000$.

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
50	0,0526	0,1765	0,3333	0,5385	0,8182	1,2222	1,857	3,000	5,667	19,00
51	,0537	,1779	,3351	,5408	,8215	1,2272	1,865	3,016	5,711	19,41
52	,0549	,1792	,3369	,5432	,8248	1,2321	1,874	3,032	5,757	19,83
53	,0560	,1806	,3387	,5456	,8282	1,2371	1,882	3,049	5,803	20,28
54	,0571	,1820	,3405	,5480	,8315	1,2422	1,890	3,065	5,849	20,74
55	,0582	,1834	,3423	,5504	,8349	1,2472	1,899	3,082	5,897	21,22
56	,0593	,1848	,3441	,5528	,8382	1,2523	1,907	3,098	5,944	21,73
57	,0604	,1862	,3459	,5552	,8416	1,2573	1,915	3,115	5,993	22,26
58	,0616	,1876	,3477	,5576	,8450	1,2624	1,924	3,132	6,042	22,81
59	,0627	,1891	,3495	,5601	,8484	1,2676	1,933	3,149	6,092	23,39
60	,0638	,1905	,3514	,5625	,8519	1,2727	1,941	3,167	6,143	24,00
61	,0650	,1919	,3532	,5649	,8553	1,2779	1,950	3,184	6,194	24,64
62	,0661	,1933	,3550	,5674	,8587	1,2831	1,959	3,202	6,246	25,32
63	,0672	,1947	,3569	,5699	,8622	1,2883	1,967	3,219	6,299	26,03
64	,0684	,1962	,3587	,5723	,8657	1,2936	1,976	3,237	6,353	26,78
65	,0695	,1976	,3605	,5748	,8692	1,2989	1,985	3,255	6,407	27,57
66	,0707	,1990	,3624	,5773	,8727	1,3041	1,994	3,274	6,463	28,41
67	,0718	,2005	,3643	,5798	,8762	1,3095	2,003	3,292	6,519	29,30
68	,0730	,2019	,3661	,5823	,8797	1,3148	2,012	3,310	6,576	30,25
69	,0741	,2034	,3680	,5848	,8832	1,3202	2,021	3,329	6,634	31,26
70	,0753	,2048	,3699	,5873	,8868	1,3256	2,030	3,348	6,692	32,33
71	,0764	,2063	,3717	,5898	,8904	1,3310	2,040	3,367	6,752	33,48
72	,0776	,2077	,3736	,5924	,8939	1,3364	2,049	3,386	6,813	34,71
73	,0787	,2092	,3755	,5949	,8975	1,3419	2,058	3,405	6,874	36,04
74	,0799	,2107	,3774	,5974	,9011	1,3474	2,067	3,425	6,937	37,46
75	,0811	,2121	,3793	,6000	,9048	1,3529	2,077	3,444	7,000	39,00
76	,0823	,2136	,3812	,6026	,9084	1,3585	2,086	3,464	7,065	40,67
77	,0834	,2151	,3831	,6051	,9120	1,3641	2,096	3,484	7,130	42,48
78	,0846	,2165	,3850	,6077	,9157	1,3697	2,106	3,505	7,197	44,45
79	,0858	,2180	,3870	,6103	,9194	1,3753	2,115	3,525	7,264	46,62
80	,0870	,2195	,3889	,6129	,9231	1,3810	2,125	3,545	7,333	49,00
81	,0881	,2210	,3908	,6155	,9268	1,3866	2,135	3,566	7,403	51,63
82	,0893	,2225	,3928	,6181	,9305	1,3923	2,145	3,587	7,475	54,56
83	,0905	,2240	,3947	,6207	,9342	1,3981	2,155	3,608	7,547	57,82
84	,0917	,2255	,3966	,6234	,9380	1,4038	2,165	3,630	7,621	61,50
85	,0929	,2270	,3986	,6260	,9417	1,4096	2,175	3,651	7,696	65,67
86	,0941	,2285	,4006	,6287	,9455	1,4155	2,185	3,673	7,772	70,43
87	,0953	,2300	,4025	,6313	,9493	1,4213	2,195	3,695	7,850	75,92
88	,0965	,2315	,4045	,6340	,9531	1,4272	2,205	3,717	7,929	82,33
89	,0977	,2330	,4065	,6367	,9569	1,4331	2,215	3,739	8,009	89,91
90	,0989	,2346	,4085	,6393	,9608	1,4390	2,226	3,762	8,091	99,00
91	,1001	,2361	,4104	,6420	,9646	1,4450	2,236	3,785	8,174	110,1
92	,1013	,2376	,4124	,6447	,9685	1,4510	2,247	3,808	8,259	124,0
93	,1025	,2392	,4144	,6474	,9724	1,4570	2,257	3,831	8,346	141,9
94	,1038	,2407	,4164	,6502	,9763	1,4631	2,268	3,854	8,434	165,7
95	,1050	,2422	,4184	,6529	,9802	1,4691	2,279	3,878	8.524	199,0
96	,1062	,2438	,4205	,6556	,9841	1,4752	2,289	3,902	8,615	249,0
97	,1074	,2453	,4225	,6584	,9881	1,4814	2,300	3,926	8,709	332,3
98	,1086	,2469	,4245	,6611	,9920	1,4876	2,311	3,950	8,804	499,0
99	,1099	,2484	,4265	,6639	,9960	1,4938	2,322	3,975	8,901	999,0
100	0,1111	0,2500	0,4286	0,6667	1,0000	1,5000	2,333	4,000	9,000	∞

53. Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	42
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	38
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	35
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	32
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	30
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	28
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	26
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	25
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	24
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	22
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	19
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	18
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	14
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	11
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	5
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	5
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
100	**0** 0000	0043	0087	0130	0173	0217	0260	0303	0346	0389	43
101	**0** 0432	0475	0518	0561	0604	0647	0689	0732	0775	0817	43
102	**0** 0860	0903	0945	0988	1030	1072	1115	1157	1199	1242	42
103	**0** 1284	1326	1368	1410	1452	1494	1536	1578	1620	1662	42
104	**0** 1703	1745	1787	1828	1870	1912	1953	1995	2036	2078	42
105	**0** 2119	2160	2202	2243	2284	2325	2366	2407	2449	2490	41
106	**0** 2531	2572	2612	2653	2694	2735	2776	2816	2857	2898	41
107	**0** 2938	2979	3019	3060	3100	3141	3181	3222	3262	3302	40
108	**0** 3342	3383	3423	3463	3503	3543	3583	3623	3663	3703	40
109	**0** 3743	3782	3822	3862	3902	3941	3981	4021	4060	4100	40
110	**0** 4139	4179	4218	4258	4297	4336	4376	4415	4454	4493	39
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.